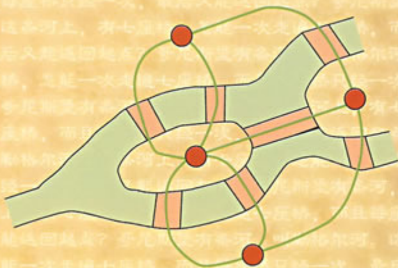
TURING 图灵数学·统计学丛书 13

McGraw Hill Education



# Introduction to Graph Theory

# 图论导引

[美] Gary Chartrand Ping Zhang 著

范益政 汪毅 龚世才 朱明 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

# 版权声明

Gary Chartrand, Ping Zhang: *Introduction to Graph Theory* (ISBN: 0-07-320416-1).

Copyright © 2005 by The McGraw-Hill Companies, Inc.

Original edition published by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or distributed in any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Simplified Chinese translation edition jointly published by McGraw-Hill Education(Asia) Co.and POSTS & TELECOM PRESS.

本书简体中文版由人民邮电出版社和麦格劳－希尔教育出版 (亚洲) 公司合作出版. 此版本仅限在中华人民共和国 (不包括香港、澳门特别行政区和台湾地区) 销售. 未经许可之出口, 视为违反著作权法, 将受法律之制裁.

未经出版者预先书面许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分.

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签, 无标签者不得销售.

版权所有, 侵权必究.

# 译 者 序

1736 年, 欧拉 (Euler) 在他的一篇论文中讨论了哥尼斯堡七桥问题, 由此诞生了一个全新的数学分支 —— 图论 (Graph Theory). 经过 200 多年的发展, 图论已发展成为一个理论与应用兼有的研究领域. 除经典图论之外, 图论与代数 (如矩阵论和群论等) 的结合形成了代数图论, 与拓扑的结合形成了拓扑图论, 与概率的结合形成了随机图论, 与谱几何的结合形成了谱图理论, 等等. 此外, 它在有机化学上的应用形成了化学图论, 同时它在计算机和模式识别等领域也有很高的应用价值.

本书是一本优秀的图论教材, 由美国西密歇根大学教授 Gary Chartrand 和 Ping Zhang 合著. Chartrand 教授为国际著名的图论专家, 他在图论领域发表了数量众多的优秀论文, 总数排名世界第 4 位, 合作者包括 Erdős 和 Frank Harary 等著名数学家.

本书生动有趣地介绍了图论的常见专题, 同时也包含一些待进一步研究或未解决的问题, 用于激发学生兴趣, 培养创新能力. 本书可作为本科生一学期课程教材, 也可供图论爱好者自学使用. 本书内容全面, 证明与应用实例并举, 还给出了证明方法, 书的最后提供了奇数号习题的解答或提示.

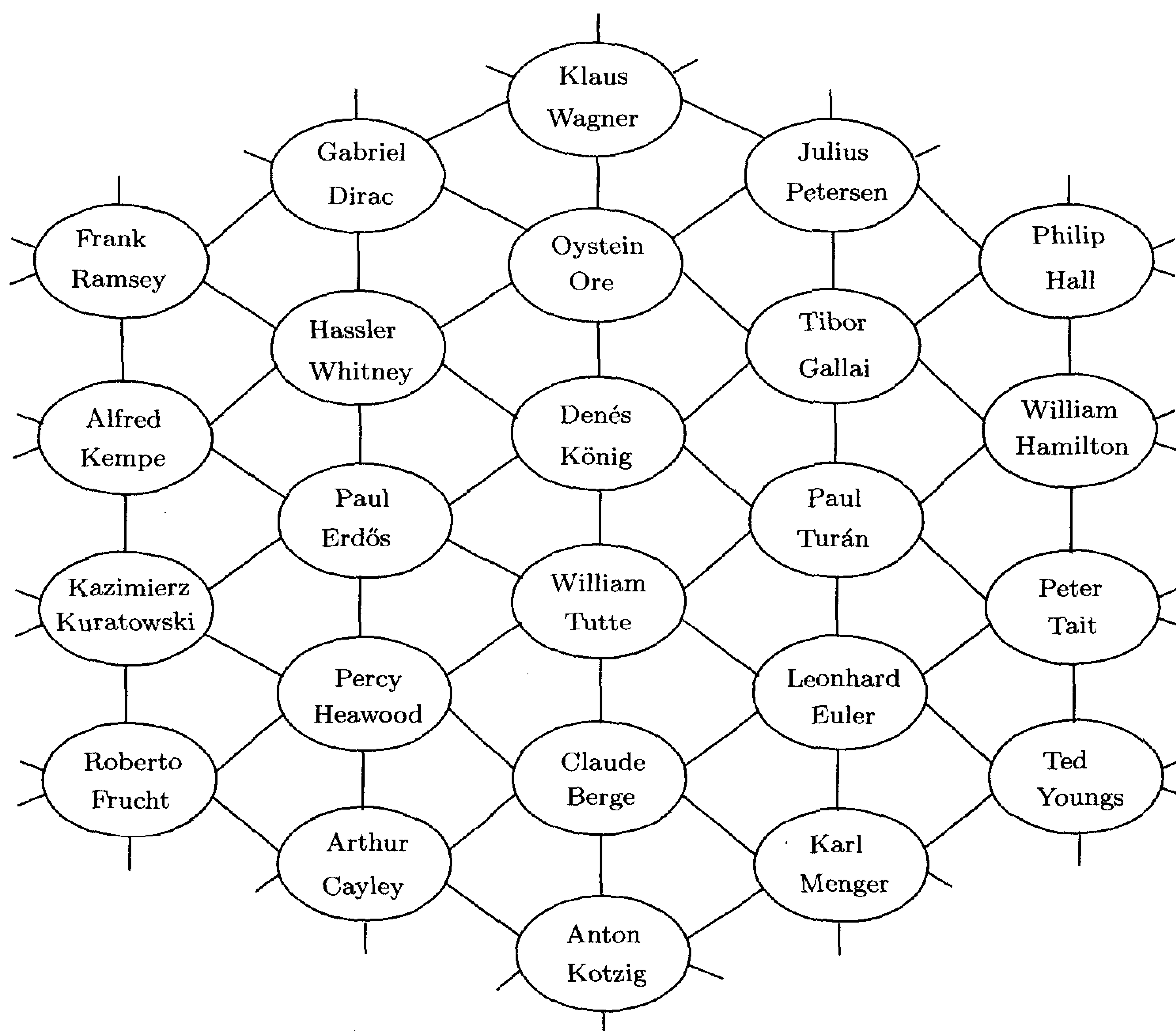
本书由范益政、汪毅、龚世才和朱明翻译, 全书最后由范益政统稿. 限于译者水平, 译文中难免存在疏漏和错误, 望广大读者批评指正.

感谢人民邮电出版社北京图灵文化发展有限公司为我们提供机会, 把这本优秀教材推荐给国内广大读者, 促进中国图论的发展. 最后感谢国家自然科学基金 (10601001) 的资助.

译 者

2007 年 1 月

谨以此书献给那些以不同方式为推动图论发展做出杰出贡献的众多数学家们.




从 Königsberg 到 König 的书,
图论的传说正是如此,
而且越来越精彩 ······

——Blanche Descartes (1969)

# 前　　言

也许你并不感到惊讶, 当我们自己在学习数学时, 一直认为我们所学到的就是那些已知的事实 —— 那些自古就有的事实. 直到后来, 我们才明白这些事实 (即"定理", 已经成为我们词汇的一部分) 并非早就存在, 而正是人们发现了这些事实. 的确, 这些人的名字也成为我们学习内容的一部分.

数学已经存在了几千年. 在远古时代, 一些特定的文化形成了它们独特的数学. 这当然包括埃及、巴比伦、希腊、中国、印度和日本. 在近代, 这些都融合为统一的国际数学. 数学已经变得更加系统化, 且已经被划分为有更加明确定义的若干领域 (尽管它们之间存在一些重要的交叉). 有了这些变化, 关于一个数学命题正确性的阐述 (或证明) 也就变得更加结构化且更加易于表达.

本书的宗旨是向本科生 (或者某些高中生) 介绍数学的一个领域 —— 图论, 它诞生于 18 世纪上半叶. 到 19 世纪下半叶这个领域才发展为数学的一个系统的分支. 而直到 20 世纪上半叶, 这门学科才有自己的著作出现. 然而自 20 世纪下半叶开始, 这门学科发展迅猛.

我们的意图是向读者介绍这门学科的若干主要专题, 以及那些为发展和塑造该领域做出贡献的人. 一开始, 大多数人都和你一样, 喜欢数学并带着强烈的好奇心. 正如其他事物 (尽管不常提起) 一样, 数学也有其自身非严格的一面; 我们也介绍其中的若干事件. 即使是最聪明的数学家, 他也不可能洞悉一切, 我们给出一些没有研究透彻的专题, 它的答案甚至这些问题也还是未知的. 这将为你提供一些机会, 进行一些创造性思考. 事实上, 也许下一个对此学科有重大影响的人就是你.

促使图论变得有趣的原因之一, 是可以用图为特定问题建模. 这些问题在图的帮助下得以展开研究 (或可能被解决). 正由于这一点, 图模型在全书经常出现. 当然, 图论是数学的一个领域, 因而必然涉及数学理论的研究 —— 一些概念以及它们之间的联系. 我们之所以选择本书所含的专题和结论, 是因为它们或者非常有趣, 或者非常重要, 或者是这门学科的代表.

如前所述, 这本书是为本科生写的. 正因为这一点, 我们一般在合适的地方都给出了定理的证明, 证明的方法带有启发性, 且证明也不是太长. 我们总希望本书的内容不仅对学数学的学生, 也对其他图论爱好者都是有益的、有趣的. 这本书同样适用于自学.

本书包含 3 个附录. 在附录 1 中, 我们回顾一些重要的有关集合和逻辑的事实; 附录 2 主要讨论等价关系和映射; 附录 3 介绍了一些证明的方法. 考虑到本科生仍然处于掌握证明的学习过程中, 我们在每个证明的开始之处都指出证明的方法. 我们知道, 如果一个学习者在试图弄清楚一个证明时, 这个证明读起来并不舒服且需

要很多的预备知识, 那么他会很沮丧. 因此, 我们尽最大努力给出清晰的、表述流畅的证明.

我们感到, 如果能够熟悉古往今来为图论做出贡献的人, 对图论的喜爱也能得以加强, 这一点对于数学的其他领域, 事实上对于任一个学术领域都是类似的. 因此, 本书也包含一些我们认为有趣的有关 "图论人" 的评注. 我们相信这些人也是图论故事的一部分, 我们在正文中讨论他们, 而不是仅作为脚注. 我们经常忽略数学是一个活的学科. 图论是由人创造的, 是一门正在进化发展的学科.

本书也把若干节设置为 "延伸阅读". 若该书作为教材使用, 则这些部分可以省略, 并无负面影响. 有时, 一个延伸阅读就是图论的一个研究领域, 我们认为它非常有趣, 但可能授课的老师不去讲它, 或者是因为没有时间, 或者这不是他的擅长. 有的时候, 延伸阅读可以提供一些图论杂闻, 涉及的数学内容很少, 仅仅是因为我们认为它非常有趣.

本书还有一些节设置为 "专题探索". 这些节包含了一些专题, 学生可以去尝试, 可以去发挥想象. 这就为学生提供一个发现问题的机会. 总之, 我们相信这会为某些学生带来学习的乐趣.

就本书作为课程教材而言, 我们认为前 3 章可作为介绍性的内容. 这部分内容可以讲得快一点. 学生应该可以自己读懂它们. 授课老师也可以不讲连通性和 Menger 定理. 8.3 节、9.2 节、10.3 节和 11.2 节可以略去, 第 12 章和第 13 章可根据老师个人意愿选讲.

在本书的结尾, 我们提供了奇数号习题的解答或提示、参考文献、人名索引、数学术语索引以及符号列表.

撰写这本书的想法源于我们与 McGraw-Hill 出版公司执行编辑 Robert Ross 的交流与讨论. 我们对他的鼓励表示感谢. 我们也向 McGraw-Hill 出版公司的其他员工的帮助表示感谢, 包括 Daniel Seibert (编辑助理), Vicki Krug (高级策划编辑). 此外, 我们对下面的审稿人致以最高的敬意, 他们是: Jay Bagga (鲍尔州立大学); Richard Borie(阿拉巴马大学)、Anthony Evans(赖特州立大学)、Mark Ginn (阿巴拉契亚州立大学)、Mark Goldberg(伦斯勒工业学院)、Arthur Hobbs(得克萨斯农工大学)、Garth Isaak(利哈伊大学)、Daphne Liu(加州州立大学洛杉矶分校)、Alan Mills (田纳西技术大学)、Dan Pritikin (迈阿密大学)、John Reay(西华盛顿大学) 和 Yue Zhao(中佛罗里达大学).

Gary Chartrand
Ping Zhang

# 译 者 简 介

**范益政** 安徽大学数学与计算科学学院教授, 博士生导师. 2001 年获中国科学与技术大学理学博士学位, 2003~2005 年在南京师范大学从事博士后研究工作, 主要研究方向为代数图论及其应用; 已发表学术论文 20 多篇, 其中有 10 篇被 SCI 收录, 8 篇被 EI 收录. 主持国家自然科学基金《图的 Laplace 理论及其在计算机视觉中的应用》和安徽省自然科学基金《谱图理论及其应用》等项目.

**汪 毅** 安徽大学数学与计算科学学院讲师. 主要研究方向为谱图及其应用, 已发表学术论文 10 余篇.

**龚世才** 安徽理工大学副教授. 主要研究方向为图论及其应用, 已发表学术论文 10 余篇.

**朱 明** 安徽大学数学与计算科学学院研究生. 主要研究方向为代数图论及其应用, 已发表学术论文 2 篇.

# 目　录


**第 1 章　引言** …… 1

1.1　图与图模型 …… 1

1.2　连通图 …… 8

1.3　若干常见的图类 …… 17

1.4　多重图与有向图 …… 24

**第 2 章　度** …… 27

2.1　顶点的度 …… 27

2.2　正则图 …… 33

2.3　度序列 …… 37

2.4　延伸阅读：图与矩阵 …… 41

2.5　专题探索：不规则图 …… 44

**第 3 章　同构图** …… 48

3.1　同构的定义 …… 48

3.2　同构关系 …… 55

3.3　延伸阅读：图与群 …… 57

3.4　延伸阅读：重构与可解性 …… 67

**第 4 章　树** …… 74

4.1　割边 …… 74

4.2　树 …… 76

4.3　最小生成树问题 …… 81

4.4　延伸阅读：生成树的个数 …… 87

**第 5 章　连通性** …… 93

5.1　割点 …… 93

5.2　块 …… 96

5.3　连通度 …… 99

5.4　Menger 定理 …… 108

5.5　专题探索：测地集 …… 113

**第 6 章　可遍历性** …… 116

6.1　Euler 图 …… 116

6.2　Hamilton 图 …… 122

6.3　专题探索：Hamilton 链与 Hamilton 数 …… 133

6.4　延伸阅读：早期的图论书籍 …… 137

**第 7 章　有向图** …… 141

7.1　强有向图 …… 141

7.2　竞赛图 …… 148

7.3　延伸阅读：决策 …… 154

7.4　专题探索：酒瓶问题 …… 158

**第 8 章　匹配与分解** …… 161

8.1　匹配 …… 161

8.2　因子分解 …… 170

8.3　分解与优美标号 …… 184

8.4　延伸阅读：立即疯游戏 …… 189

8.5　延伸阅读：Petersen 图 …… 194

8.6　专题探索：图的 $\gamma$ 标号 …… 198

**第 9 章　可平面性** …… 201

9.1　平面图 …… 201

9.2　图嵌入到曲面 …… 213

9.3　延伸阅读：图的子式 …… 221

9.4　专题探索：图嵌入到图 …… 224

**第 10 章　染色** …… 229

10.1　四色问题 …… 229

10.2　顶点染色 …… 236

10.3　边染色 …… 248

10.4　延伸阅读：Heawood 地图染色定理 …… 255

10.5　专题探索：局部染色 …… 259

**第 11 章　Ramsey 数** …… 264

11.1　图的 Ramsey 数 …… 264

11.2　Turán 定理 …… 273

11.3　专题探索：彩色 Ramsey 数 …… 279

11.4　延伸阅读：Erdös 数 …… 285

**第 12 章 距离** ······ 290

12.1 图的中心 ······ 290

12.2 远点 ······ 295

12.3 延伸阅读：定位数 ······ 302

12.4 延伸阅读：绕路距离和有向距离 ······ 306

12.5 专题探索：频道分配 ······ 311

12.6 专题探索：图与图之间的距离 ······ 316

**第 13 章 控制** ······ 319

13.1 图的控制数 ······ 319

13.2 专题探索：分层 ······ 329

13.3 专题探索：关灯游戏 ······ 334

13.4 延伸阅读：明天更美好 ······ 337

**附录 1 集合与逻辑** ······ 339

**附录 2 等价关系与映射** ······ 343

**附录 3 证明方法** ······ 347

**奇数号习题的解答与提示** ······ 353

**参考文献** ······ 380

**人名索引** ······ 388

**数学术语索引** ······ 391

**符号列表** ······ 398

# 第 1 章　引　　言

## 1.1　图与图模型

一家大型的出版公司在科学、技术和计算领域内有 10 名编辑 (分别用 $1, 2, \cdots,$ 10 来标记). 这 10 位编辑在每个月的第一个星期五都有一个固定的会议时间. 他们把自己分成 7 个委员会, 会后再碰头讨论关系公司利益的一些具体问题, 分别是: 做广告宣传、留住审稿人、联系新作者, 还有财务问题、二手书和新版书、竞争品种、院校代表等. 这就有了本书的第一个例子.

**例 1.1**　这 10 名编辑分成 7 个委员会: $c_1 = \{1,2,3\}$, $c_2 = \{1,3,4,5\}$, $c_3 = \{2,5,6,7\}$, $c_4 = \{4,7,8,9\}$, $c_5 = \{2,6,7\}$, $c_6 = \{8,9,10\}$, $c_7 = \{1,3,9,10\}$. 当这 10 名编辑在星期五都出席的情形下, 为了使这 7 个委员会都能够成功举行会议, 他们留出 3 个时间段. 由于有些编辑参与了两个委员会, 所以这些委员会是不能同时开会的. 这种情况可以用图 1.1 所示的图形象地建立模型.

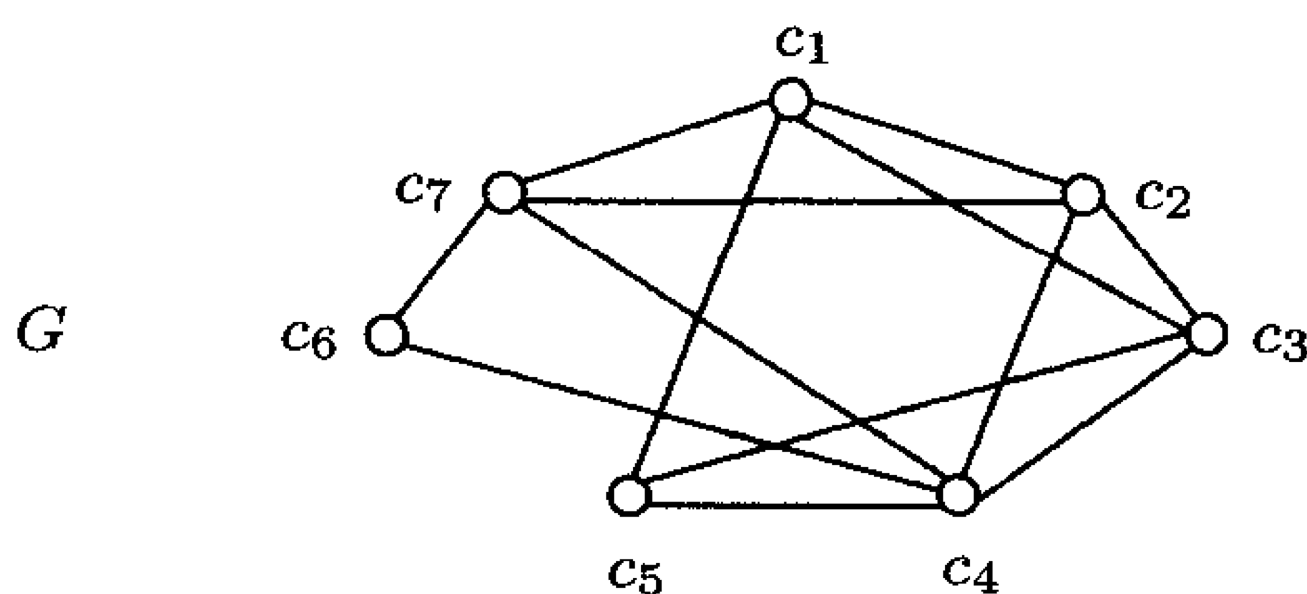



图 1.1　一个图

在这个图中, 用 7 个小圆圈分别代表 7 个委员会; 如果两个小圆圈所代表的委员会至少有一个共同的成员, 那么在它们之间连一条直线段. 换句话说, 两个小圆圈 (委员会) 间的直线段告诉我们, 这两个委员会不能同时安排开会. 这就给出了一个图或 "模型", 它反映了这些委员会以及其成员之间的重叠属性. ◇

我们在图 1.1 中所画的就称为一个图. 正式地说, **图 (graph)**$G$ 是由有限非空集合 $V$ 及其二元子集 $E$ 构成, 其中 $V$ 中元素称为**顶点 (vertex)**, $E$ 中元素称为**边 (edge)**; 集合 $V$ 和 $E$ 分别称为 $G$ 的**顶点集 (vertex set)**和**边集 (edge set)**. 因此, 图 $G$ 是由 $V$ 和 $E$ 构成的二元组 [实际上是一个*有序* (ordered) 的二元组], 记为 $G = (V, E)$. 有时把 $V$ 和 $E$ 写成 $V(G)$ 和 $E(G)$ 以强调这些顶点集和边集是属于特定图 $G$ 的. 虽然 $G$ 是图的一般记号, 但也可以用 $F$, $H$, $G'$, $G''$, $G_1$, $G_2$ 等记号. 顶

点也可以称为**点** (point)或**结点** (node); 边也可以称为**线** (line). 事实上, 有些人把我们所描述的图称为**简单图** (simple graph). 当 $V(G)=V(H)$, $E(G)=E(H)$ 时, 则称图 $G$ 和图 $H$ 是**相同的** (equal), 记为 $G=H$.

通常, 用平面上的图表来表示图 (就如我们在图 1.1 中所做的那样). 图表中的点 (实际上是小圆圈 —— 中空的或者实心的) 就代表了图的顶点; 如果图上的某两顶点之间存在边, 则在图表上与其对应的两点之间连接直线段或者曲线段. 图表自身也可以看成是一个图. 对于图 1.1 中的图 $G$, 其顶点集就是 $V(G)=\{c_1,c_2,\cdots,c_7\}$, 图 $G$ 边集是

$$E(G)=\{\{c_1,c_2\},\{c_1,c_3\},\{c_1,c_5\},\{c_1,c_7\},\{c_2,c_3\},\{c_2,c_4\},\{c_2,c_7\},\\ \{c_3,c_4\},\{c_3,c_5\},\{c_4,c_5\},\{c_4,c_6\},\{c_4,c_7\},\{c_6,c_7\}\}.$$

我们再来考虑另外一种情形. 你见过这样的一个整数序列吗?

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$$

序列中的每个整数都是它前面最近的两个整数之和 (除了最前面的两个整数). 这些整数在数学中是非常著名的, 称为**Fibonacci 数**. 事实上, 这些整数出现得相当频繁, 甚至有本期刊 (*The Fibonacci Quarterly*, 一年出版 5 期! ) 专门来研究它们的性质. 我们的第二个例子就是关于这些整数的.

**例 1.2** 考虑由 6 个给定的 Fibonacci 数构成的集合 $S=\{2,3,5,8,13,21\}$. $S$ 含有这样一些不同整数对, 它们的和或差 (取绝对值) 还是属于 $S$, 即, $\{2,3\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5\}$, $\{3,8\}$, $\{5,8\}$, $\{5,13\}$, $\{8,13\}$, $\{8,21\}$, $\{13,21\}$. 通过图 1.2 中的图 $H$, 就有了一个更加形象化的方法来找出这几对整数. 在此情形下, $V(H)=\{2,3,5,8,13,21\}$,

$$E(H)=\{\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\},\{3,8\},\{5,8\},\{5,13\},\{8,13\},\{8,21\},\{13,21\}\}. \quad \diamond$$

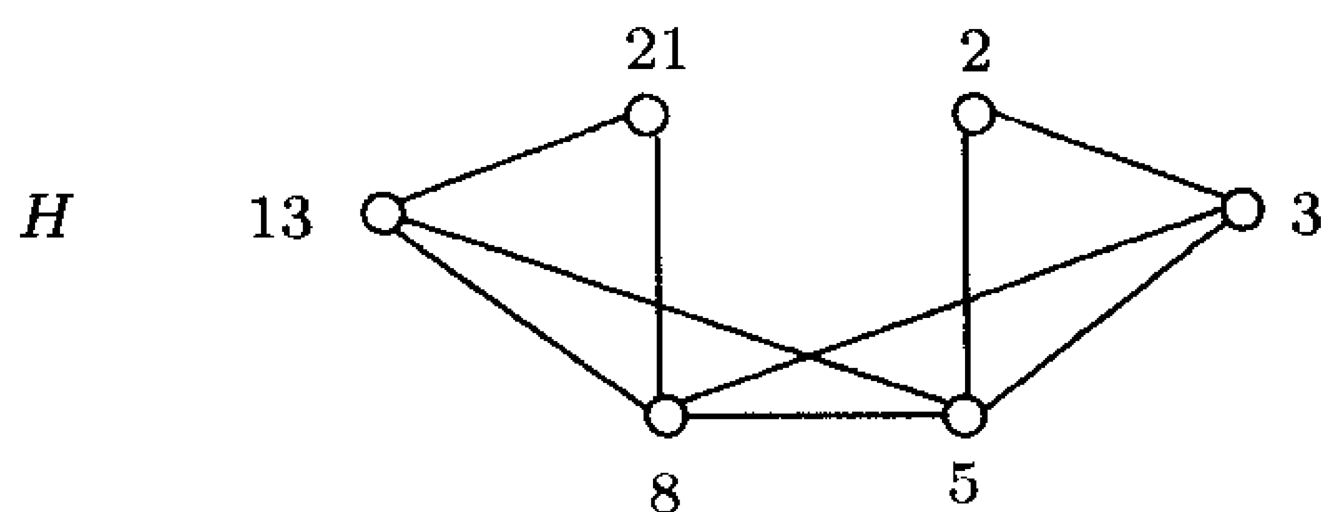



图 1.2 另一个图

在处理图的时候, 通常把 2 元集 $\{u,v\}$ 简写成 $uv$ (或者 $vu$). 如果 $uv$ 是图 $G$ 的边, 那么就称 $u$ 和 $v$ 在 $G$ 中是**邻接的** (adjacent). $G$ 中的顶点数和边数分别称为该图的**阶** (order)和**边数** (size). 由于图的顶点集是非空的, 所以一个图的阶至少是 1. 只有一个顶点的图称为**平凡图** (trivial graph), 这意味着**非平凡图** (nontrivial graph)的阶至少是 2. 图 1.1 中图 $G$ 的阶是 7, 边数是 13; 图 1.2 中图 $H$ 的阶是 6,

边数是 9. 一般用 $n$ 和 $m$ 来分别表示图的阶和边数. 因此, 对于图 1.1 中的图 $G$ 来说, $n=7$, $m=13$; 而对于图 1.2 中的图 $H$, $n=6$, $m=9$.

如图 1.3(a) 所示的图 $G$, $V(G)=\{u,v,w,x,y\}$, $E(G)=\{uv,uw,vw,vx,wx,xy\}$. 有些情况下, 我们只对图的结构感兴趣, 而不在意顶点的命名. 因此, 在画图时就可以不给顶点标号. 图 1.3(a) 中的图 $G$ 称为**标号图 (labeled graph)**, 而图 1.3(b) 中的图称为**非标号图 (unlabeled graph)**.

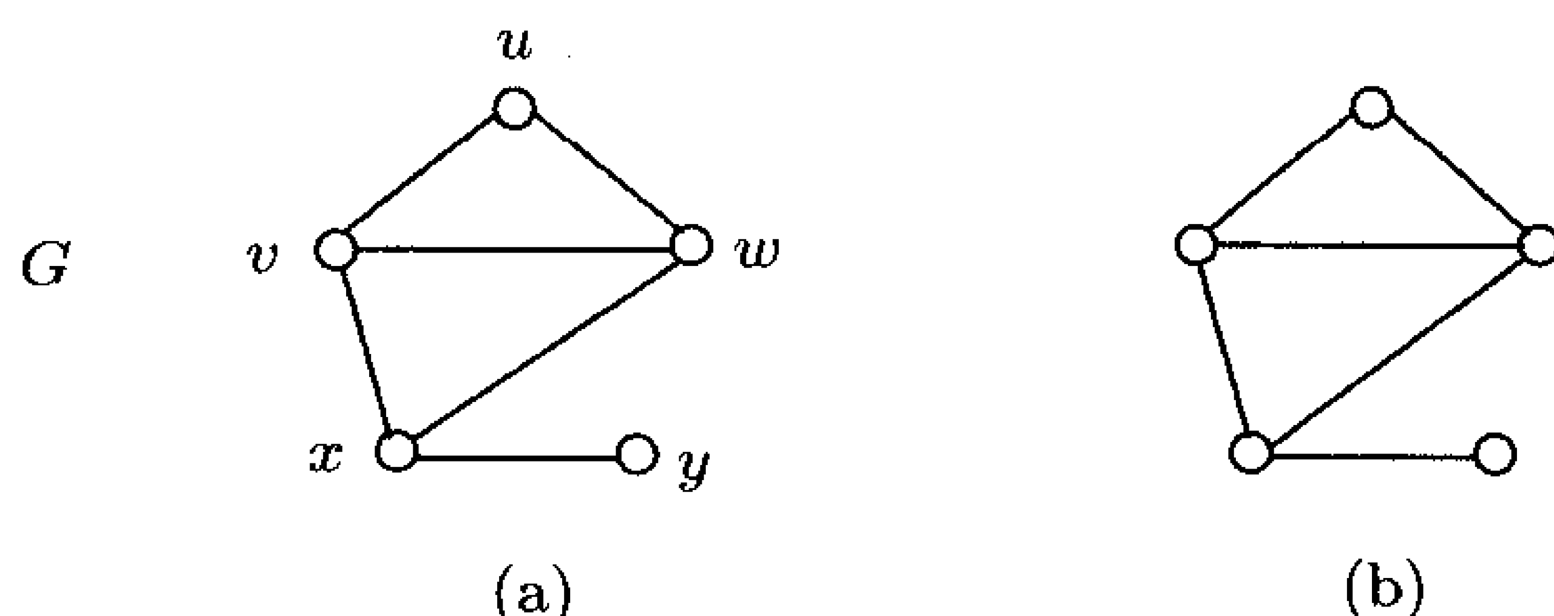



图 1.3 标号图与非标号图

现在我们讨论另一个情形.

**例 1.3** 假设我们有两枚硬币, 一金一银. 把它们放到一个 $2\times 2$ 跳棋盘的两个方格内. 这样就有 12 种构形, 如图 1.4 所示, 深色硬币代表是金币.

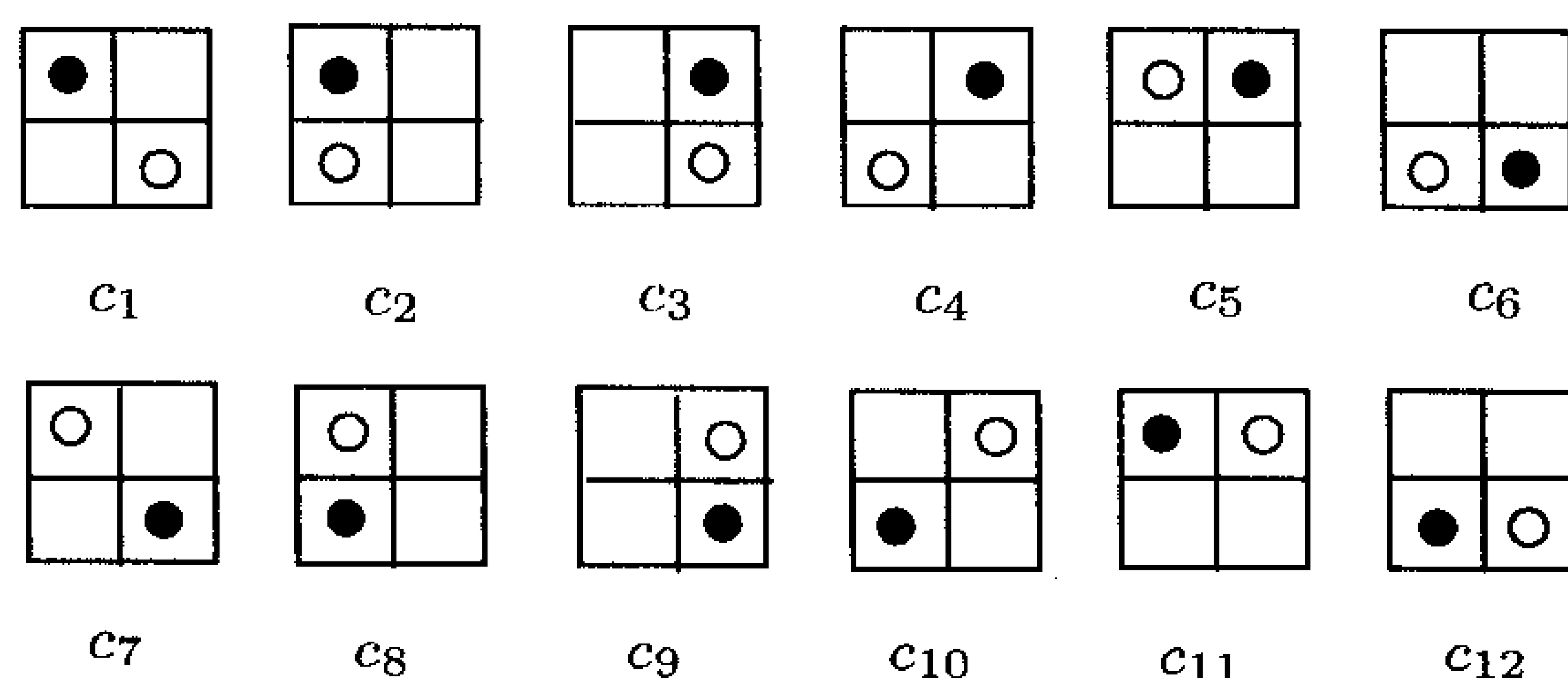



图 1.4 12 种构形

一种构形可以按照一定的规则变换为另一种构形. 特别地, 如果构形 $c_j$ 可以由构形 $c_i$ 按照下面两个步骤之一恰好获得, 那么就称 $c_i$ 可以变换为 $c_j$ $(1\leqslant i,j\leqslant 12, i\neq j)$:

(1) 把 $c_i$ 中的一枚硬币水平地或者竖直地移到一个空格子内;

(2) 交换 $c_i$ 中两枚硬币的位置.

显然, 若 $c_i$ 可以变换为 $c_j$, 则 $c_j$ 也可以变换为 $c_i$. 例如, 如图 1.5 所示, $c_2$ 可以变换为: (i) $c_1$ (向右移动 $c_2$ 的一枚银币); (ii) $c_4$ (向右移动 $c_2$ 的一枚金币); (iii) $c_8$ (交换 $c_2$ 的两枚硬币).

现在考虑图 1.4 中的 12 种构形. 构形中有些对 $c_i$, $c_j$ $(1\leqslant i,j\leqslant 12, i\neq j)$ 能够

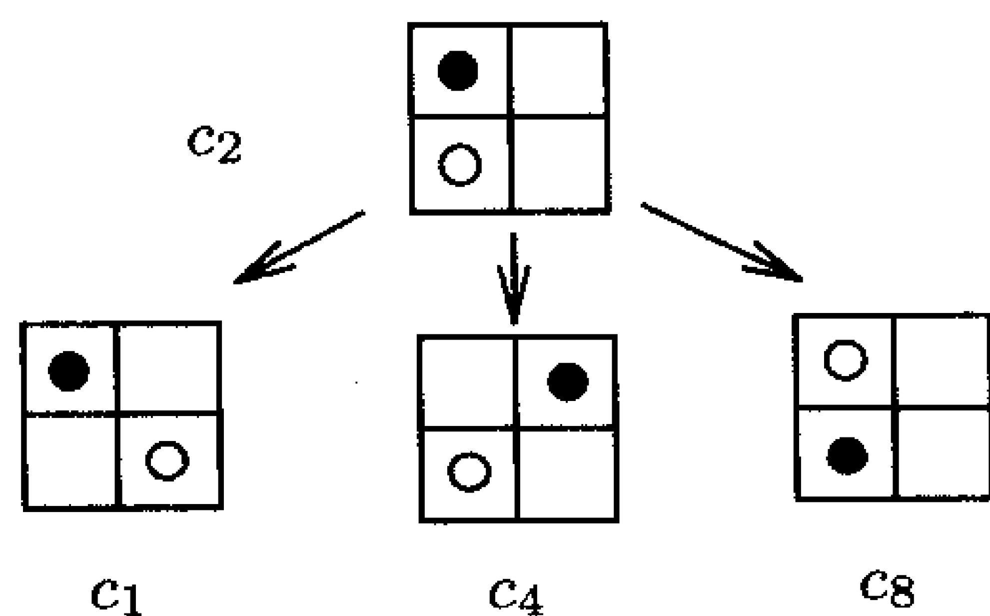



图 1.5 构形 $c_2$ 的变换

相互变换, 而有些对却不可以. 这种情形也可以用图来描述, 例如用图 $F$ 描述, 其中 $V(F)=\{c_1,c_2,\cdots,c_{12}\}$; $c_ic_j$ 是 $F$ 中的边, 如果 $c_i$ 和 $c_j$ 可以相互变换的话. (这个图 $F$ 如图 1.6 所示.) ◇

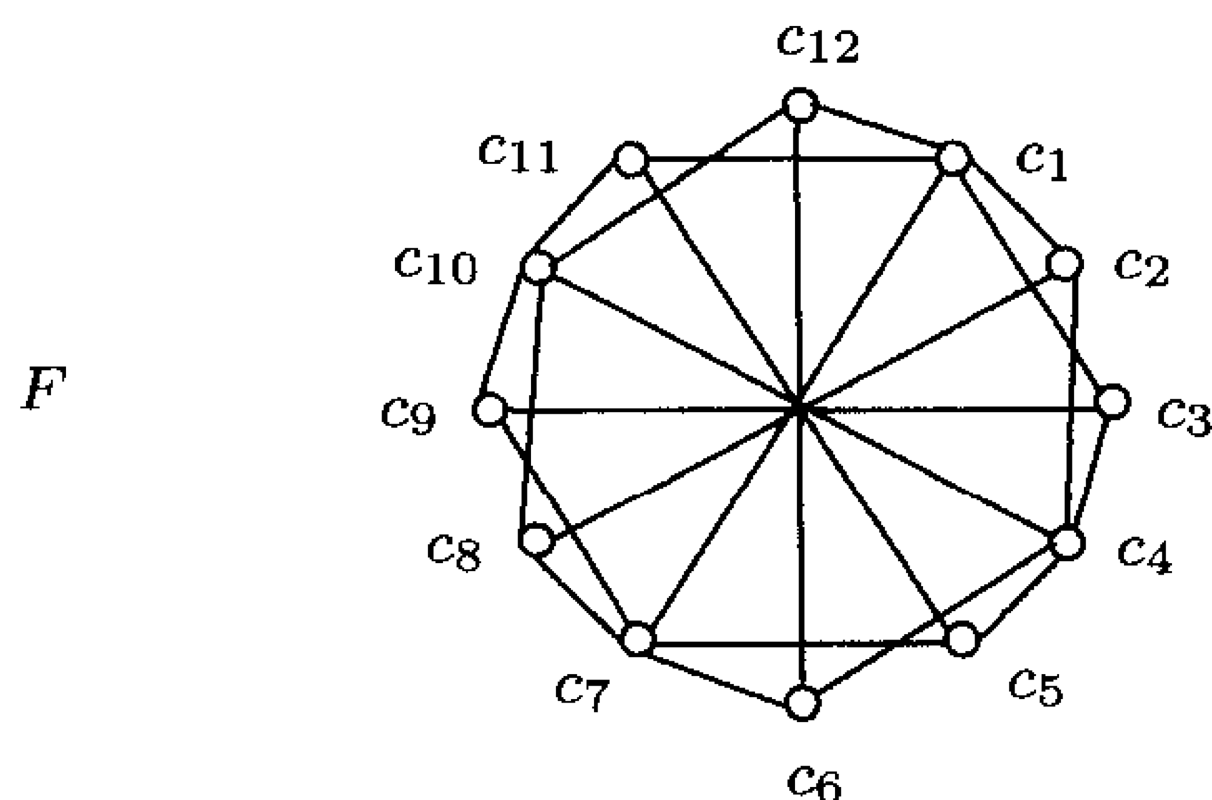



图 1.6 12 种构形的变换图模型

我们再来看一个例子.

**例 1.4** 我们收集了一些 3 字母的英文单词 (即由 3 个字母构成的英文单词):

ACT, AIM, ARC, ARM, ART, CAR, CAT, OAR, OAT, RAT, TAR.

如果单词 $W_2$ 能够由单词 $W_1$ 通过下面两个步骤之一恰好获得, 那么就称 $W_1$ 可以变换为 $W_2$:

(1) 交换 $W_1$ 中两个字母;

(2) 用另外一个字母来替代 $W_1$ 中的一个字母.

易见, 如果 $W_1$ 可以变换为 $W_2$, 那么 $W_2$ 也可以变换为 $W_1$. 这种情形可以建立图模型 $G$. $G$ 中的顶点就是所给的单词; 如果两个单词可以相互变换, 那么它们所对应的 $G$ 中顶点就是邻接的. 这样的图称为**词集的单词图 (the word graph of a set of words)**. 对于上面的 11 个单词, 它的单词图就是图 1.7 所示的图 $G$.

如果图 $G$ 是某个 3 字母单词集 $S$ 的单词图, 那么称 $G$ 为**单词图 (word graph)**. 例如, 在图 1.8(a) 中, (非标号) 图 $G$ 就是一个单词图, 注意到它是词组 $S=$ {BAT, BIT, BUT, BAD, BAR, CAT, HAT}的单词图, 如图 1.8(b) 所示. (这个想法涉及 “同构图”

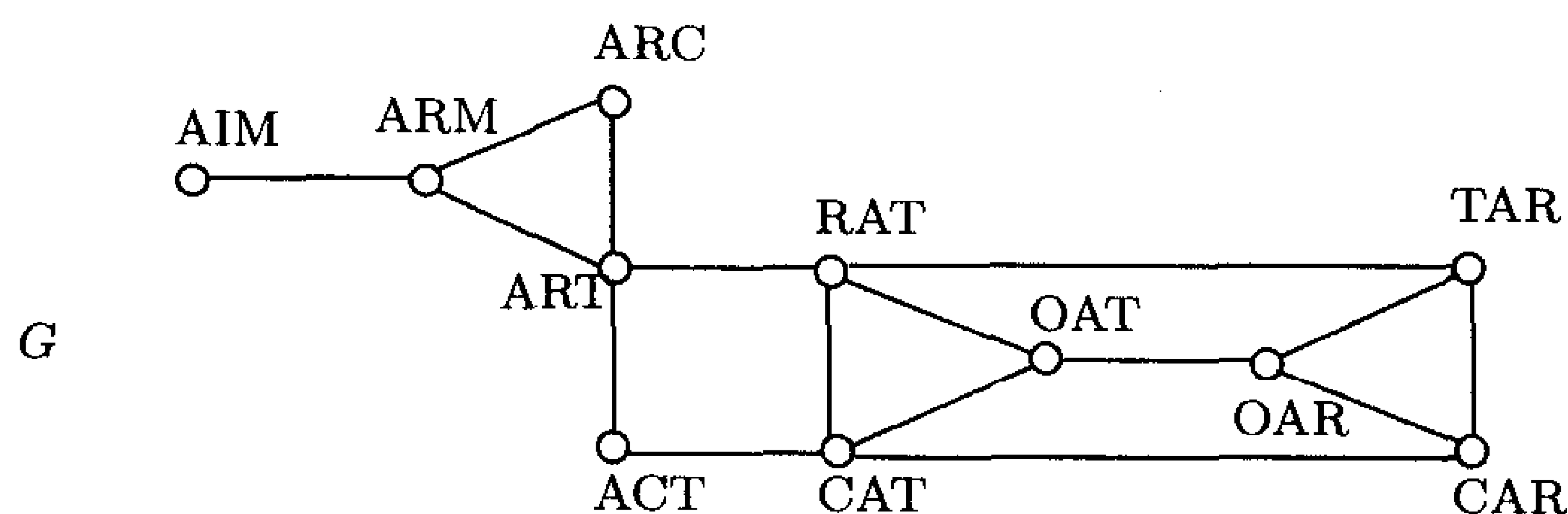



图 1.7 关于 11 个单词的单词图

的概念, 该概念将在第 3 章作详细讨论.) ◇

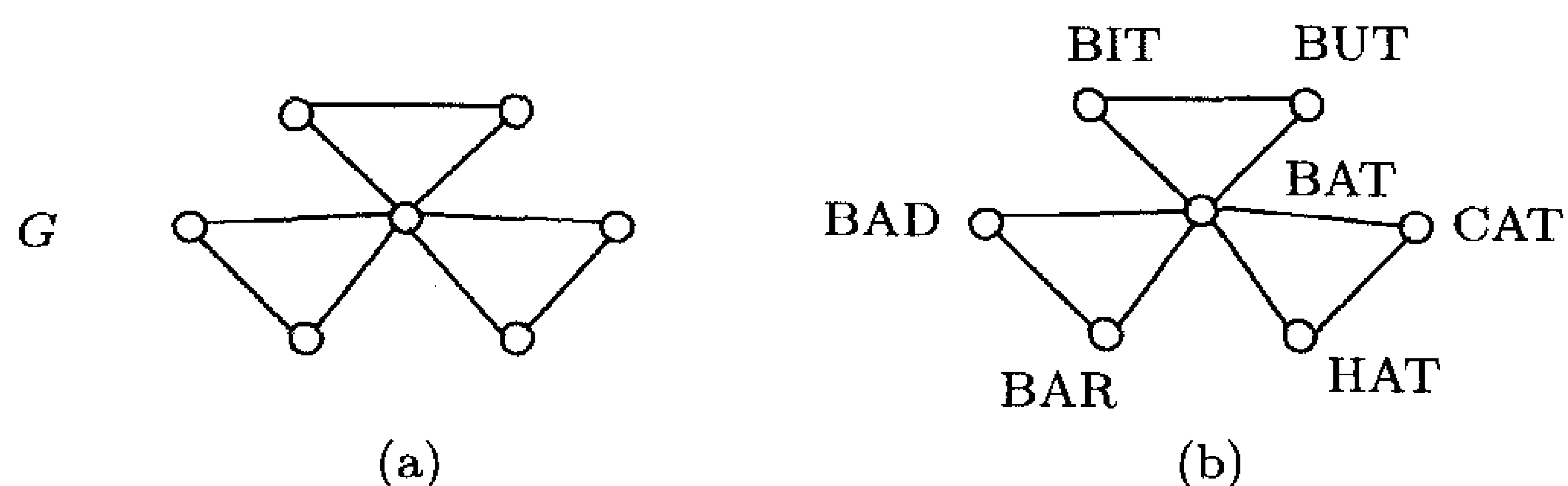



图 1.8 单词图

我们以最后一个例子来结束本节.

**例 1.5** 图 1.9 所画的是两个繁忙街道交叉口的交通车道. 当一个车辆到达这个路口时, 它会在 9 个车道的一个车道上出现, 这 9 个车道分别记为: L1, L2, $\cdots$, L9.

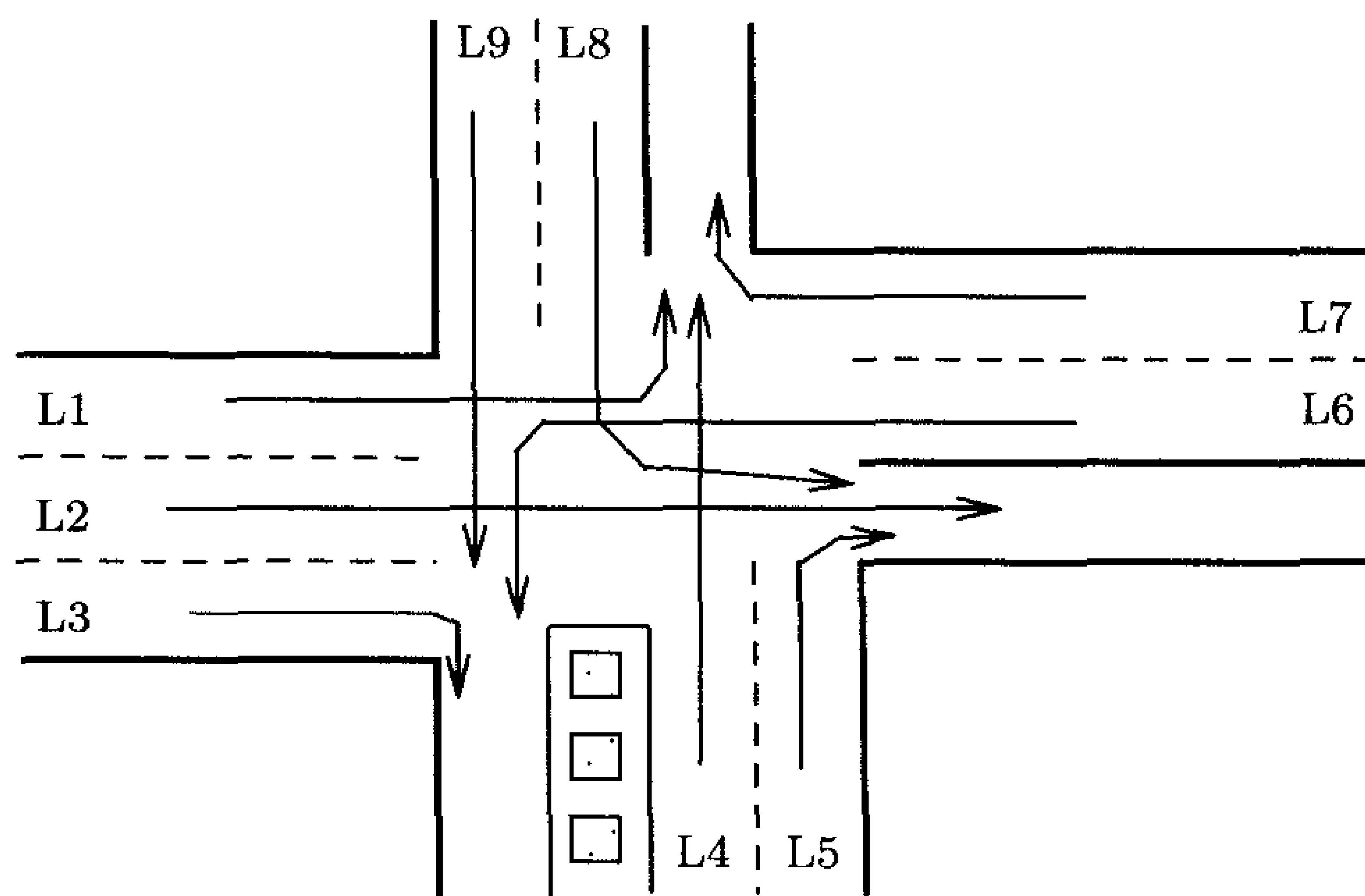



图 1.9 街道交叉路口的交通车道

在这个路口处有一个交通灯, 它告知不同车道上的司机何时可以通过这个路口, 这是为了确保某些处于不同车道上的车辆不会在同一时间进入路口, 比如 L1 和 L7.

然而 L1 和 L5 上的车辆同时穿过路口是没有问题的. 这种情形可以用图 1.10 中的图 $G$ 表示, 其中 $V(G) = \{L1, L2, \cdots, L9\}$. 当两个车道上的车辆不能同时进入路口时 (否则可能引发交通事故), 则在这两个顶点 (对应于上述车道) 之间连接一条边.

◇

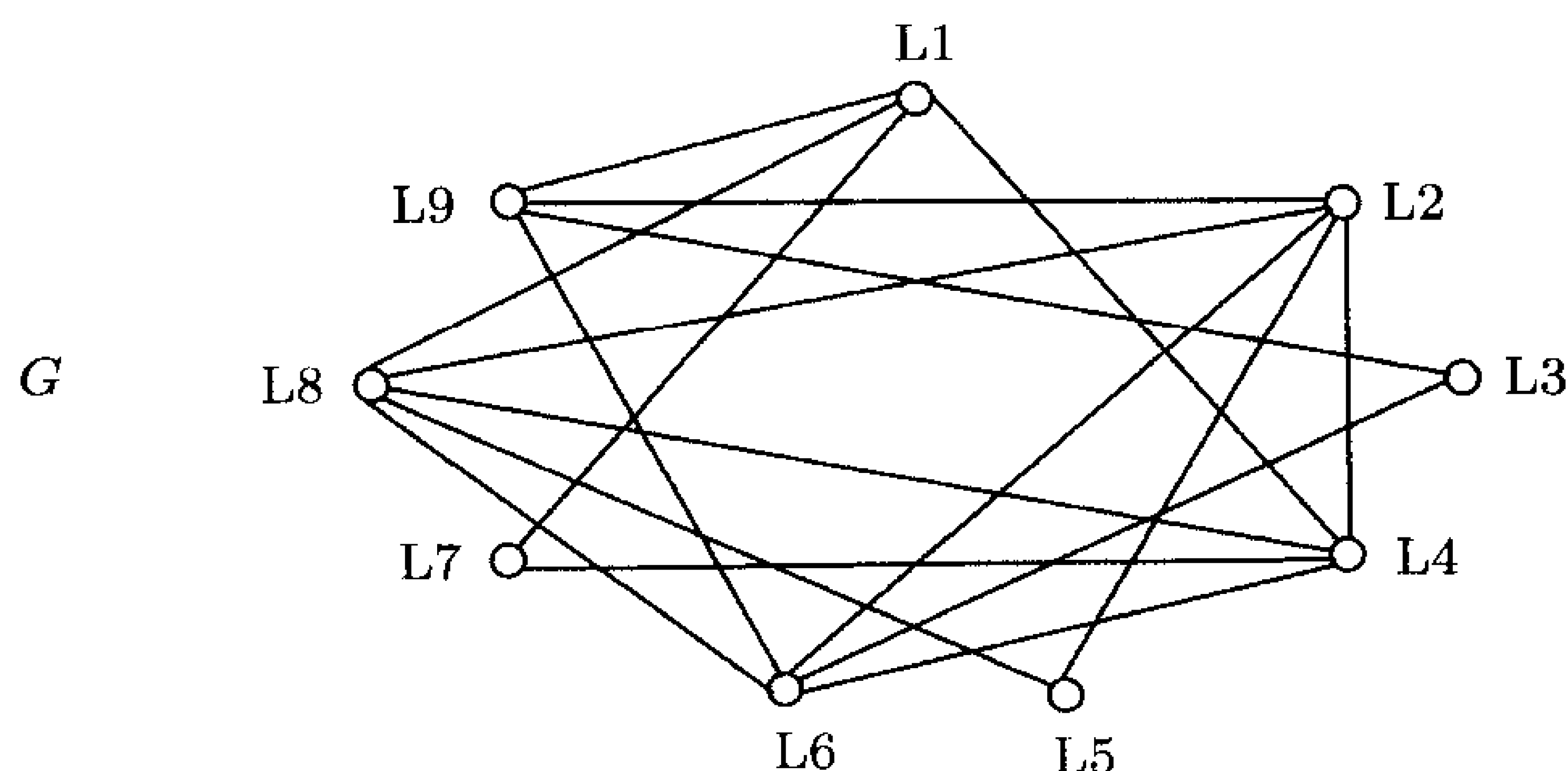



图 1.10 例 1.5 中的图 $G$

前面所看到的就是如何把 5 种不同情形用图来表示. 实际上, 每个例子都涉及一个集合: (1) 委员会集合; (2) 整数集合; (3) $2 \times 2$ 跳棋盘上两枚硬币的构形集合; (4) 3 字母单词集合; (5) 路口的交通车道集合. 在每个集合内, 若干对元素之间都以某种方式相关联: (1) 两个委员会有一个共同的成员; (2) 集合内两个整数的和或差 (取绝对值) 属于这个集合; (3) 两种构形可以通过某种规则相互变换; (4) 两个 3 字母单词通过字母的某种移动相互变换; (5) 某几对车道上的车辆不能在同一时间内进入路口. 在每个例子中, 都会定义一个图 $G$, 它的顶点就是集合中的元素. 当 $G$ 的两个顶点满足上述条件时, 它们就是邻接的. 图 $G$ 对所给的情形建立了模型. 对于涉及上述情形的相关问题, 常常通过研究其图模型来分析它们.

## 习题

1.1 在例 1.1 中, 可以提出什么逻辑问题? 回答这个问题.

1.2 仿照例 1.1, 自己用 9 名编辑和 8 个委员会构造一个例子, 并画出相应的图.

1.3 设 $S = \{2, 3, 4, 7, 11, 13\}$, 画出一个图 $G$, 其顶点集是 $S$, 而且对于 $i, j \in S$, 当 $i + j \in S$ 或者 $|i - j| \in S$, 则 $ij \in E(G)$.

1.4 设 $S = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$, 画出一个图 $G$, 其顶点集是 $S$, 而且对于 $i, j \in S$, 当 $i + j \in S$ 或者 $|i - j| \in S$, 则 $ij \in E(G)$.

1.5 自己构造一个整数集合 $S$, 画出一个图 $G$, 其顶点集是 $S$, 而且当 $i$ 和 $j$ 满足一定条件时, 则 $ij \in E(G)$.

1.6 考虑图 1.4 中的 12 种构形 $c_1, c_2, \cdots, c_{12}$. 对于每两个构形 $c_i$ 和 $c_j$ ($1 \leqslant i, j \leqslant 12$, $i \neq j$), 首先水平或竖直地移动其中一枚硬币, 然后交换两枚硬币的位置, 这样 $c_j$ 就有

可能从 $c_i$ 获得. 用一个图 $F$ 来建立此模型, 要求 $V(F) = \{c_1, c_2, \cdots, c_{12}\}$, 而且当 $c_i$ 和 $c_j$ 能够通过上面两步相互变换时, 则 $c_ic_j$ 就是 $F$ 的一条边.

1.7 参照例 1.4,

(a) 给出 10 个 3 字母单词, 要求所有单词都没有在例 1.4 中出现过, 相应的单词图至少要有 6 条边. 画出这个图.

(b) 给出由 5 个 3 字母单词构成的词集, 要求对应的单词图是图 1.11 中所示的 (且顶点经过适当标号的) 图.



图 1.11 习题 1.7(b) 中的图

(c) 给出由 5 个 3 字母单词构成的词集, 要求对应的单词图是图 1.12 中所示的 (且顶点经过适当标号的) 图.

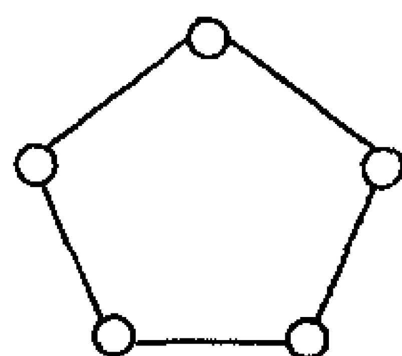


图 1.12 习题 1.7(c) 中的图

1.8 设 $S$ 为由 3 字母和 (或)4 字母单词构成的有限词集. $S$ 的单词图 $G(S)$ 的顶点集为 $S$, 而且两个顶点 (单词) $w_1$ 和 $w_2$ 邻接, 如果下面的 (1) 或 (2) 发生:

(1) 两个单词其中之一可以通过替换另一个单词中的一个字母得到;

(2) $w_1$ 是一个 3 字母单词, $w_2$ 是一个 4 字母单词. $w_2$ 可以通过在 $w_1$ 中插入一个字母 (任何地方, 包括开头和结尾) 得到.

(a) 找出关于 3 字母和 (或)4 字母的 6 个词集 $S_1, S_2, \cdots, S_6$, 使得对每个整数 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$, 图 1.13 中的图 $G_i$ 都是 $S_i$ 的单词图;

(b) 任意给出一个图 $H$, 判断 $H$ 是否为某个词集的单词图.

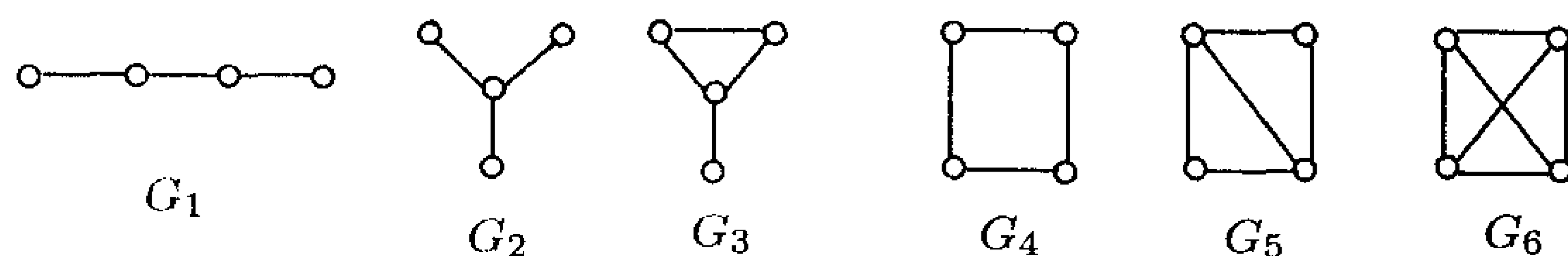



图 1.13 习题 1.8(a) 的图

1.9 给出一个单词图, 要求其定义方式不同于例 1.4 和习题 1.8 中单词图的定义, 并说明你的定义.

1.10 图 1.14 用图形绘制了一个路口处的交通车道. 当一辆车到达这个路口时, 它会在 L1, L2, $\cdots$, L7 这 7 个车道中的一个车道上出现. 对于此情形, 建立一个图模型 $G$, 当两个车道上的车辆不能同时进入路口时, 则在这两个车道对应的顶点间连一条边.

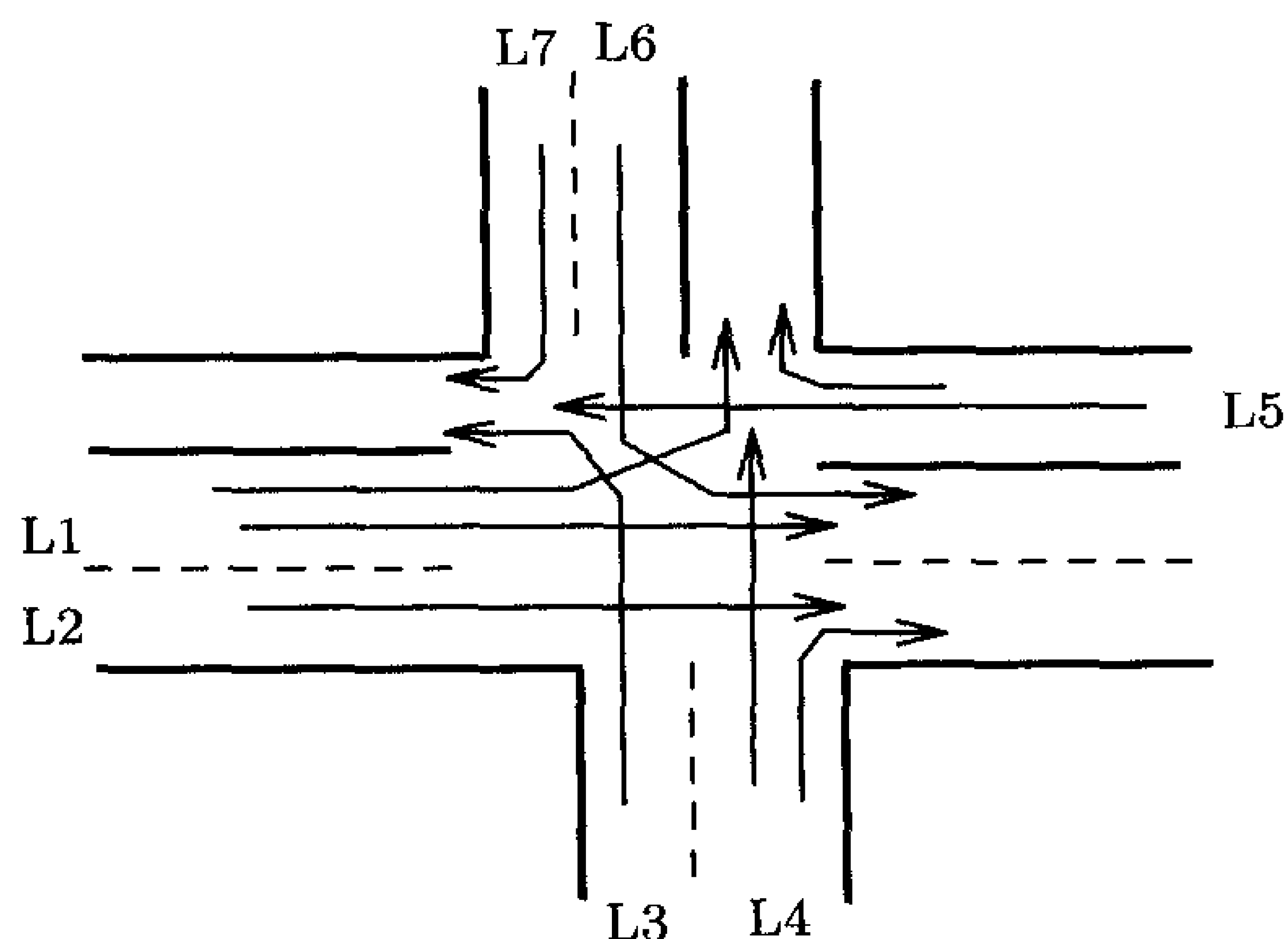



图 1.14 习题 1.10 中路口的交通车道

## 1.2 连 通 图

为了分析一些可以用图来建模的情形, 我们必须对图有一个更好的理解. 正如在数学的所有领域都有一定数量的术语一样, 为了讨论图和图的性质我们必须要熟悉图的术语. 学会这些基本术语是我们当前的主要任务. 首先来回顾一些概念并介绍一些其他概念. 一个**图 (graph)** $G$ 由两部分构成：有限的非空**顶点 (vertex)**集合 $V$ 和由 $V$ 的二元子集 (称作**边 (edge)**) 构成的集合 $E$. 若 $e = uv$ 是 $G$ 的边, 则称 $u$ 和 $v$ 是**邻接的顶点 (adjacent vertex)**, 也可以称 $u$ 和 $v$ 通过边 $e$ **连接 (joined)**, 顶点 $u$ 和 $v$ 互称为**邻点 (neighbor)**. 在此情形下, 称顶点 $u$ 和边 $e$ (同样地, $v$ 和 $e$) 是相互**关联的 (incident)**. 此外, 称有一个共同顶点的两条不同边为**邻接边 (adjacent edge)**.

如前所述, 虽然图是用集合的方式定义的, 但是用图表来表示 (实际上, 就当成是) 图是合乎习惯的, 而且也是比较方便的. 如图 1.15 所示的图 $G$, 顶点集 $V = \{u, v, w, x, y\}$, 边集 $E = \{uv, vw, vx, vy, wy, xy\}$. 由于该图有 5 个顶点和 6 条边, 所以它的阶是 5, 边数是 6. 在 $G$ 中, 顶点 $u$ 和 $v$ 是邻接的, $u$ 和 $w$ 是不邻接的; 顶点 $v$ 和边 $vw$ 是关联的, 而和边 $wy$ 不是关联的; 边 $uv$ 和 $vw$ 是邻接的, 而 $uv$ 和 $xy$ 不是邻接的.

图 $H$ 称为图 $G$ 的一个**子图 (subgraph)**, 记为 $H \subseteq G$, 如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$, 也称 $G$ **包含 (contain)** $H$ 作为一个子图. 如果 $H \subseteq G$, 且 $V(H)$ 是 $V(G)$ 的一个真子集, 或者 $E(H)$ 是 $E(G)$ 的一个真子集, 那么称 $H$ 是 $G$ 的一个**真子图 (proper subgraph)**. 例如, 图 1.15 中的图 $H$ 是图 $G$ 的一个子图, 实际上也是 $G$ 的一个真子图. 如果图 $G$ 的一个子图和 $G$ 有相同的顶点集, 那么称该子图是图 $G$ 的一个**生成子图 (spanning subgraph)**.

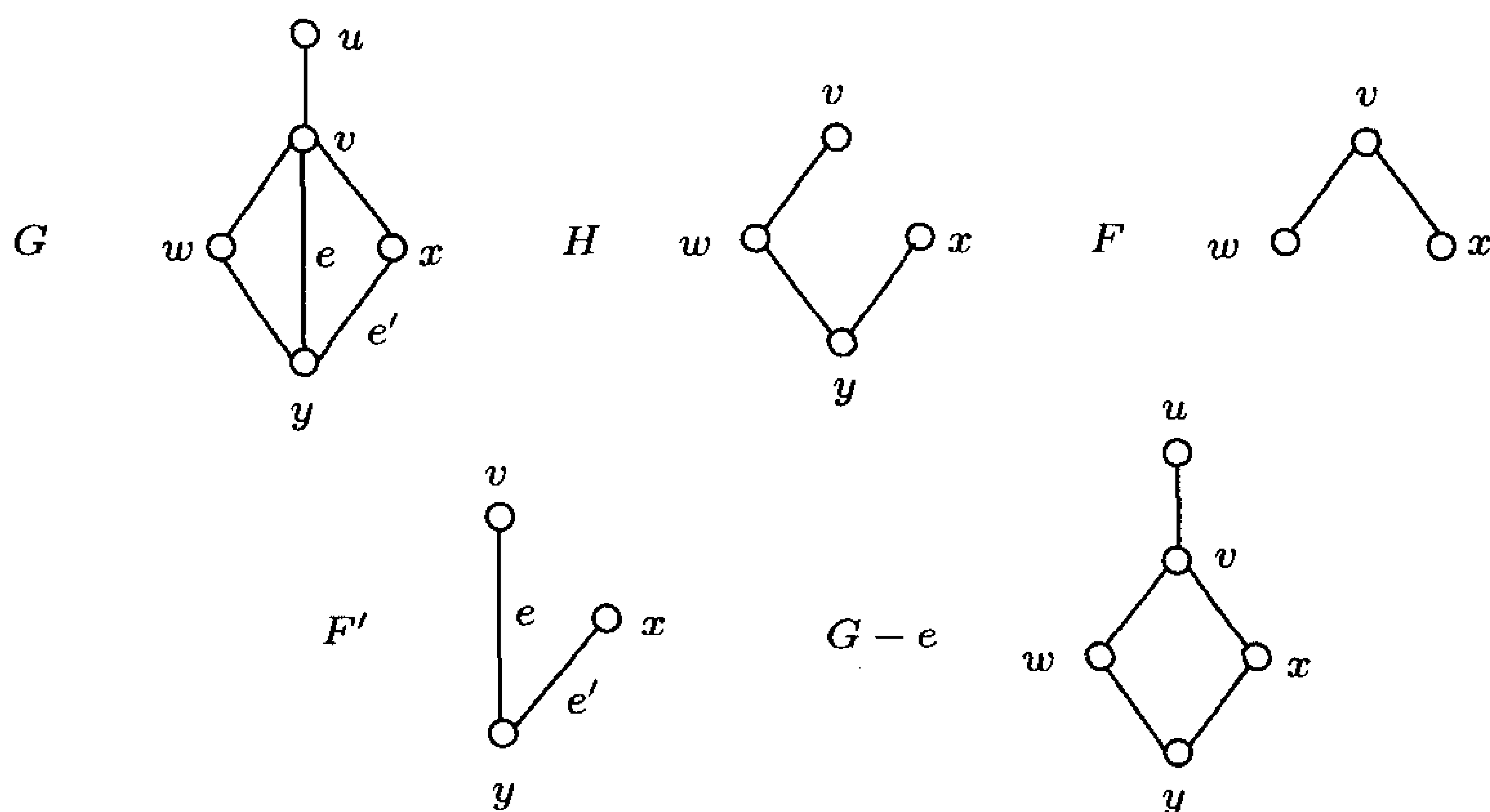



图 1.15 图 $G$ 与它的若干子图

设图 $F$ 是图 $G$ 的一个子图. 对于 $F$ 中的任意顶点 $u$ 和 $v$, 只要 $uv$ 是 $G$ 中的边, 则 $uv$ 一定是 $F$ 中的边, 此时称 $F$ 为 $G$ 的一个**诱导子图 (induced subgraph)**. 例如, 在图 1.15 中, $H$ 不是 $G$ 的诱导子图, 这是由于 $v, x \in V(H)$ 且 $vx \in E(G)$, 但 $vx \notin E(H)$. 另一方面, 图 1.15 中的 $F$ 是 $G$ 的一个诱导子图. 若 $S$ 是图 $G$ 的一个非空顶点集合, 则**由 $S$ 诱导的 $G$ 的子图 (subgraph of $G$ induced by $S$)** 就是以 $S$ 为顶点集的诱导子图. 这个诱导子图用 $\langle S\rangle$ 来表示. 为了强调这是 $G$ 的一个诱导子图, 有时把这个子图记为 $\langle S\rangle_G$. 对于图 $G$ 的一个非空的边集合 $X$, **由 $X$ 诱导的子图 $\langle X\rangle$ (subgraph $\langle X\rangle$ induced by $X$)**以 $X$ 作为边集, 以至少与 $X$ 中一条边关联的那些顶点构成顶点集. 这个子图称为是 $G$ 的一个**边诱导子图 (edge-induced subgraph)**. 有时用 $G[S]$ 和 $G[X]$ 分别代替 $\langle S\rangle$ 和 $\langle X\rangle$. 图 1.15 中的 $F'$ 就是 $G$ 的边诱导子图; 事实上, $F' = \langle X'\rangle$, 其中 $X' = \{e, e'\}$.

图 $G$ 的任何一个真子图都可以通过对 $G$ 移除一些顶点和 (或) 边得到. 对于 $G$ 的一条边 $e$, 我们用 $G - e$ 来记 $G$ 的一个生成子图, 其边集是由 $G$ 的除去 $e$ 以外的所有边构成. 更一般地, 若 $X$ 是 $G$ 的一个的边集合, 那么 $G - X$ 就是 $G$ 的一个生成子图, 满足 $E(G - X) = E(G) - X$. 对于图 1.15 中的图 $G$ 和 $e = vy$, 子图 $G - e$ 如图所示. 若 $X = \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$, 则我们也可以把 $G - X$ 写成 $G - e_1 - e_2 - \cdots - e_k$.

对于非平凡图 $G$ 的顶点 $v$, $G - v$ 为 $G$ 的一个子图, 其顶点为 $G$ 除去 $v$ 之外的所有顶点, 其边为 $G$ 除去与 $v$ 相关联的边之外的所有边. 对于 $V(G)$ 的一个真子集 $U$, 子图 $G - U$ 具有顶点集 $V(G) - U$, 其边集是由 $G$ 中连接 $V(G) - U$ 中顶点的所有边构成. $G - U$ 必然是 $G$ 的一个诱导子图; 事实上, $G - U = \langle V(G) - U\rangle$. 在图 1.15 的图 $G$ 中, 对于 $U = \{u, y\}$, $G - U$ 即为子图 $F$.

如果 $u$ 和 $v$ 是图 $G$ 的两个非邻接的顶点, 则 $e = uv \notin E(G)$. 用 $G + e$ 表示一

个顶点集为 $V(G)$ 且边集为 $E(G)\cup\{e\}$ 的图. 这样 $G$ 就是 $G+e$ 的一个生成子图.

图论中很多概念将会以不同方式与现实问题相关联 (这些概念我们将在以后的章节中细致讨论), 例如, 我们可以把图的顶点视为一些地理位置, 边视为连接地理位置之间的路线, 则该图可以认为是某个城市的模型. 在这个城市中就有多种旅行方式.

我们从图 $G$ 的某个顶点 $u$ 出发, 如果从 $u$ 走到 $u$ 的一个邻点, 然后再走到该邻点的一个邻点, 如此下去, 直到我们最后停在某顶点 $v$, 至此我们已经描述了 $G$ 中一条从 $u$ 到 $v$ 的链. 更正式地, $G$ 中一条 $u-v$ **链 (walk)** $W$ 即为 $G$ 的一个顶点序列, 满足: 从 $u$ 出发, 到 $v$ 结束, 且连续的顶点是邻接的. 换句话说, 可以把 $W$ 表述成

$$W: u=v_0, v_1, \cdots, v_k=v, \tag{1.1}$$

其中 $k\geqslant 0$, 并且对于 $i=0,1,2,\cdots,k-1$, $v_i$ 和 $v_{i+1}$ 是邻接的. 称每个顶点 $v_i(0\leqslant i\leqslant k)$ 和每条边 $v_iv_{i+1}$ $(0\leqslant i\leqslant k-1)$ 位于或属于 $W$. 注意到, 链 $W$ 的定义并不要求列出的顶点是不同的; 事实上, 也不要求 $u$ 和 $v$ 是不同的. 然而, 由于 $W$ 中的每两个连续的顶点是邻接的, 所以它们必然是不同的. 若 $u=v$, 则链 $W$ 是**闭的 (closed)**; 若 $u\neq v$, 则链 $W$ 是**开的 (open)**. 当从 $W$ 的一个顶点移动到下一个顶点时, 我们实际上遇到或者经过 $G$ 的边, 可能不止一次地经过 $G$ 的某些边. 一条链所经过的边的总数 (包括边重复出现的次数) 称为该链的**长度 (length)**. 例如, 定义在 (1.1) 中的链 $W$ 的长度是 $k$.

对于图 1.16 中的图 $G$,

$$W: x, y, w, y, v, w \tag{1.2}$$

是一条链, 实际上是长度为 5 (比链中顶点出现的次数少 1) 的 $x-w$ 的链. 长度为 0 的链称为**平凡链 (trivial walk)**, 例如, $W: v$ 就是一条平凡链. (根据这个定义, 那些因为没有运动而感到内疚的人, 现在就不必内疚了, 因为每天 "散步" 就是这么地简单.)

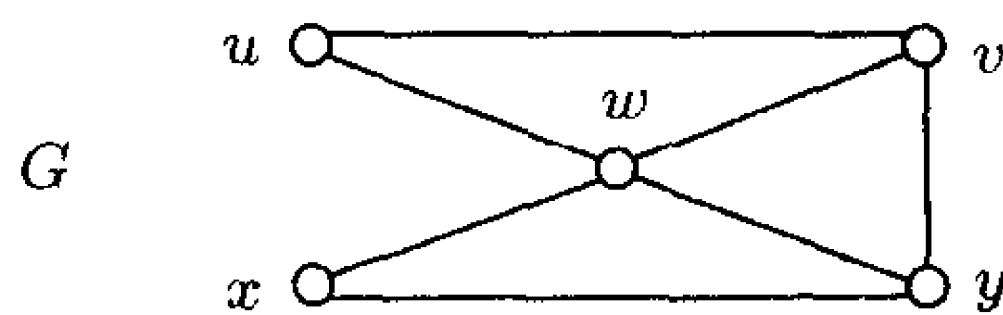



图 1.16　图中的链

倘若我们从一个顶点出发到它的邻点, 一直继续下去, 直到最后停止, 那么对于这条链上就没有任何限制条件. 然而有些时候我们想在某些类型的链上做些限制.

借用古老西方的术语, 我们在图 $G$ 中定义一个 $u-v$ **迹 (trail)**, 即边没有被多次经过的 $u-v$ 链. 这样, (1.2) 中的 $x-w$ 链 $W$ 就不是 $x-w$ 迹, 这是由于边 $wy$

重复了. 另一方面,

$$T: u, w, y, x, w, v \tag{1.3}$$

是图 1.16 中图 $G$ 里的一个 $u-v$ 迹. 注意到这个迹 $T$ 中, 顶点 $w$ 重复了, 这是完全允许的. 虽然迹的定义保证了边不会重复, 但是并没有要求顶点不重复.

图中的一条 $u-v$ 链, 若链中没有重复的顶点, 那么它是一条 $u-v$ **路 (path)**. (1.3) 中的 $u-v$ 迹 $T$ 并不是图 1.16 中图 $G$ 中的一条 $u-v$ 路, 这是因为顶点 $w$ 重复了.

$$P: u, w, y, v$$

是一条 $u-v$ 路. 如果一条链中没有重复的点 (因而产生一条路), 那么也就没有重复的边, 故每条路都是迹.

如果图中一条 $u-v$ 链连接一条 $v-w$ 链, 那么这就产生了一条 $u-w$ 链. 特别地, 一条 $u-v$ 路连接一条 $v-w$ 路就是一条 $u-w$ 链 $W$, 但未必是 $u-w$ 路, 这是因为 $W$ 中的点可能重复. 虽然不是每条链都是路, 但是, 如果一个图包含一条 $u-v$ 链, 那么它一定包含一条 $u-v$ 路. 这就是我们的第一个定理. 当一个结论的证明被给出时, 证明的方法 (或用到的方法) 都会作适当的说明. 本书中所有的证明方法都将会在附录 3 中予以总结.

**定理 1.6** *若图 $G$ 包含一条长为 $\ell$ 的 $u-v$ 链, 则 $G$ 包含一条长至多为 $\ell$ 的 $u-v$ 路.*

**证** [反证法] 在图 $G$ 中的所有的 $u-v$ 链中, 设 $P: u=u_0, u_1, \cdots, u_k=v$ 是一条长度最小 (为 $k$) 的 $u-v$ 链. 因此有 $k \leqslant \ell$. 我们断言 $P$ 就是一条 $u-v$ 路. 假设 $P$ 不是一条 $u-v$ 路, 则 $G$ 的某个顶点在 $P$ 中重复了, 即对于某个 $i$ 和某个 $j$ $(0 \leqslant i < j \leqslant k)$ 有 $u_i = u_j$. 如果从 $P$ 中删去顶点 $u_{i+1}, u_{i+2}, \cdots, u_j$, 那么就可以得到一条 $u-v$ 链

$$u=u_0, u_1, \cdots, u_{i-1}, u_i=u_j, u_{j+1}, \cdots, u_k=v.$$

这条链的长度小于 $k$, 这是不可能的. 所以, 根据断言, $P$ 是一条长为 $k \leqslant \ell$ 的 $u-v$ 路. ■

图 $G$ 中的一个**回路 (circuit)**是一个长至少为 3 的闭迹, 故一个回路开始和结束于同一个顶点, 但没有边重复. 当以相同的循环次序排列顶点时, 一个回路可以选择其中任一顶点作为开始 (和结束) 顶点. 在一个回路中, 除了第一个和最后一个顶点, 其他的顶点也是可以重复的. 例如, 图 1.16 的图 $G$ 中,

$$C: y, w, u, v, w, x, y \text{ 或} C: x, y, w, u, v, w, x \text{ 或} C: w, x, y, w, u, v, w \tag{1.4}$$

是一个回路. 除了第一个和最后一个顶点外, 没有顶点重复的回路称为**圈 (cycle)**. ***k* 圈 (*k*-cycle)**是一个长度为 $k$ 的圈. 3 圈也称为**三角形 (triangle)**. 长度为奇数的

圈称为**奇圈** (odd cycle); 当然, 长度为偶数的圈称为**偶圈** (even cycle). 在图 1.16 所示的图 $G$ 中, (1.4) 中的回路 $C$ 就不是一个圈, 而

$$C' : x, y, v, w, x$$

是一个圈, 即为 4 圈. 删去圈中的一个顶点, 就获得了一条路. 然而这对于回路却不一定正确.

图 $G$ 中一个迹、一条路、一条回路或者一个圈, 它们的顶点和边构成了 $G$ 的一个子图, 同样称为**迹**、**路**、**回路**或**圈**. 因此, 例如说, 路既可以用来描述经过某些顶点和边的方式, 也可以用来描述由这些顶点和边构成的子图. 图 1.16 的图 $G$ 再次出现在图 1.17 中, $G$ 的子图 $G_1, G_2, G_3, G_4$ 分别是迹、路、回路和圈.

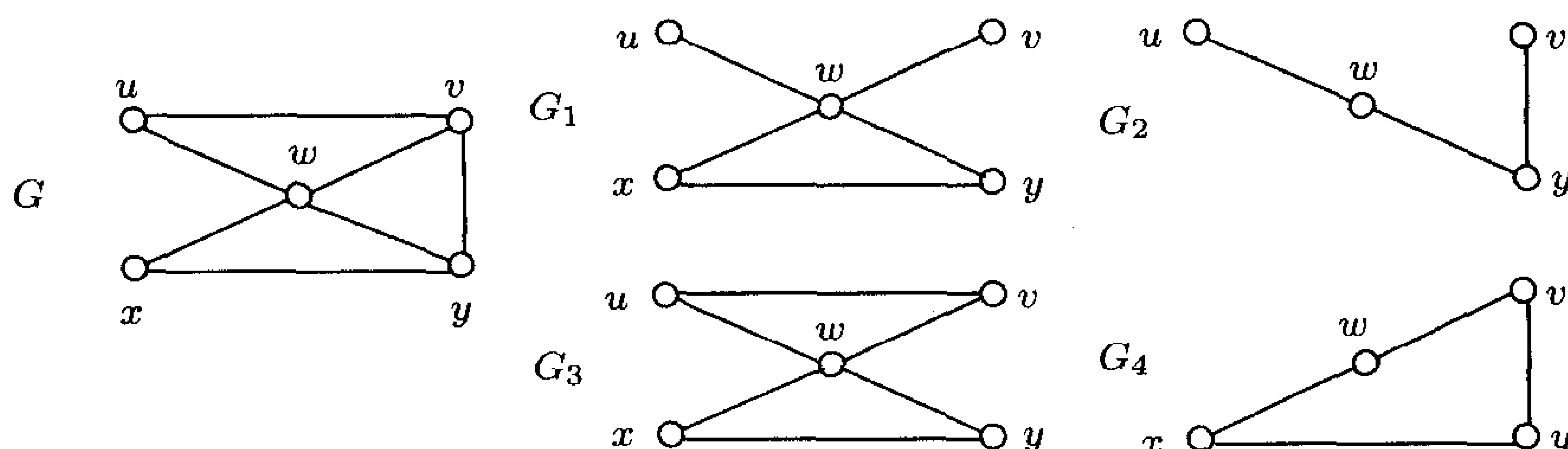



图 1.17 作为子图的迹、路、回路和圈

我们将会对一类图 $G$ 特别地感兴趣, 在这一类 $G$ 中, 每一个顶点都可以通过边到达任何其他顶点. 如果 $G$ 包含一条 $u-v$ 路, 那么就称 $u$ 和 $v$ 是**连通的** (connected), 也可以说 $u$ **连通到** (is connected to) $v$. $u$ 和 $v$ 是连通的仅仅意味着 $G$ 中有某条 $u-v$ 路, 而不是说 $u$ 和 $v$ 是通过一条边连接起来的. 当然, 若 $u$ 连通到 $v$, 则 $v$ 也连通到 $u$. 如果图 $G$ 中任意两个顶点都是连通的, 换言之, 如果对于 $G$ 中每对不同顶点 $u, v$, $G$ 都包含一条 $u-v$ 路, 那么 $G$ 称为是**连通的** (connected). 根据定理 1.6, $G$ 是连通的当且仅当对于 $G$ 的每对顶点 $u, v$, $G$ 都包含一条 $u-v$ 链. 因为每个顶点都连通到其自身, 所以平凡图是连通的.

一个不是连通的图 $G$ 称为**不连通的** (disconnected). 若 $G$ 的一个连通子图不是 $G$ 的其他任何连通子图的真子图, 则称它为 $G$ 的一个**连通分支** (component). 图 $G$ 是连通的当且仅当 $G$ 恰好有一个连通分支. 图 1.16 中的图 $G$ 是连通的, 而图 1.18 中的图 $H$ 是不连通的, 例如 $H$ 中没有 $s-w$ 路, 也没有 $x-z$ 路. 图 $H$ 有 3 个连通分支, 即 $H_1$, $H_2$, $H_3$.

对于图 $G$ 的顶点集互不相交的子图 $G_1, G_2, \cdots, G_k$, $k \geqslant 2$, 若 $G$ 的每个顶点和每条边都恰属于这些子图中的一个子图, 则记 $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$. 特别地, 若

$G_1, G_2, \cdots, G_k$ 是 $G$ 的连通分支, 则 $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$. 所以对图 1.18 中的那些图, 就可以写成 $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

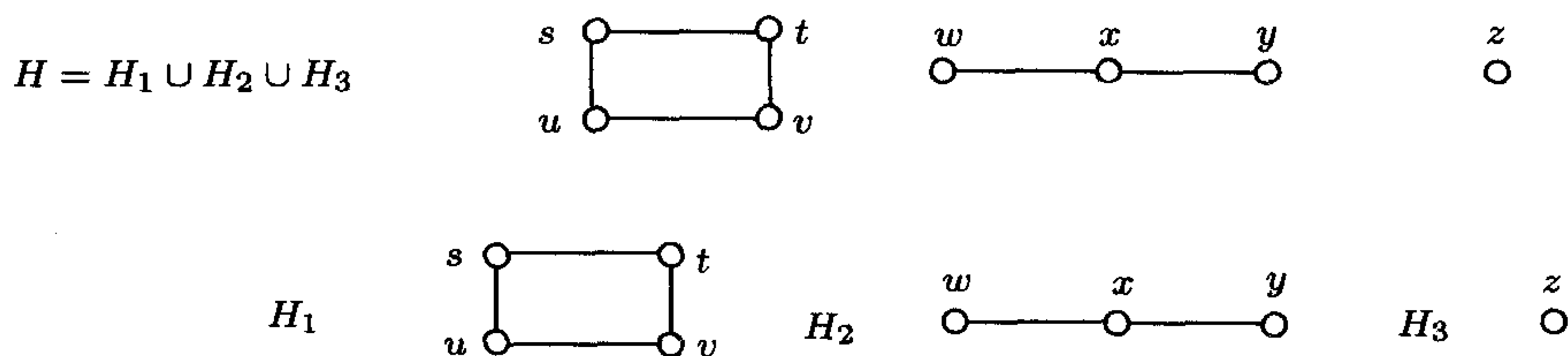



图 1.18 不连通图及其连通分支

连通分支可以看成是一种等价关系. (等价关系在附录 2.1 中给予解释.)

**定理 1.7** 设 $R$ 是定义在图 $G$ 顶点集上的关系: 对于 $u, v \in V(G)$, 如果 $u$ 连通到 $v$, 或者说如果 $G$ 包含一条 $u-v$ 路, 则 $u, v$ 有关系 $R$, 记为 $u\ R\ v$. 则 $R$ 是一种等价关系.

**证** [直接证法] 显然, $R$ 是自反的和对称的. 剩下仅仅需要证明 $R$ 是传递的. 设 $u, v, w \in V(G)$, 满足 $u\ R\ v$ 和 $v\ R\ w$. 从而 $G$ 包含一条 $u-v$ 路 $P'$ 与一条 $v-w$ 路 $P''$. 如前所述, $P'$ 连接 $P''$ 就产生一条 $u-w$ 链 $W$. 由定理 1.6, $G$ 包含一条 $u-w$ 路, 所以 $u\ R\ w$. ■

应用定理 1.7 中所描述的等价关系可以把 $G$ 的顶点集划分成一些等价类. 由一个等价类中的顶点所诱导的子图是 $G$ 的一个连通分支; 练习 1.14 要求你来证明这一点. 由此我们有以下结果:

图 $G$ 的每个顶点和每条边都恰属于 $G$ 的一个连通分支. 这就意味着, 如果 $G$ 是一个不连通图, 并且 $u$ 和 $v$ 属于 $G$ 的不同连通分支, 那么 $uv \notin E(G)$.

接下来的定理给出了阶至少为 3 的图是连通图的一个充分条件.

**定理 1.8** 设 $G$ 是一个阶至少为 3 的图. 若 $G$ 包含两个不同的顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $G-u$ 与 $G-v$ 是连通的, 则 $G$ 是连通的.

**证** [直接证法] 设 $G$ 包含两个不同的顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $G-u$ 与 $G-v$ 是连通的. 为了证明 $G$ 本身是连通的, 我们证明 $G$ 的任意两个顶点都是连通的. 设 $x, y$ 是 $G$ 的两个顶点. 我们考虑两种情形:

**情形 1.** $\{x, y\} \neq \{u, v\}$, 不妨设 $u \notin \{x, y\}$. 则 $x$ 和 $y$ 就是 $G-u$ 中的顶点. 由于 $G-u$ 是连通的, 所以 $G-u$ 中就有一条 $x-y$ 路 $P$. 显然, $P$ 在 $G$ 中, 故 $x$ 和 $y$ 在 $G$ 中是连通的.

**情形 2.** $\{x, y\} = \{u, v\}$, 不妨设 $x = u$, $y = v$. 我们证明 $u$ 和 $v$ 在 $G$ 中是连通的. 由于 $G$ 的阶至少是 3, 故存在一顶点 $w$ 满足 $w \neq u, v$. 由于 $G-v$ 是连通的,

$G-v$ 包含一条 $u-w$ 路 $P'$. 此外, 由 $G-u$ 连通可推出, $G-v$ 包含一条 $w-v$ 路 $P''$. 所以, $P'$ 连接 $P''$ 就产生一条 $u-v$ 链. 根据定理 1.6, $G$ 包含一条 $u-v$ 路, 从而 $u$ 和 $v$ 在 $G$ 中是连通的. ■

若 $G$ 为仅含顶点 $u$ 和 $v$ 且不含任何边的不连通图, 则子图 $G-u$ 和 $G-v$ 是 (平凡) 连通的. 因此, 在定理 1.8 中, 条件 "所考虑的图的阶至少为 3" 是必需的.

若 $u$ 和 $v$ 是连通图 $G$ 的顶点, 则 $G$ 中必存在一条 $u-v$ 路. 然而, $G$ 很有可能包含多条 $u-v$ 路. 例如, 对于图 1.16 的图 $G$, 下面的均为 $u-y$ 路:

$$P':\ u,v,y \qquad P'':\ u,w,v,y \qquad P''':\ u,v,w,x,y.$$

$P'$, $P''$, $P'''$ 的长度分别是 2, 3, 4. 由于 $u$ 和 $y$ 是不邻接的, 所以 $G$ 中没有长度为 1 的 $u-y$ 路; 由于 $G$ 只有 5 个顶点, 因而也没有长度为 5 的 $u-y$ 路.

设 $G$ 为 $n$ 阶连通图, $u$ 和 $v$ 为 $G$ 的两个顶点. $u$ 和 $v$ 之间的**距离 (distance)**定义为 $G$ 中 $u-v$ 路的最小长度, 记为 $d_G(u,v)$, 或者在不引起混淆的情形下简记为 $d(u,v)$. 因此, 如果 $d(u,v)=k$, 那么 $G$ 中就存在一条长为 $k$ 的 $u-v$ 路

$$P: u=v_0, v_1, \cdots, v_k=v, \tag{1.5}$$

但 $G$ 中不存在长度更小的 $u-v$ 路. 长为 $d(u,v)$ 的 $u-v$ 路称为 $u-v$ **测地线 (geodesic)**. 事实上, 因为 (1.5) 中的路 $P$ 是一条 $u-v$ 测地线, 所以不仅 $d(u,v)=d(u,v_k)=k$, 而且对于每个 $i$ $(0\leqslant i\leqslant k)$ 都有 $d(u,v_i)=i$. 习题 1.16 要求你来验证这一点. 若 $u=v$, 则 $d(u,v)=0$; 若 $uv\in E(G)$, 则 $d(u,v)=1$. 一般地, 对 $n$ 阶连通图中顶点 $u$ 和 $v$ (不同或者相同), 都有 $0\leqslant d(u,v)\leqslant n-1$. 例如, 对于图 1.16 中图 $G$ 的顶点 $u$, $y$, $d(u,y)=2$. 如果 $G$ 是不连通的, 那么 $G$ 有某对不同的顶点 $x,y$, 使得在 $G$ 中不存在 $x-y$ 路; 在此情形下, $d(x,y)$ 是没有定义的.

某些场合, 根据其他顶点到一个给定顶点的距离, 把一个连通图的顶点形象化是比较有用的. 图 1.19(a) 的图 $H$ 在图 1.19(b) 中得到重新绘制, 主要是为了列出那些到顶点 $t$ 有固定距离的顶点. 顶点 $t$ (到 $t$ 的距离为 0 的唯一顶点) 画在了顶部. 下一层的顶点是 $t$ 的邻点, 再下一层就是到 $t$ 的距离为 2 的顶点, 等等. 注意到, 两个邻接的顶点必然或者属于同一层, 或者属于相邻层.

连通图 $G$ 的所有顶点之间的最大距离称为 $G$ 的**直径 (diameter)**, 记为 $\mathrm{diam}(G)$. 图 1.19 中图 $H$ 的直径是 3. 路 $P': y,u,r,s$ 是一条长为 $\mathrm{diam}(H)$ 的测地线.

如果 $G$ 是一个连通图, 满足 $d(u,v)=\mathrm{diam}(G)$, $w\neq u,v$, 则 $G$ 中不存在含 $v$ 的 $u-w$ 测地线; 否则 $d(u,w)>d(u,v)=\mathrm{diam}(G)$, 这是不可能的.

让我们再回到定理 1.8, 该定理证明了: 如果一个阶至少为 3 的图包含两个不同的顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $G-u$ 和 $G-v$ 是连通的, 那么 $G$ 是连通的. 实际上, 这个定

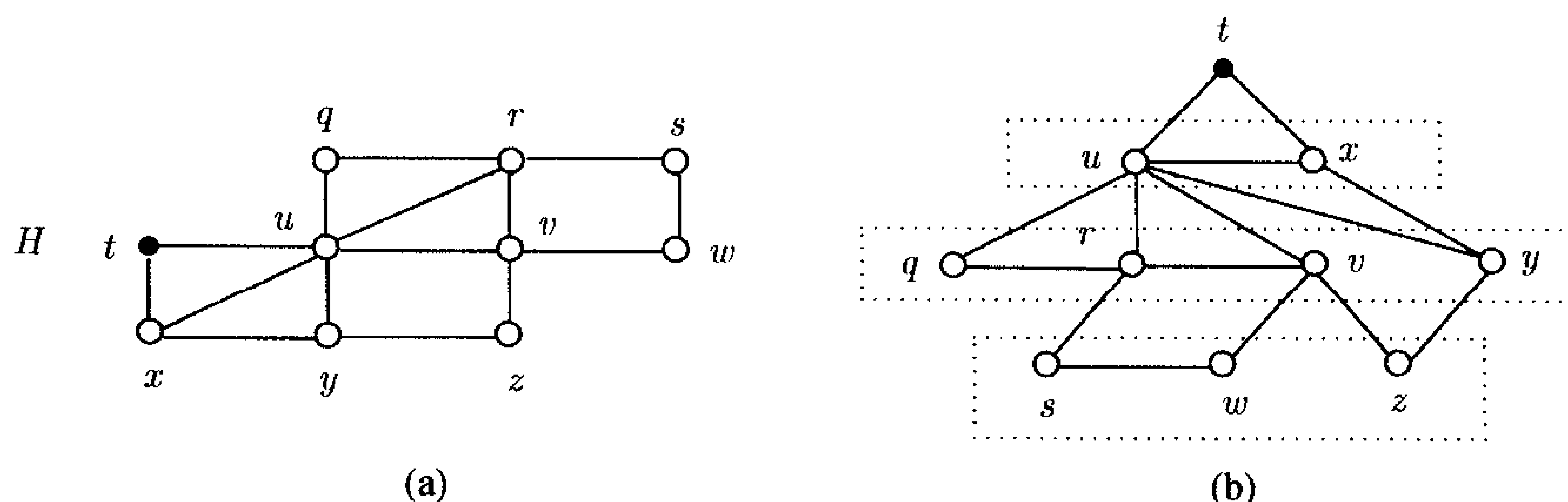



图 1.19 到一个给定顶点的距离

理的逆也是正确的, 即如果 $G$ 是一个阶至少为 3 的连通图, 那么 $G$ 一定包含两个顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $G-u$ 与 $G-v$ 都是连通的. 我们现在就来证明这个逆定理.

**定理 1.9** 若 $G$ 是一个阶至少为 3 的连通图, 则 $G$ 包含两个不同的顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $G-u$ 和 $G-v$ 是连通的.

**证** [反证法] 设 $u$ 和 $v$ 是 $G$ 的两个顶点, 满足 $d(u,v)=\mathrm{diam}(G)$. 我们断言: $G-u$ 和 $G-v$ 都是连通的. 假设断言不成立, 则 $G-u$ 和 $G-v$ 中至少有一个不连通, 不妨设 $G-v$ 不连通. 因此, $G-v$ 包含了两个顶点 $x$ 和 $y$, 它们在 $G-v$ 内不连通. 然而, 由于 $G$ 是连通的, 所以顶点 $u$ 和 $x$ 在 $G$ 中是连通的, $u$ 和 $y$ 在 $G$ 中也是连通的.

设 $P', P''$ 分别是 $G$ 中的 $x-u$ 测地线和 $u-y$ 测地线. 因为 $d_G(u,v)=\mathrm{diam}(G)$, 所以顶点 $v$ 既不能在 $P'$ 上, 也不能在 $P''$ 上, 从而 $P'$ 和 $P''$ 都是 $G-v$ 中的路. 路 $P'$ 连接 $P''$ 就产生一条 $G-v$ 内的 $x-y$ 链. 由定理 1.6, $G-v$ 包含一条 $x-y$ 路, 因此 $x$ 和 $y$ 在 $G-v$ 中是连通的, 从而导致矛盾. ■

定理 1.9 给出了一个性质, 该性质是每一个阶至少为 3 的连通图都具有的性质. 换句话说, 定理 1.9 给出了一个图是连通图的必要条件. 事实上, 当 $G$ 的阶甚至是 2 时, 定理 1.9 也正确, 但是我们以上述形式给出了定理 1.9, 目的是为了把定理 1.8 和 1.9 合并成一个定理, 即一个图是连通图的充分必要条件; 如下所述.

**定理 1.10** 设 $G$ 是一个阶至少为 3 的图. 则 $G$ 是连通的当且仅当 $G$ 包含两个不同的顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $G-u$ 和 $G-v$ 都是连通的.

## 习题

1.11 如图 1.20 所示的图 $G$, 设 $U=\{u,w\}$, $X=\{e,f\}$, 其中 $e=ru$, $f=vw$. 画出 $G$ 的子图 $G-U$ 和 $G-X$.

1.12 根据图 1.20 中的图 $G$, 对于下面每一条, 给出例子或者说明这样的例子为什么不存在.

(a) 一条长为 6 的 $x-y$ 链.

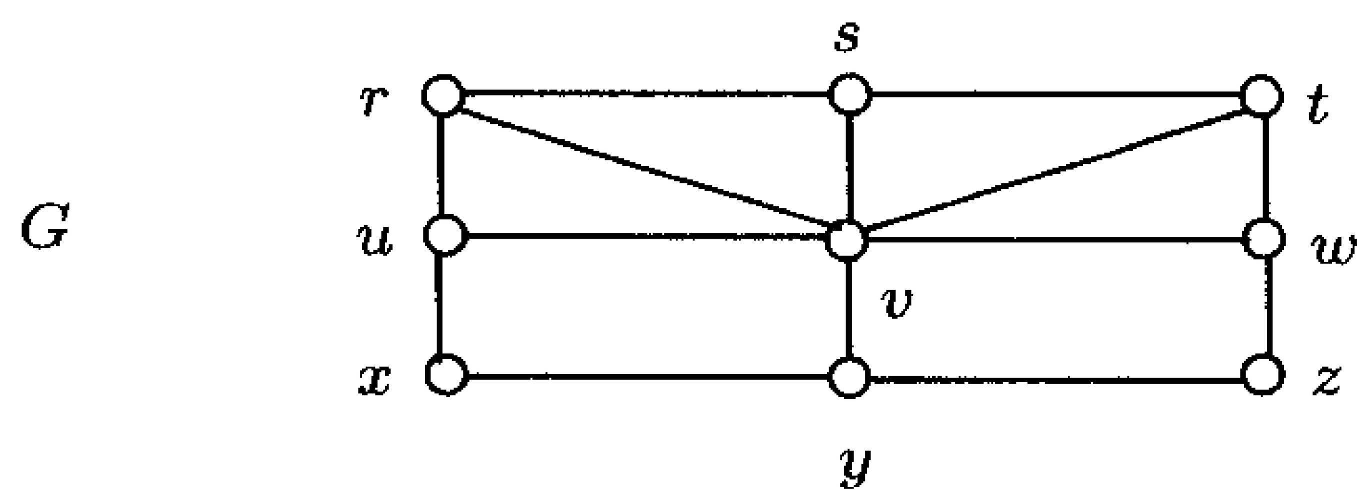



图 1.20 习题 1.11 和习题 1.12 的图 $G$

(b) 一条不是 $v-w$ 路的 $v-w$ 迹.

(c) 一条长为 2 的 $r-z$ 路.

(d) 一条长为 3 的 $x-z$ 路.

(e) 一条长为 $d(x,t)$ 的 $x-t$ 路.

(f) 一个长为 10 的回路.

(g) ·个长为 8 的圈.

(h) 一条长为 $\mathrm{diam}(G)$ 的测地线.

1.13 画一个图 $F=F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_4$, 其中 $F_i$ $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 为 $i$ 阶连通图.

(a) 所画图 $F$ 的阶和边数是多少?

(b) 图 $F$ 的最小可能边数和最大可能边数分别是多少?

1.14 对于一个图 $G$, $G$ 的连通分支被定义为: $G$ 的一个连通子图, 该子图不是 $G$ 的任何其他连通子图的真子图. 也可被描述为: $G$ 的由某个等价类中的顶点所诱导的一个子图, 其等价关系如定理 1.7 中所定义. 证明连通分支的这两个解释是等价的.

1.15 画出阶为 5 且不同顶点的距离为奇数的所有连通图. 解释你是如何知道已经画完了所有这样的图的.

1.16 设 $P: u=v_0,v_1,\cdots,v_k=v$ $(k\geqslant 1)$ 是连通图 $G$ 中的一条 $u-v$ 测地线. 证明对于每个整数 $i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$, 都有 $d(u,v_i)=i$.

1.17 (a) 证明: 若 $P$ 和 $Q$ 是一个连通图中两条最长的路, 则 $P$ 和 $Q$ 至少有一个公共点.

(b) 证明或者反驳: 设 $G$ 是直径为 $k$ 的连通图. 若 $P$ 和 $Q$ 是 $G$ 中长度为 $k$ 的两条测地线, 则 $P$ 和 $Q$ 至少有一个公共点.

1.18 一个 12 阶图 $G$ 具有与图 1.4 中的 12 种构形相对应的顶点集 $V(G)=\{c_1,c_2,\cdots,c_{12}\}$. 这个棋盘上的"移动"是指把一枚硬币移到一个未被占用的方格内, 并要求:

(1) 金币只能在水平方向或对角方向上移动;

(2) 银币只能在竖直方向或对角方向上移动.

如果可以通过一步移动把顶点 $c_i$ 移到顶点 $c_j$, 则 $c_i$ 和 $c_j$ $(i\neq j)$ 是邻接的. 问:

(a) $G$ 中哪些顶点和 $c_1$ 邻接?

(b) $G$ 中哪些顶点和 $c_2$ 邻接?

(c) 画出 $G$ 的由 $\{c_2,c_6,c_9,c_{11}\}$ 诱导的子图.

(d) 列举 $G$ 中一条 $c_1-c_7$ 路.

1.19 定理 1.10 说明了：一个阶至少为 3 的图 $G$ 是连通的当且仅当 $G$ 包含两个不同的顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $G-u$ 和 $G-v$ 都是连通的. 基于这一点, 你可能会猜测下面的命题是正确的. 每一个阶至少为 4 的连通图都包含 3 个不同的顶点 $u, v, w$, 使得 $G-u$, $G-v$, $G-w$ 是连通的. 这是正确的吗?

1.20 (a) 设 $u$ 和 $v$ 是连通图 $G$ 中的两个不同的顶点. $G$ 中可能存在包含 $u$ 和 $v$ 的若干连通子图. 那么在 $G$ 的所有上述连通子图中, 最小的边数是多少? 解释你的答案.

(b) (a) 中的问题是否会让你联想到另一个问题?

## 1.3 若干常见的图类

随着对图论的进一步学习, 我们会发现有些图是经常遇到的, 并且熟悉它们是非常有用的. 在许多场合, 这些图都有着特定的名称.

我们已经知道路和圈是图中的特殊链. 它们也用来描述某些特定种类的图. 一个阶为 $n$ 的图 $G$, 若其顶点可以标号成 (或重新标号成) $v_1, v_2, \cdots, v_n$, 使得它的边是 $v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{n-1}v_n$, 则称 $G$ 为一条**路**; 一个阶为 $n \geqslant 3$ 的图 $G$, 若其顶点可以标号成 (或重新标号成) $v_1, v_2, \cdots, v_n$, 使得它的边为 $v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{n-1}v_n, v_1v_n$, 则称 $G$ 为一个**圈**. 如果一个图是一条阶为 $n$ 的路, 则记之为 $P_n$; 如果一个图是一个阶为 $n$ 的圈, 则记之为 $C_n$. 图 1.21 列出了一些路和圈.

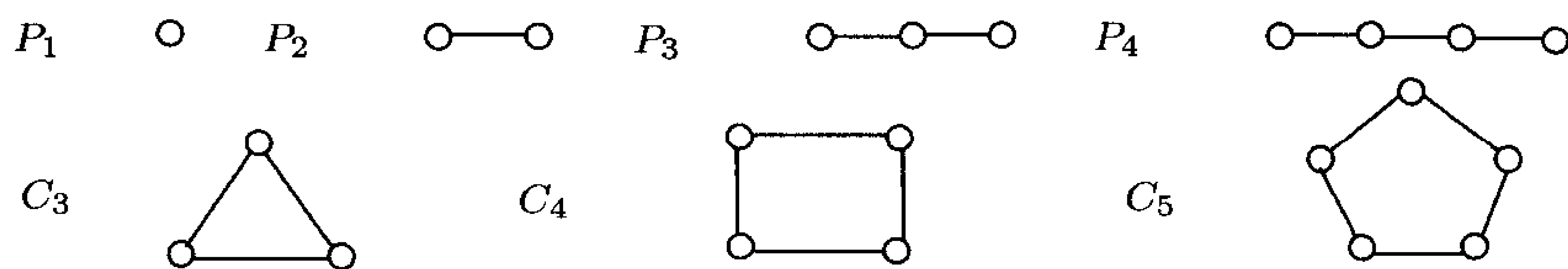



图 1.21 路和圈

如果图 $G$ 的任何两个不同顶点都是邻接的, 则称 $G$ 是**完全的 (complete)**. $n$ 阶完全图记为 $K_n$. 因此, 对于 $n$ 个顶点的图来说, $K_n$ 有极大可能的边数. 由于 $K_n$ 的每两个不同的顶点都会被一条边连接, 并且 $K_n$ 中顶点对的个数是 $\binom{n}{2}$, 所以

$$K_n \text{ 的边数是 } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{1.6}$$

因此, 完全图 $K_3$ 有 3 条边, $K_4$ 有 6 条边, $K_5$ 有 10 条边. 前 5 个完全图如图 1.22 所示. 注意到, $P_1$ 和 $K_1$ 表示同一个图, 同样地 $P_2$ 和 $K_2$, $C_3$ 和 $K_3$ 都表示相同的图. 虽然在 $K_4$ 和 $K_5$ 的画法中会导致某些交叉边, 但这些交叉点并不代表图的顶点.

我们需要对图 1.21 和图 1.22 中图的画法作一些注释. 虽然我们尝试了用一种易于观察的方式来画这些图, 但在画一个图的时候, 这当然不能作为一个要求, 因为顶点可以放在任何适当的位置. 图 1.23 列出了路 $P_4$ 和完全图 $K_4$ 的一些不同画法.

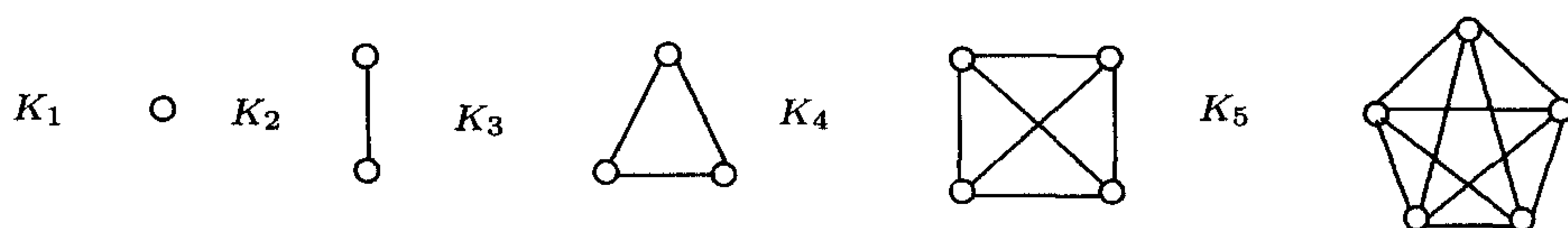



图 1.22 完全图

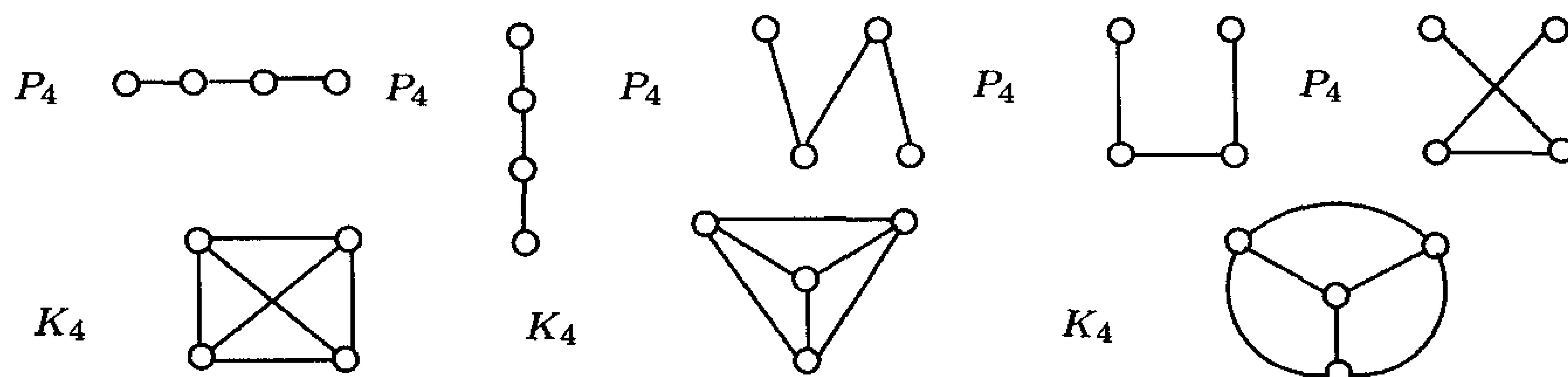



图 1.23 图 $P_4$ 和 $K_4$

图 1.24 中的不连通图 $G$ 有如下连通分支：两个阶为 4 的完全图，一个 $C_5$，一个 $P_3$. 因此，这个图可以写成 $G = 2K_4 \cup C_5 \cup P_3$.

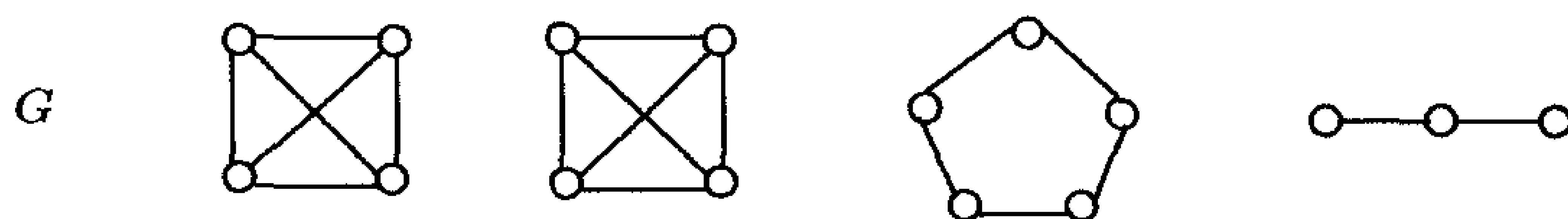



图 1.24 图 $G = 2K_4 \cup C_5 \cup P_3$

图 $G$ 的**补图 (complement)** $\overline{G}$ 定义为：$\overline{G}$ 的顶点集为 $V(G)$，且对于 $G$ 的每对顶点 $u, v$，$uv$ 是 $\overline{G}$ 的边当且仅当 $uv$ 不是 $G$ 的边. 注意到，如果 $G$ 的阶为 $n$，边数为 $m$，那么 $\overline{G}$ 的阶为 $n$，边数为 $\binom{n}{2} - m$. 由此可知，图 $\overline{K_n}$ 有 $n$ 个顶点，但没有边；这个图称为 $n$ 阶**空图 (empty graph)**. 因此，空图的边集是空集. 事实上，若 $G$ 为任意 $n$ 阶图，则 $G - E(G)$ 就是空图 $\overline{K_n}$. 由定义可知，图的顶点集不会是空集. 图 1.25 所示的是图 $H$ 和它的补图；这两个图都是连通的. 虽然一个图和它的补图未必都是连通的，但至少有一个必须是连通的.

**定理 1.11** *若 $G$ 是一个不连通图，则 $\overline{G}$ 是连通的.*

**证** [直接证法] 因为 $G$ 是不连通的，所以 $G$ 包含两个或更多个连通分支. 设 $u$ 和 $v$ 是 $\overline{G}$ 中的任意两个顶点. 我们来证明 $u$ 和 $v$ 在 $\overline{G}$ 中是连通的. 若 $u$ 和 $v$ 属于 $G$ 的不同连通分支，则 $u$ 和 $v$ 在 $G$ 中是不邻接的，故 $u$ 和 $v$ 在 $\overline{G}$ 中是邻接的. 因此 $\overline{G}$ 含有一条长为 1 的 $u - v$ 路. 下面假设 $u$ 和 $v$ 属于 $G$ 的同一个连通分支. 设 $w$ 是 $G$ 的另一个连通分支中的顶点，则 $uw, vw \notin E(G)$，推出 $uw, vw \in E(\overline{G})$，所以 $u, w, v$ 就是 $\overline{G}$ 中的一条 $u - v$ 路. ■

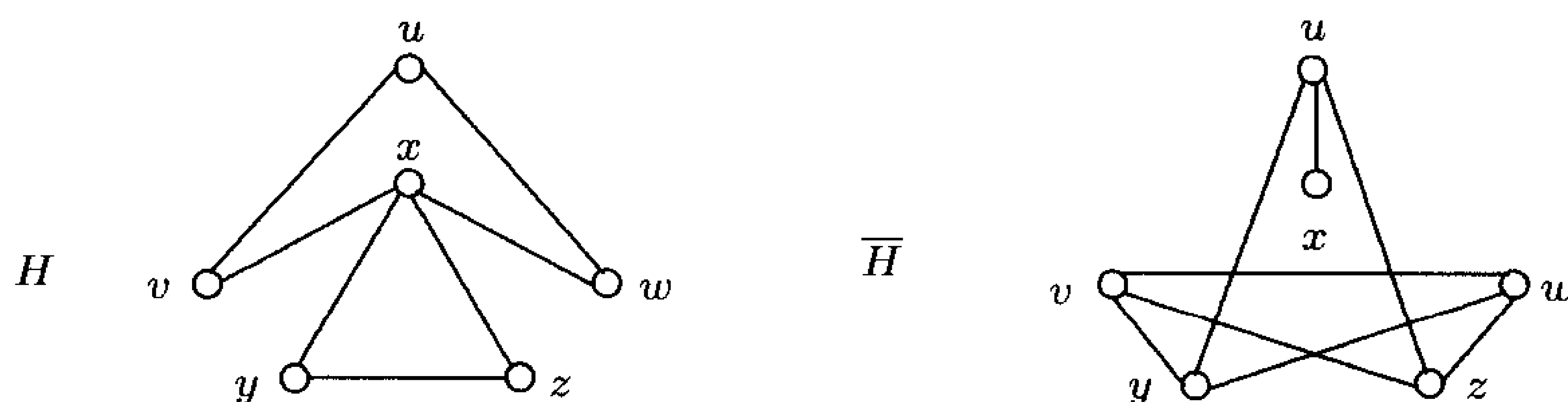



图 1.25 图及其补图

我们现在把注意力转移到另外一类图, 这类图的顶点集能够用特定的方法来划分. 图 $G$ 称为**二部图 (bipartite graph)**, 若 $V(G)$ 能够被划分为两个子集 $U$ 和 $W$ (称为**部集 (partite set)**), 使得 $G$ 的每条边必然连接 $U$ 中一个顶点和 $W$ 中一个顶点. 想一眼就能分辨出一个图是否为二部的, 并不总是很容易. 例如, 图 1.26 中的连通图 $G_1$ 和 $G_2$ 是二部的, 因为 $G_1$ 的每条边都连接 $U_1 = \{u_1, x_1, y_1\}$ 中的一个顶点和 $W_1 = \{v_1, w_1\}$ 中的一个顶点, 同样 $G_2$ 的每条边都连接 $U_2 = \{u_2, w_2, y_2\}$ 中的一个顶点和 $W_2 = \{v_2, x_2, z_2\}$ 中的一个顶点. 这些图的二部属性也在图 1.26 中得到了说明. 通过设 $U = U_1 \cup U_2$ 与 $W = W_1 \cup W_2$, 我们看到 $G = G_1 \cup G_2$ 的每条边都连接 $U$ 中的一个顶点和 $W$ 中的一个顶点. 这就证明了: 一个图是二部的当且仅当它的每个连通分支都是二部的.

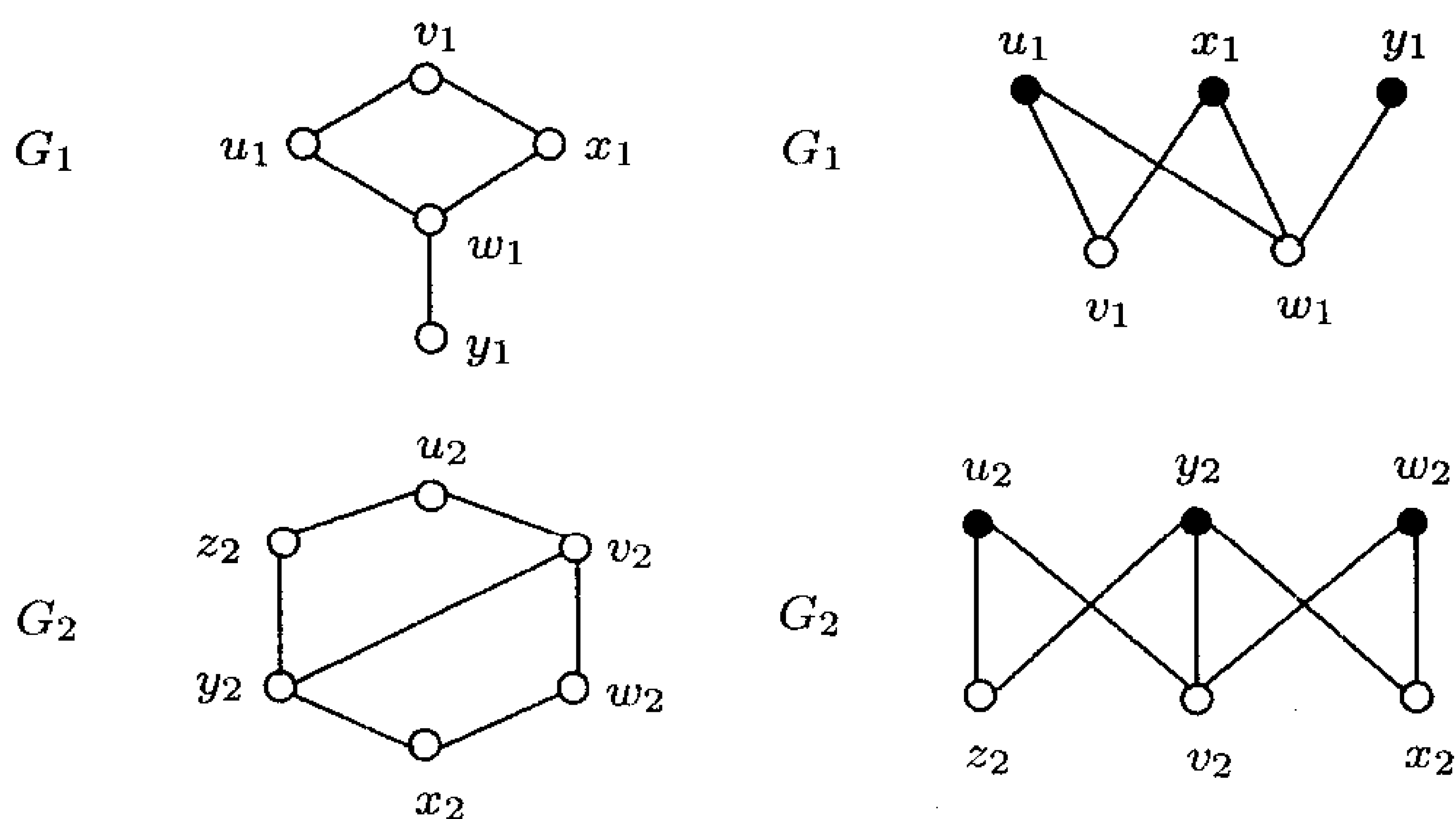



图 1.26 二部图

当然并不是每个图都是二部的. 例如, 考虑图 1.27 中的 5 圈 $C_5$. 如果 $C_5$ 是二部的, 那么它的顶点集就能够被划分为两个集合 $U$ 和 $W$, 使得 $C_5$ 的每条边都连接 $U$ 中的一个顶点和 $W$ 中的一个顶点. 顶点 $v_1$ 必然属于 $U$ 或者 $W$, 不妨设 $v_1 \in U$. 由于 $v_1v_2$ 是 $C_5$ 的一条边, 可以得到 $v_2 \in W$; 由于 $v_2v_3$ 也是 $C_5$ 的一条边, 可以得到 $v_3 \in U$. 类似地, $v_4 \in W$, $v_5 \in U$. 由上述讨论, $v_1, v_5 \in U$, 但 $v_1v_5$ 是 $C_5$ 的一条边, 导致矛盾. 因此, $C_5$ 不是二部的. 更一般地, 任何奇圈都不是二部的. 进一步地,

任何包含奇圈的图都不是二部的; 该结论的逆同样是正确的. 这是个令人惊喜的事情.

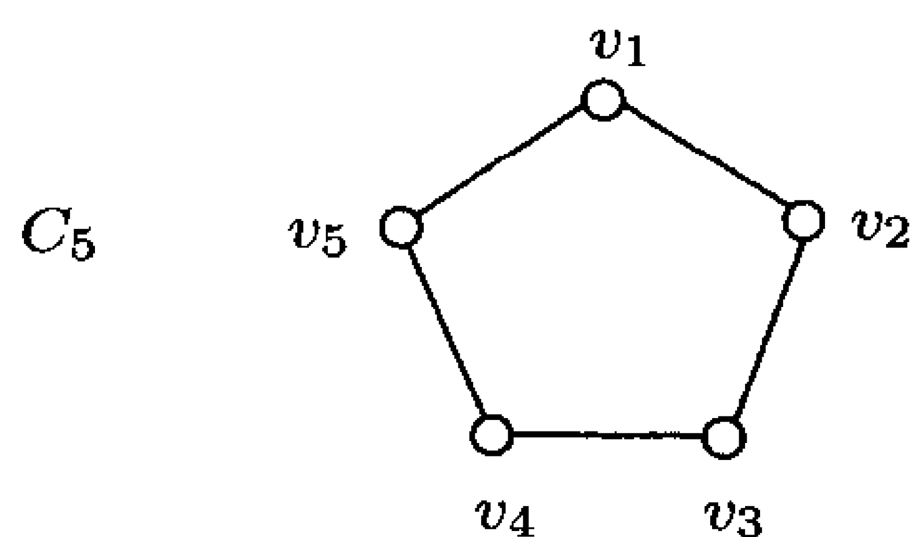



图 1.27 5 圈: 一个非二部图

**定理 1.12** 非平凡图 $G$ 是二部的当且仅当 $G$ 不含奇圈.

**证** [逆否证法, 反证法] 我们已经知道: 如果一个图含有奇圈, 那么它不是二部的. 下面证明这个结论的逆: 设 $G$ 是一个不含奇圈的非平凡图, 则 $G$ 是二部的. 由前面讨论, 一个图是二部的当且仅当它的每个连通分支都是二部的, 因此我们可以假设 $G$ 是连通的. 设 $u$ 为 $G$ 的任意一个顶点, $U$ 为 $G$ 中到 $u$ 的距离为偶数的所有顶点构成的集合, $W$ 为 $G$ 中到 $u$ 的距离为奇数的所有顶点构成的集合. 因而 $\{U,W\}$ 就是 $V(G)$ 的一个划分. 由 $d(u,u)=0$, 可以得到 $u\in U$. 我们断言: $G$ 的每条边必连接 $U$ 中一个顶点和 $W$ 中一个顶点.

假设断言不成立, 则 $U$ 中或者 $W$ 中存在两个邻接的顶点. 不妨假设 $W$ 中存在两个顶点 $v$ 和 $w$, 使得 $vw\in E(G)$. 由于 $d(u,v)$ 和 $d(u,w)$ 都是奇的, 所以存在两个非负整数 $s$ 和 $t$, 使得 $d(u,v)=2s+1$, $d(u,w)=2t+1$. 设 $P': u=v_0,v_1,\cdots,v_{2s+1}=v$, $P'': u=w_0,w_1,\cdots,w_{2t+1}=w$ 分别是 $G$ 中的 $u-v$ 测地线和 $u-w$ 测地线. 显然 $P'$ 和 $P''$ 有共同的起始顶点 $u$, 也可能会有其他共同顶点. 在 $P'$ 和 $P''$ 的所有共同顶点中, 设 $x$ 是最后一个顶点 (可能 $x=u$). 因而, 存在某个整数 $i\geqslant 0$, 使得 $x=v_i$, 从而 $d(u,v_i)=i$. 注意到 $x$ 同时在 $P''$ 上, 并且 $w_i$ 是 $P''$ 中到 $u$ 的距离为 $i$ 的唯一顶点, 所以 $x=w_i$. 于是有 $x=v_i=w_i$. 然而 $C: v_i,v_{i+1},\cdots,v_{2s+1},w_{2t+1},w_{2t},\cdots,w_i=v_i$ 是长为

$$[(2s+1)-i]+[(2t+1)-i]+1=2s+2t-2i+3=2(s+t-i+1)+1$$

的圈. 因此 $C$ 是一个奇圈, 从而导致矛盾. ■

我们知道, 如果 $G$ 是一个二部图, 那么 $V(G)$ 能够被划分成两个子集 $U$ 和 $W$ (称为部集), 使得 $G$ 的每条边都连接 $U$ 中一个顶点和 $W$ 中一个顶点. 然而, 这并不意味着 $U$ 中的每个顶点都会与 $W$ 中的每一个顶点邻接. 如果这种情形确实发生了, 那么称 $G$ 是一个**完全二部图 (complete bipartite graph)**. $|U|=s$ 和 $|W|=t$ 的完全二部图记为 $K_{s,t}$ 或 $K_{t,s}$. 若 $s=1$ 或者 $t=1$, 则 $K_{s,t}$ 称为**星 (star)**(图). 图 1.28 示出了一些完全二部图, 包括星 $K_{1,3}$. 可以看出, 尽管 $K_{2,2}$ 的画法和图 1.21 中

的 $C_4$ 的画法是大不相同的, 但 $K_{2,2}$ 和 $C_4$ 是同一个图. 如果图 $G$ 和 $H$ 仅仅在画法或者顶点标号上可能不同外, 其他都相同, 我们写成 $G \cong H$. (用专业术语描述为这两个图是同构的. 我们将在第 3 章讨论同构.) 若 $G$ 和 $H$ 的结构是不同的, 则写成 $G \ncong H$.

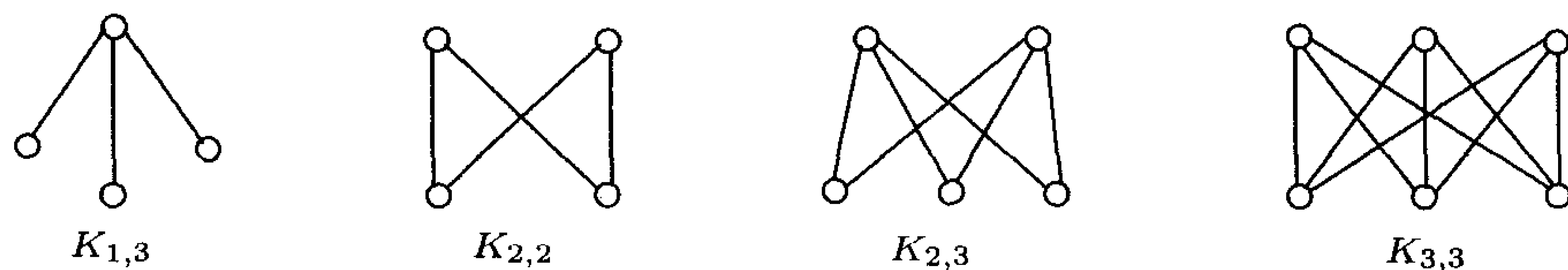



图 1.28　完全二部图

二部图属于如下更一般的图类. 称图 $G$ 为 **$k$ 部图 ($k$−partite graph)**, 如果 $V(G)$ 能够被划分成 $k$ 个子集 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ (也称为**部集**), 使得 $uv$ 是 $G$ 的边仅当 $u$ 和 $v$ 属于不同的部集. 特别地, 若不同部集中的每两个顶点之间都有一条边连接, 则称 $G$ 为**完全 $k$ 部图 (complete $k$−partite graph)**. 若 $|V_i| = n_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 则我们把这个完全 $k$ 部图记为 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$. 完全 $k$ 部图也称为**完全多部图 (complete multipartite graph)**. 若对于每个 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 有 $n_i = 1$, 则 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$ 就是完全图 $K_k$. 完全 2 部图即为完全二部图. 图 1.29 示出了一些完全多部图.

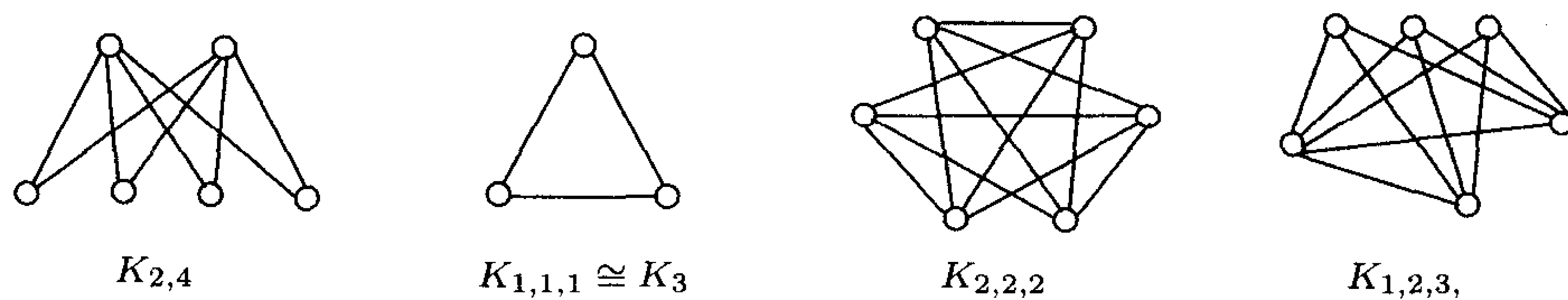



图 1.29　完全多部图

我们可以按不同的方式从给定的两个图来构造新的图. 对于两个顶点不相交的图 $G$ 和 $H$, 我们已经提到的 $G \cup H$ 就是顶点集为 $V(G) \cup V(H)$ 和边集为 $E(G) \cup E(H)$ 的 (不连通) 图. 图 $G$ 和 $H$ 的**联 (join)** $G + H$ 由 $G \cup H$ 通过连接 $G$ 的每个顶点和 $H$ 的每个顶点而获得. 图 1.30 所示的是 $P_3$ 和 $K_2$ 的联.

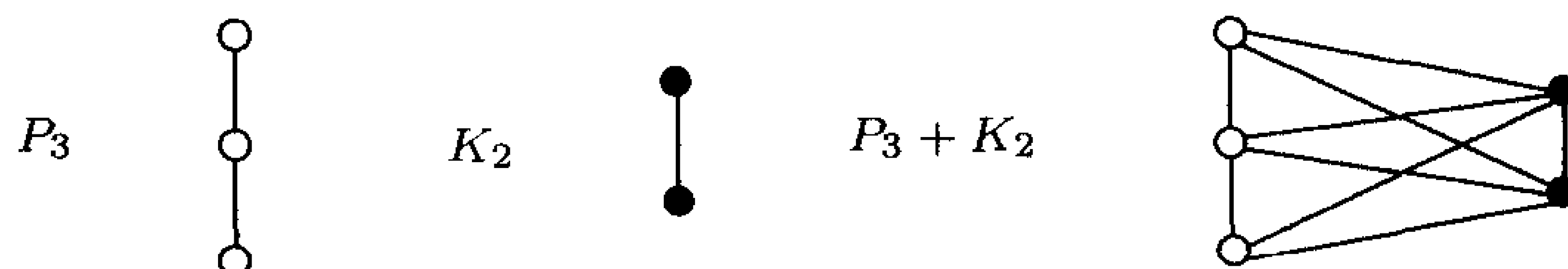



图 1.30　两个图的联

对于两个 (顶点集未必不交的) 图 $G$ 和 $H$, $G$ 和 $H$ 的**笛卡儿乘积 (Cartesian**

**product)** $G \times H$ 具有顶点集 $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, 即 $G \times H$ 的每个顶点是一个有序对 $(u, v)$, 其中 $u \in V(G)$, $v \in V(H)$. $G \times H$ 中的两个不同顶点 $(u, v)$ 和 $(x, y)$ 是邻接的, 如果满足 (1) $u = x$, $vy \in E(H)$ 或者 (2) $v = y$, $ux \in E(G)$. 图 1.31 所表示的是 $P_3$ 和 $K_2$ 的笛卡儿乘积.

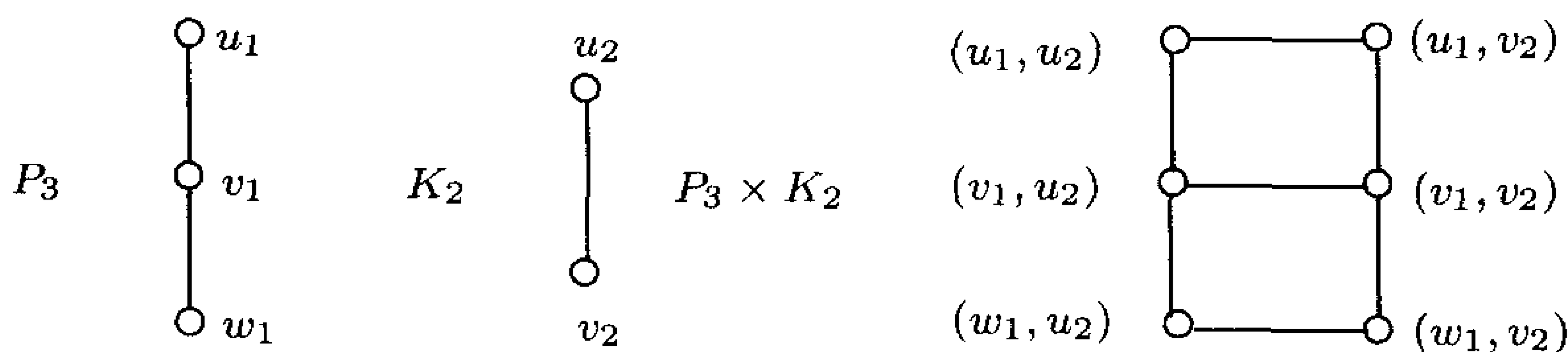



图 1.31 两个图的笛卡儿乘积

关于图的笛卡儿乘积, 下面给出一些有用的注释. 首先, 根据笛卡儿乘积的定义, 乘积表达式中 $G$ 和 $H$ 的次序与 $G \times H$ 结构是无关的, 换句话说, $G \times H$ 和 $H \times G$ 是相同的图, 即它们是同构图.

我们可以用一种不太正式的方法来画图 $G \times H$(或 $H \times G$), 这种方法不需要给顶点标号. 把 $G$ 的每个顶点 $x$ 都用图 $H$ 的一个拷贝 $H_x$ 来代替. 设 $u$ 和 $v$ 是 $G$ 的两个顶点. 若 $u$ 和 $v$ 在 $G$ 中是邻接的, 就把 $H_u$ 和 $H_v$ 的每两个对应顶点用一条边连接起来; 若 $u$ 和 $v$ 在 $G$ 中不是邻接的, $H_u$ 和 $H_v$ 之间就不添加任何边. 该画法在图 1.32 中得到说明.

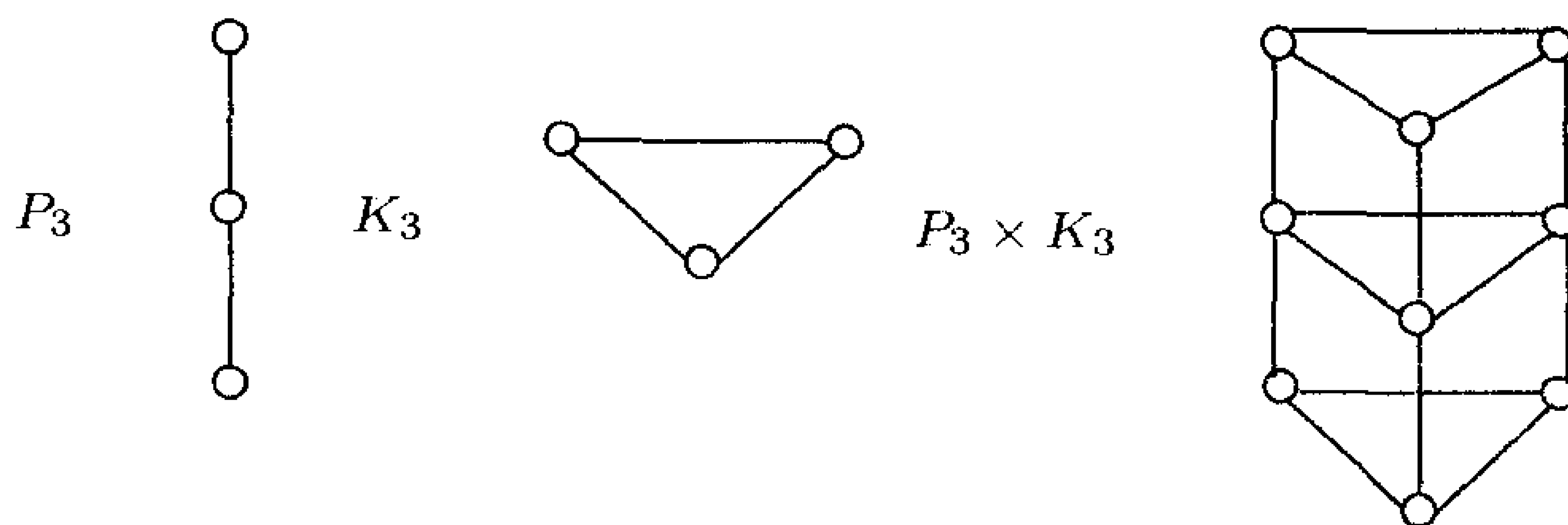



图 1.32 两个图的笛卡儿乘积

注意到 $K_2 \times K_2$ 是一个 4 圈. 图 $C_4 \times K_2$, 通常记为 $Q_3$, 并称之为**立方体 (3–cube)**. 更一般地, 我们把 $Q_1$ 定义为 $K_2$, 对于 $n \geqslant 2$, 把 $Q_n$ 定义为 $Q_{n-1} \times K_2$. 图 $Q_n$ 称为**$n$ 方体 ($n$–cube)**或者**超立方体 (hypercube)**. $n$ 方体也可以按如下方式定义: 顶点集由 0 和 1 组成的所有有序 $n$ 元组 (通常称为**$n$ 位字符串 ($n$–bit string)**) 构成, 两个顶点是邻接的当且仅当它们的有序 $n$ 元组恰好在一个位置 (坐标) 上不同. 图 1.33 所示的是 $n = 1, 2, 3$ 的 $n$ 方体, 它们的顶点都是用 $n$ 位字符串来标号的.

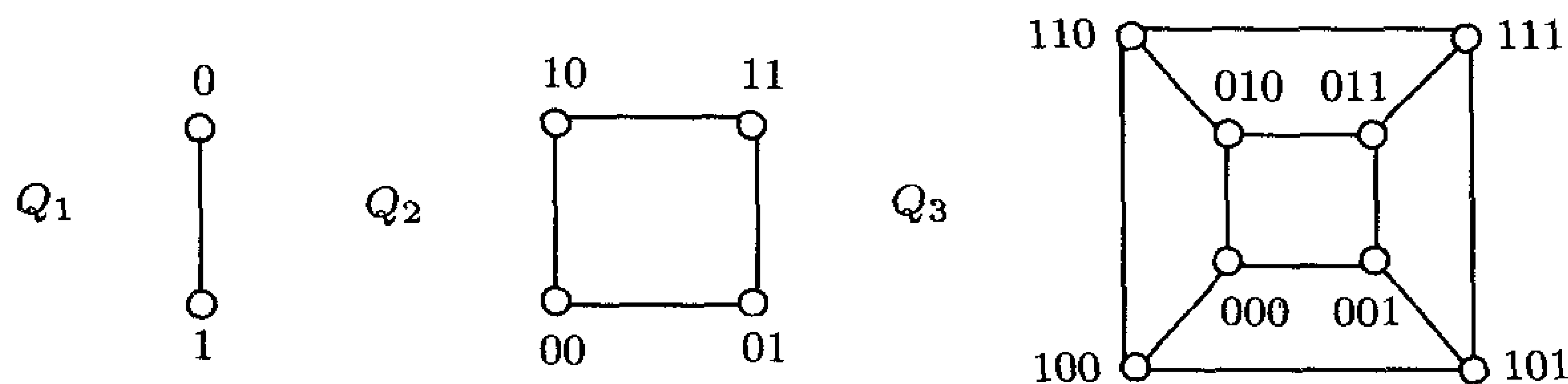



图 1.33 $n$ 方体 ($1 \leqslant n \leqslant 3$)

## 习题

1.21 画出图 $3P_4 \cup 2C_4 \cup K_4$.

1.22 设 $G$ 是不连通图, 由定理 1.11, $\overline{G}$ 是连通的. 证明: 若 $u$ 和 $v$ 是 $\overline{G}$ 的任意两个顶点, 则 $d_{\overline{G}}(u,v)=1$ 或 $d_{\overline{G}}(u,v)=2$; 因此, 如果 $G$ 是不连通图, 那么 $\operatorname{diam}(\overline{G}) \leqslant 2$.

1.23 考虑如下问题. 对于给定的正整数 $k$, 是否存在连通图 $G$, 满足 $\overline{G}$ 也是连通的且含有 4 个不同的顶点 $u, v, x, y$, 使得 $d_G(u,v)=k=d_{\overline{G}}(x,y)$?

(a) 证明当 $k=1$ 或 $k=2$ 时, $G$ 是存在的.

(b) 找出使 $G$ 存在的最大值 $k$.

1.24 判断图 1.34 中的图 $G_1$ 与 $G_2$ 是否为二部的. 若它为二部的, 重新画出它以标出部集; 若不是, 则说明原因.

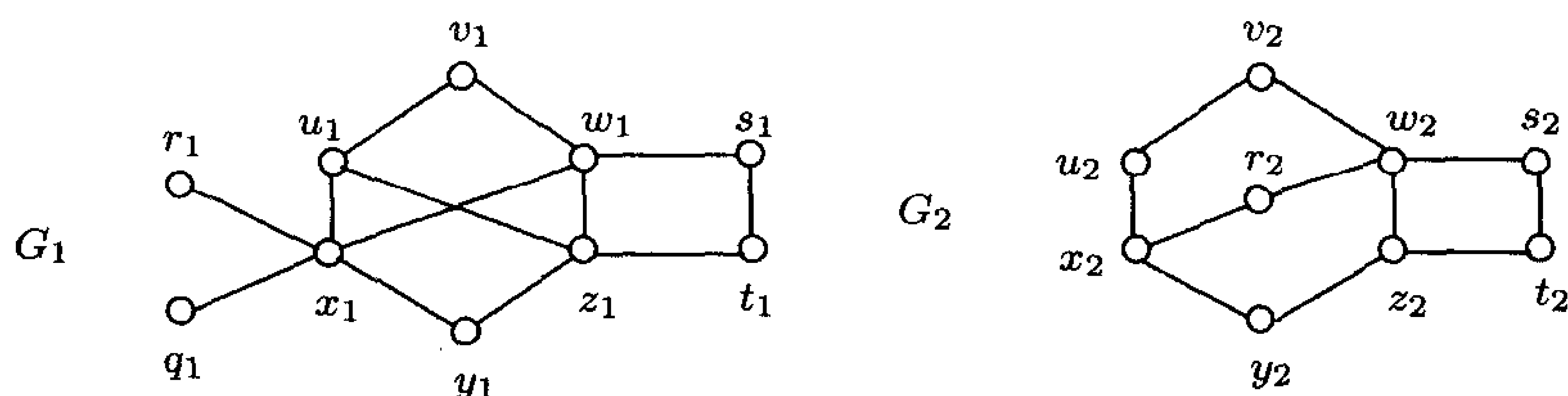



图 1.34 习题 1.24 中的图

1.25 设 $G$ 是阶至少为 5 的图. 证明: $G$ 和 $\overline{G}$ 中至多有一个是二部的.

1.26 设图 $G$ 的顶点集为有限整数集. 如果 $x+y$ 是奇数, 则顶点 $x$ 和 $y$ 是邻接的. $G$ 属于哪个著名的图类? 并给出解释.

1.27 对于下面图 $G, H$, 画出 $G+H$ 和 $G \times H$.

(a) $G=K_5$, $H=K_2$; (b) $G=\overline{K}_5$, $H=\overline{K}_3$; (c) $G=C_5$, $H=K_1$.

1.28 我们已经知道对于 $n \geqslant 1$, $n$ 方体 $Q_n$ 的顶点集为 $n$ 位的字符串集 $S_n$, $S_n$ 中的两个顶点是邻接的当且仅当它们恰有一个坐标不同.

(a) 对于 $n \geqslant 2$, 定义图 $R_n$ 的顶点集是 $n$ 位的字符串集合 $S_n$, 其中两个顶点是邻接的当且仅当它们恰有两个坐标不同. 画出 $R_2$ 和 $R_3$.

(b) 对于 $n \geqslant 3$, 定义图 $T_n$ 的顶点集是 $n$ 位的字符串集合 $S_n$, 其中两个顶点是邻接的当且仅当它们恰有三个坐标不同. 画出 $T_2$ 和 $T_3$.

## 1.4 多重图与有向图

在有些情形下, 对于我们所讨论的问题, 前面所定义的图可能不是一个适当的模型. 我们现在描述图的定义的两个变形, 它们在以后的讨论中将会经常遇到. 在一个图中, 两个顶点或者是邻接的, 或者不是, 换言之, 两个顶点之间连接一条边, 或者没有边. 一个**多重图 (multigraph)** $M$ 是由有限非空顶点集合 $V$ 和边集合 $E$ 构成, 其中 $M$ 的每两个顶点被有限条边 (可能是 0 条边) 连接. 若两条或两条以上的边连接同一对 (不同的) 顶点, 则这些边称为是**平行边 (parallel edge)**. 在多重图中, 允许连接顶点到其自身的边, 这样的边称为**环 (loop)**. 如果环 $e$ 连接顶点 $v$ 到其自身, 则称 $e$ 为 $v$ 上的环. 在多重图的同一个顶点上, 允许有任意 (有限) 个环. 图 1.35 列出了 4 个多重图; 多重图 $M_4$ 说明: 每个图都是多重图, 但该结论的逆当然不正确.

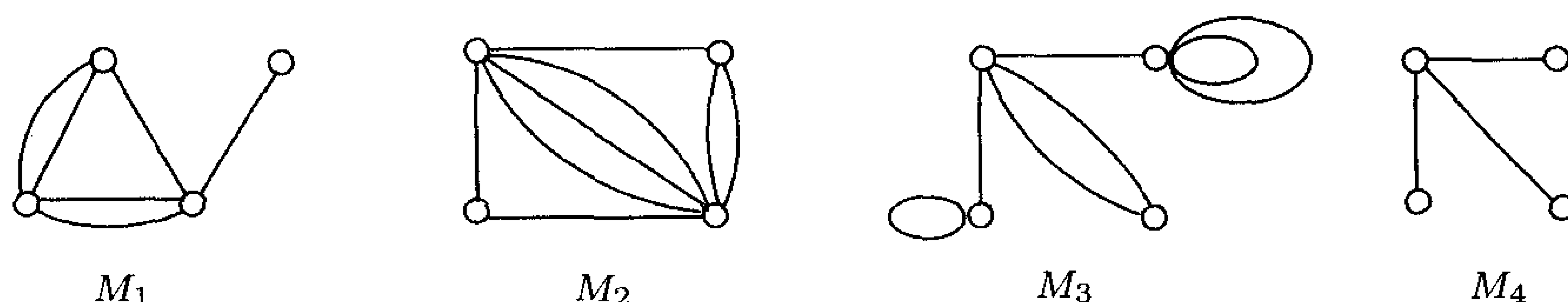



图 1.35 多重图

若 $M$ 是以 $V$ 为顶点集的多重图, 则把 $M$ 的一条边看成是 $V$ 的一个 2 元子集是不恰当的, 因为我们必须以某种方式说明边的重数, 而且还要考虑环的存在性.

回溯到例 1.2, 我们考虑了集合 $S = \{2,3,5,8,13,21\}$ 以及 $S$ 中的若干整数对; 这些整数对的和或差 (取绝对值) 仍属于 $S$. 图 1.2 中的图 $H$ 为此情形建立了模型. 在 $H$ 中, 有一条边连接了 3 和 5, 说明 $3+5 \in S$ 或 $|3-5| \in S$. 在此情形下, 尽管都有 $3+5 \in S$ 和 $|3-5| \in S$, 但从图 $H$ 无法知道这点. 图 1.36 的多重图 $M$ 则提供了这个信息. 即便在此情形下, 顶点 $i, j$ 间的单一边也不能告诉我们是 $i+j \in S$, 还是 $|i-j| \in S$; 它只能告诉我们其中之一出现了. 因而 $M$ 只是这种情形的一个较好 (但不是最好) 的模型.

一个**有向图 (digraph 或directed graph)** $D$ 是由有限非空集合 $V$ 和集合 $E$ 构成的, 其中 $V$ 中的对象称为**顶点 (vertex)**; $E$ 是由不同顶点的*有序对* (ordered pairs) 构成的集合, 其中的元素称为**有向边 (directed edge)** 或**弧 (arc)**. 若 $(u,v)$ 是一条有向边, 则在 $D$ 的画法中, 画一条由 $u$ 指向 $v$ 的有向直线段或曲线段来说明这条边, 并称 $u$ **邻接到 (adjacent to)** $v$, 且 $v$ **邻接自 (adjacent from)** $u$; 称 $u$ 为有向边 $(u,v)$ 的**起点 (start point)**, $v$ 为有向边 $(u,v)$ 的**终点 (end point)**; 也称顶

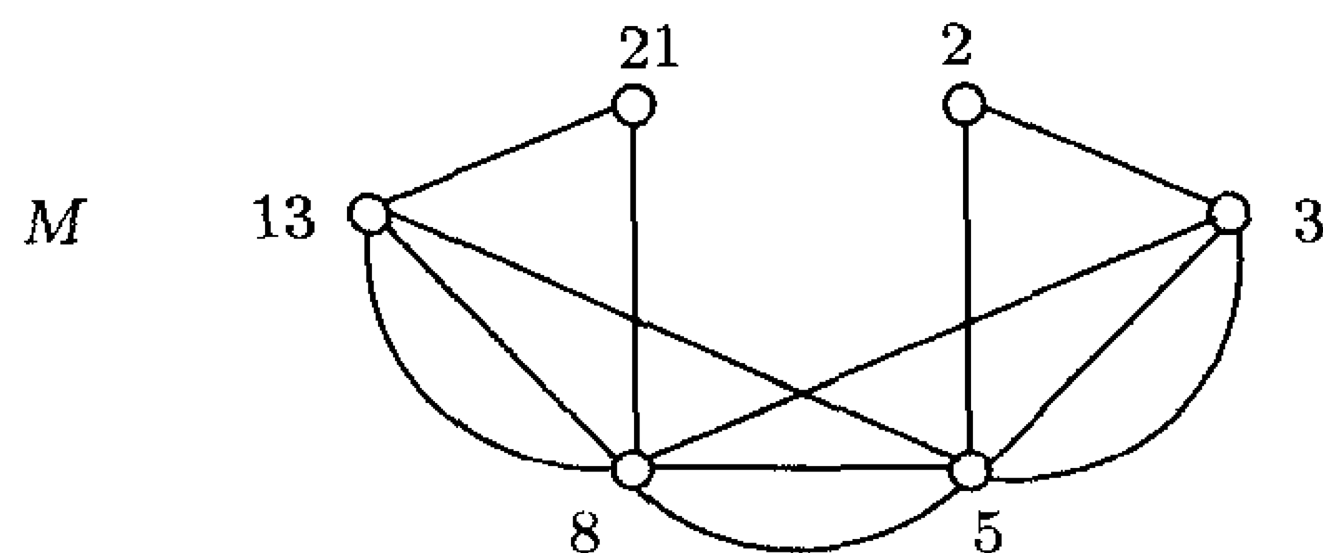



图 1.36 多重图

点 $u$ 和 $v$ 与有向边 $(u,v)$ **关联 (incident)**. 有向边 $(u,v)$ 和 $(v,u)$ 可能会在某个有向图中同时出现. 在有向图的定义中, 若对每一对不同顶点 $u,v$, 至多有一条有向边 $(u,v)$ 或 $(v,u)$ 连接它们, 则所定义的有向图称为是**定向图 (oriented graph)**. 因此, 定向图 $D$ 可以由某个图 $G$在其每条边上指定一个方向而获得; 称有向图 $D$ 为 $G$ 的一个**定向 (orientation)**. 图 1.37 列出了有向图 $D_1$ 和 $D_2$, 其中 $D_2$ 是定向图, 但 $D_1$ 不是.

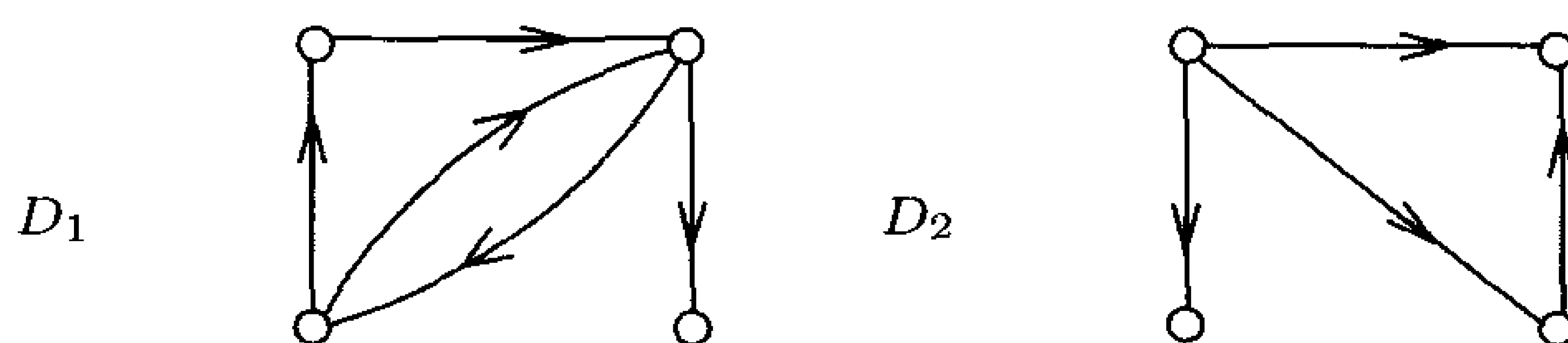



图 1.37 有向图

接下来, 回到例 1.3, 在那里我们考虑了由两枚硬币 (一枚金币, 一枚银币) 组成的 12 种构形, 记为 $c_1, c_2, \cdots, c_{12}$. 现在, 我们称 $c_i$ 能够变换成 $c_j$, 如果 $c_j$ 可以由 $c_i$ 通过向右或向上移动其中一枚硬币而获得. 建立此情形的模型需要一个有向图, 即图 1.38 所示的有向图 $D$, 它也是个定向图.

## 习题

1.29 (a) 设 $S=\{2,3,4,7,11,13\}$. 构造多重图 $M$, 其顶点集为 $S$, 对于 $S$ 中不同元素 $i$ 和 $j$, 若 $i+j\in S$, 则 $ij$ 是一条边, 并且, 若 $|i-j|\in S$, 则 $ij$ 也是一条边. 换句话说, 若 $i+j\in S$ 与 $|i-j|\in S$ 同时成立, 则在 $i$ 和 $j$ 之间连接两条边.

(b) 若把 (a) 中的限制词 "不同" 去掉, 则其对答案有何影响?

1.30 考虑图 1.38 中的 12 种构形 $c_i$, $1\leqslant i\leqslant 12$, 画出有向图 $D$, 其中 $V(D)=\{c_1,c_2,\cdots,c_{12}\}$, 且 $(c_i,c_j)$ 是 $D$ 的一条有向边, 如果 $c_j$ 可由 $c_i$ 相对于跳棋盘中心按顺时针旋转 90° 或 180° 获得.

1.31 用图 1.38 中的 12 种构形定义一种不同于练习 1.30 中所定义的变换, 并且能用一个有向图而不是图来建立此模型.

1.32 设 $S$ 和 $A$ 是两个有限非空的整数集合. 定义有向图 $D$, 要求 $V(D)=A$, 且若 $x\neq y$, $y-x\in S$, 则 $(x,y)$ 是 $D$ 的一条弧.

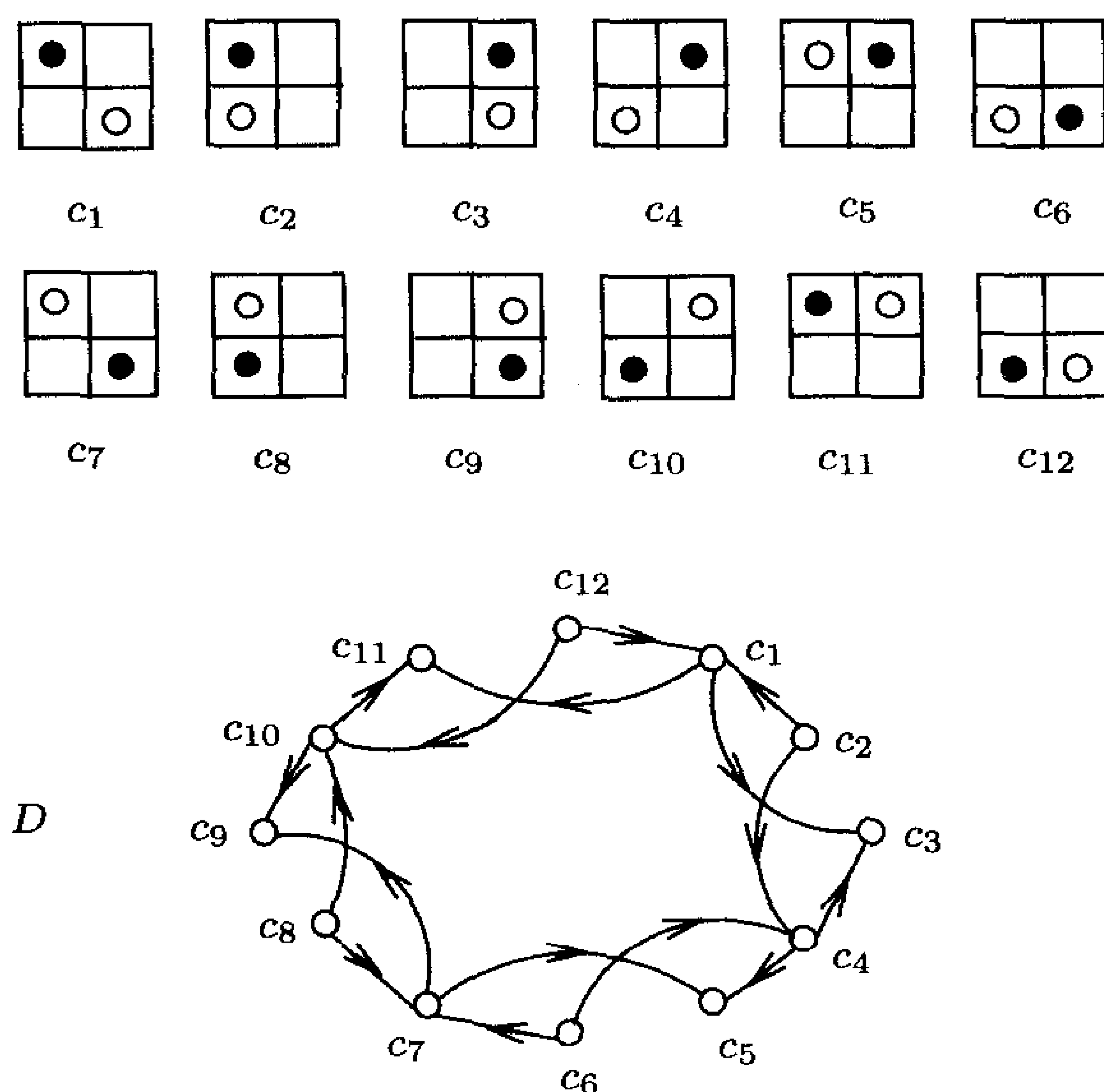



图 1.38 用有向图建立的 12 种构形的模型

(a) 对于 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $S = \{-2, 1, 2, 4\}$, 画出有向图 $D$.

(b) 如果 $A$ 和 $S$ 是由奇数构成, 那么 $D$ 有什么性质?

(c) 还可以怎样来推广 (b) 中的问题?

(d) 如果 $|A| = |S| = 5$, $D$ 的边数为多少?

1.33 设有向图 $D$ 的顶点集为 $\{-3, 3, 6, 12\}$, 且若 $i \neq j$, $i \mid j$, 则 $(i, j) \in D$. 画出有向图 $D$.

# 第 2 章　度

## 2.1　顶点的度

对于一个图 $G$, 有很多关于 $G$ 的量, 它们称为是 $G$ 的**参数** (**parameter**). 尽管了解这些参数值可以为我们提供一些图的信息, 但很少能反映图的整体结构.(这种观点与同构图的概念紧密相连, 关于同构图我们将在第 3 章讨论.) 在上一章中, 我们已经介绍了图最为重要的两个参数：阶与边数. 在图中有许多参数是与图的顶点相联系的. 本章我们将介绍其中最为重要的一个.

在图 $G$ 中, 与顶点 $v$ 相关联的边的总数称为是 $v$ 的**度** (**degree**), 记为 $\deg_G v$; 若不致引起混淆, 可简记为 $\deg v$. 显然, $\deg v$ 也等于与 $v$ 邻接的顶点个数. 两个邻接的顶点可互称为**邻点** (**neighbor**). 顶点 $v$ 的邻点集 $N(v)$ 称为是 $v$ 的**邻域** (**neighborhood**). 显然 $\deg v = |N(v)|$.

称度为 0 的顶点为**孤立 (顶) 点** (**isolated vertex**), 度为 1 的顶点为**端点** (**end-vertex**) (或**叶** (**leaf**)). $G$ 的**最小度** (**minimum degree**)是 $G$ 所有顶点的最小的度, 记为 $\delta(G)$; $G$ 的**最大度** (**maximum degree**), 记为 $\Delta(G)$. 若 $G$ 为 $n$ 阶图,$v$ 是 $G$ 任一个顶点, 则有：

$$0 \leqslant \delta(G) \leqslant \deg v \leqslant \Delta(G) \leqslant n-1.$$

如图 2.1 所示, 图 $G$ 的阶为 6, 边数为 5, 每个顶点都用它的度来标号. 由于 $G$ 含有一个孤立点 $u$, 因此 $\delta(G)=0$. 此外, 顶点 $w$ 在 $G$ 中有最大的度, 因此 $\Delta(G)=\deg w=4$. 由于 $\deg v=\deg z=1$, 故 $v$ 和 $z$ 均是 $G$ 的端点. 若将 $G$ 中所有顶点的度相加, $0+1+1+2+2+4=10$, 该数恰好为 $G$ 边数的两倍. 下面的定理 2.1 说明上述发现并不是一个巧合.

对大多数图论初学者而言, 他们一般会把定理 2.1 作为自己学习这门课的第一个定理. 因此, 定理 2.1 常常被称为 "**图论第一定理**". 尽管在第 1 章中已经介绍了许多定理, 我们仍沿袭习惯把它称为图论第一定理.

**定理 2.1 (图论第一定理)**　若图 $G$ 的边数为 $m$, 则

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m.$$

**证**　[直接证法] 在计算 $G$ 中所有顶点度的和时, 每一条边 $e$ 被计数了两次 (分别对应与 $e$ 关联的两个顶点). ■

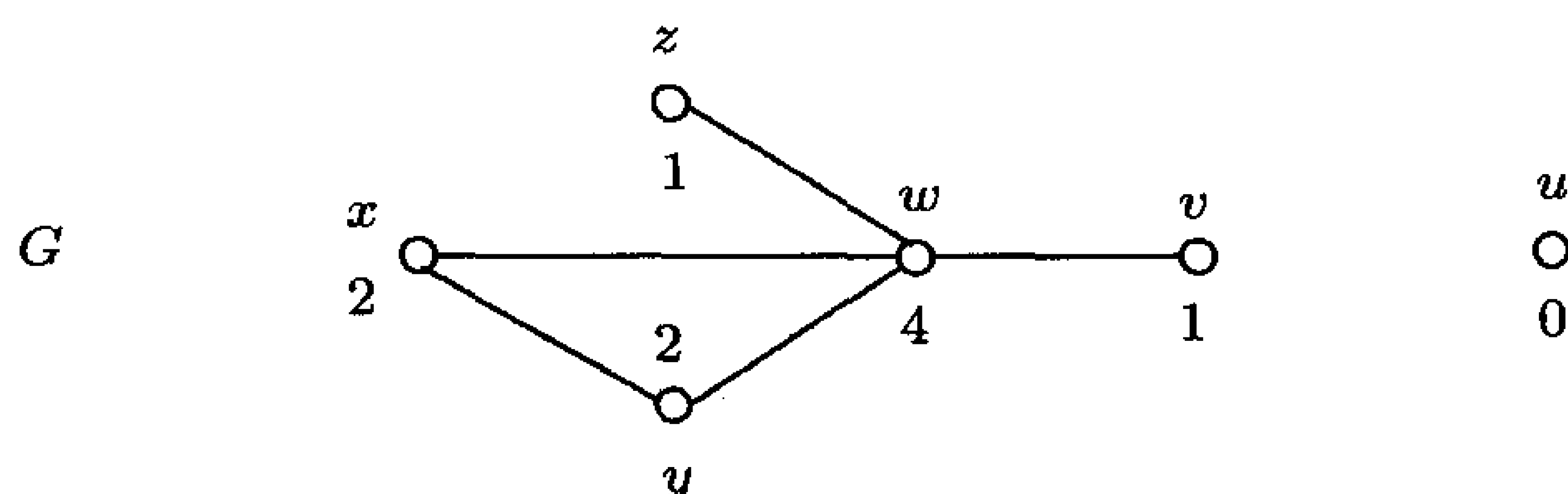



图 2.1 图 $G, \delta(G)=0, \Delta(G)=4$

下面给出一个例子, 可作为上述定理的应用.

**例 2.2** 设图 $G$ 的阶为 14, 边数为 27. $G$ 中每个顶点的度只可能为 3, 4 或 5, 且 $G$ 有 6 个度为 4 的顶点. 问 $G$ 中有多少度为 3 的顶点? 多少度为 5 的顶点?

**解** 设 $G$ 有 $x$ 个度为 3 的顶点. 由于 $G$ 的阶为 14 且度为 4 的顶点有 6 个, 则度为 3 或 5 的顶点共有 8 个. 因此, 度为 5 的顶点有 $8-x$ 个. 对 $G$ 的顶点的度求和, 由图论第一定理, 我们得到:

$$
\begin{aligned}
3\times x+4\times 6+5\times(8-x)&=2\times 27,\\
3x+24+40-5x&=54,\\
-2x&=-10,\\
x&=5.
\end{aligned}
$$

而 $8-x=3$. 因此, $G$ 有 5 个度为 3 的顶点,3 个度为 5 的顶点. ◇

从例 2.2 的解法可以看出该问题有唯一解. 或许你还可以发现其他的解法, 例如试图画出该图. 考虑图 2.2 所示的图, 每个顶点都用它的度标号. 显然, 该图满足例 2.2 的条件, 有 14 个顶点、27 条边且有 6 个度为 4 的顶点. 不难发现该图有 5 个度为 3 的顶点,3 个度为 5 的顶点, 恰好为例 2.2 的解. 虽然以这种方式可以给出问题的正确解答, 但这种解法并不可行. 因为我们并不知道如何根据已有的条件来画出图 2.2, 从而得到正确答案.

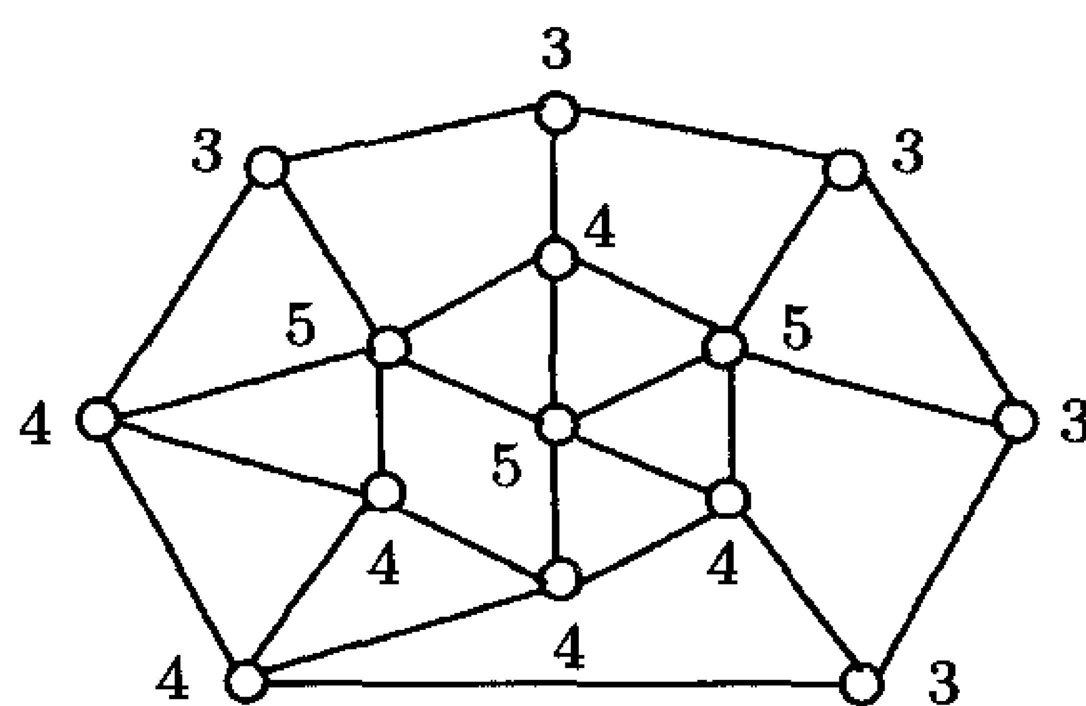


图 2.2 一个阶为 14, 边数为 27 的图

下面我们来看另一种可能的"解法". 事实上, 求解该问题就是找到两个整数 $x$,$y$ 使得:

$$x + y = 8;$$

$$3x + 4 \times 6 + 5y = 2 \times 27 = 54.$$

通过观察, $x = 5$, $y = 3$ 满足上述方程, 从而"解决"了该问题. 但这种"解法"同样存在缺陷, 我们怎样说明 $x = 5$, $y = 3$ 是满足方程的唯一解呢? (当然, 我们可以尝试 $x$,$y$ 所有可能的值.) 在例 2.2 中所给出的解法不仅证明了 $x = 5$, $y = 3$ 是仅有的解, 而且证明了该解法不依赖于给定条件 (图有 14 个点, 27 条边, 6 个度为 4 的顶点) 的图. 这正如我们在求解 $x^2 - x = 3x - 4$ 的实数根 $x$ 时, 仅仅得到 $x = 2$ 是该方程的解是不够的, 因为我们需要找到 $x^2 - x = 3x - 4$ 的所有解. 尽管 $x = 2$ 是唯一的解, 我们也不得不去证明它.

设 $G$ 是一个边数为 $m$ 的二部图, $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_s\}$和 $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_t\}$是 $G$ 的两个部集.$G$ 中每条边都连接着 $U$ 中的一个顶点和 $W$ 中的一个顶点, 因此 $U$(或 $W$) 中顶点的度和等于 $G$ 的边数, 即

$$\sum_{i=1}^{s} \deg u_i = \sum_{j=1}^{t} \deg w_j = m. \tag{2.1}$$

为方便起见, 我们把度为偶数的顶点称为**偶点 (even vertex)**, 度为奇数的顶点称为**奇点 (odd vertex)**. 回顾图 2.2 中的图 $G$, 它有 6 个奇点和 8 个偶点. 特别地, 奇点的个数为偶数. 我们将证明该结论对所有图均成立.

**推论 2.3** *每个图都有偶数个奇点.*

**证** [直接证法] 假设 $G$ 是一个边数为 $m$ 的图. 我们将图 $G$ 的顶点集 $V(G)$ 划分成两个子集 $V_1$ 和 $V_2$, 其中 $V_1$ 是由 $G$ 的所有奇点构成, $V_2$ 是由 $G$ 的所有偶点构成. 根据图论第一定理,

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = \sum_{v \in V_1} \deg v + \sum_{v \in V_2} \deg v = 2m.$$

$\sum_{v \in V_2} \deg v$ 是所有偶数的和, 因而为偶数. 因为

$$\sum_{v \in V_1} \deg v = 2m - \sum_{v \in V_2} \deg v,$$

所以 $\sum_{v \in V_1} \deg v$ 也是一个偶数. 由于 $V_1$ 中顶点的度均为奇数, 即推出 $V_1$ 中顶点的个数是偶数. ■

从顶点的度中我们可以了解图的大量信息. 例如, 如果一个 $n$ 阶图 $G$ 包含一个度为 $n - 1$ 的顶点, 则 $G$ 一定是连通图. 下面给出简要的证明. 不妨假设

$\deg w = n-1$, 则 $w$ 与 $G$ 中其他所有的顶点都邻接. 欲证明 $G$ 是连通图, 只需证明对于 $G$ 中任意两个顶点 $x, y$, $G$ 中存在一条 $x-y$ 路即可. 若 $w$ 为 $x$ 或 $y$, 结论显然成立. 若 $w$ 不为 $x$ 或 $y$, 由于 $x, y$ 都与 $w$ 邻接, 则 $x, w, y$ 是 $G$ 中一条 $x-y$ 路.

上述度条件不是图连通的必要条件. 例如, 阶为 $n(n \geqslant 4)$ 的路 $P_n$ 是连通的, 但每个顶点的度都不超过 2. 下面我们给出图连通的几个度条件.

**定理 2.4** 设 $G$ 为 $n$ 阶图. 若对于 $G$ 中任意两个不邻接的顶点 $u$ 和 $v$, 都满足:

$$\deg u + \deg v \geqslant n-1,$$

则 $G$ 是连通的, 且 $\operatorname{diam}(G) \leqslant 2$.

**证** [直接证法] 我们只需证明 $G$ 的任意两个顶点可由一条长至多为 2 的路来连接即可. 设 $x, y \in V(G)$. 若 $xy \in E(G)$, 则 $x, y$ 即为一条连接 $x$ 和 $y$ 的路. 下面假设 $xy \notin E(G)$. 由 $\deg x + \deg y \geqslant n-1$ 可推出, $G$ 中一定存在一个与 $x, y$ 都邻接的顶点 $w$. 因此 $x, w, y$ 是 $G$ 中满足条件的一条路. ■

由定理 2.4 也可推出: 若 $n$ 阶图 $G$ 的每个顶点 $v$ 都满足 $\deg v \geqslant (n-1)/2$, 则 $G$ 必然是连通的.

**推论 2.5** 设 $G$ 是阶为 $n$ 的图. 若 $\delta(G) \geqslant (n-1)/2$, 则 $G$ 是连通的.

**证** [直接证法] 对于 $G$ 中任意两个不邻接的顶点 $u, v$,

$$\deg u + \deg v \geqslant \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n-1.$$

由定理 2.4, $G$ 是连通的. ■

根据推论 2.5, 若图 $G$ 的阶为 7 且 $\delta(G) \geqslant (7-1)/2 = 3$, 则 $G$ 是连通的. 同样, 若 $G$ 的阶为 8 且 $\delta(G) \geqslant (8-1)/2 = 3.5$, 则 $G$ 也是连通的. 当然, 后者也可表述成: 若 $G$ 的阶为 8 且 $\delta(G) \geqslant 4$, 则 $G$ 是连通的. 进而, 对于偶数 $n$, 推论 2.5 可表述成: 若 $n$ 阶图 $G$ 满足 $\delta(G) \geqslant n/2$, 则 $G$ 是连通的.

我们再回到定理 2.4. 该定理告诉我们, 对于 $n$ 阶图 $G$, 若任意两个不邻接的顶点度的和 "足够大", 则 $G$ 是连通的. 从定理 2.4 可以看出 $n-1$ 已经足够大了. 显然, 若任意两个不邻接的顶点度的和至少为 $n$, 则 $G$ 必是连通的. 若任意不邻接的两个顶点的度和至少为 $n-2$, 情况如何? 它是否还能保证 $G$ 是连通的? 下面我们将讨论定理 2.4 中的界的**紧性 (sharpness)**, 即说明如果将定理 2.4 中的 $n-1$ 换成更小的整数, 结论是否依然成立; 若不成立, 则说明定理 2.4 中的界不能再改进了, 因此这个界是紧的.

正如下面的说明, 定理 2.4 中的界的确是紧的. 例如, 设 $n$ 为一偶数, 不妨设为 $n = 2k$. 考虑图 $G \cong 2K_k$, 即 $G$ 是由两个连通分支构成的不连通图, 其每个连通分

支都是 $K_k$, 如图 2.3 所示. 若 $u$ 和 $v$ 是 $G$ 中两个不邻接的顶点, 则 $u,v$ 必属于两个不同的连通分支, 且度均为 $k-1$. 则有:

$$\deg u + \deg v = (k-1) + (k-1) = 2k-2 = n-2.$$

因此, 对于一个 $n$ 阶图 $G$ 而言, 即使任意两个不邻接顶点的度和至少为 $n-2$, 也不能保证 $G$ 是连通的.

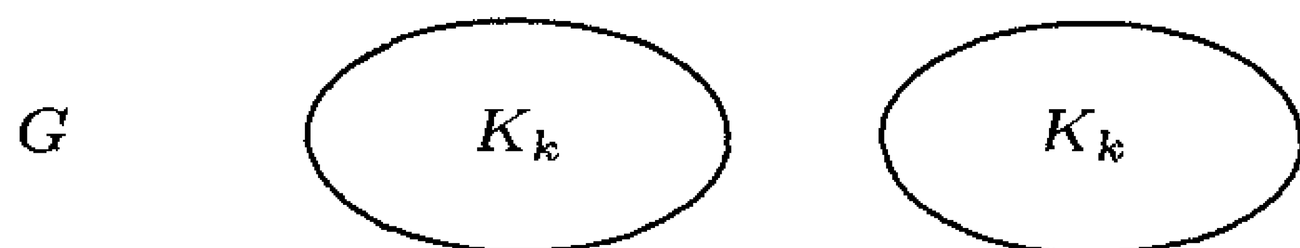



图 2.3 阶为 $n=2k$ 且任意两个不邻接顶点度和至少为 $n-2$ 的不连通图

再次考察 $n$ 阶不连通图 $G$. 因为 $G$ 至少有两个连通分支, 故 $G$ 中一定存在某个连通分支 $G_1$, $G_1$ 的阶 $n_1$ 至多为 $n/2$. $G_1$ 中每个点的度至多为 $n_1 - 1 \leqslant (n/2) - 1 = (n-2)/2$, 因此 $\delta(G) \leqslant (n-2)/2$. (这就给出了推论 2.5 的一个逆否证明.) 若 $G$ 有三个连通分支, 则其某个连通分支的阶至多为 $n/3$. 更为一般地, 若 $G$ 有 $k$ 个连通分支, 则其某个连通分支的阶至多为 $n/k$.

在多重图和有向图中, 也有类似的度概念. 对于多重图 $G$ 的顶点 $v$, $v$ 的**度** **(degree)** 定义为与 $v$ 相关联的边的总数, 其中 $v$ 上的每个环对度的贡献为 2(即计数 2 次). 对于图 2.4 所示的图 $G$, 有

$$\deg u_1 = 4, \deg u_2 = 6, \deg u_3 = 6, \deg u_4 = 4.$$

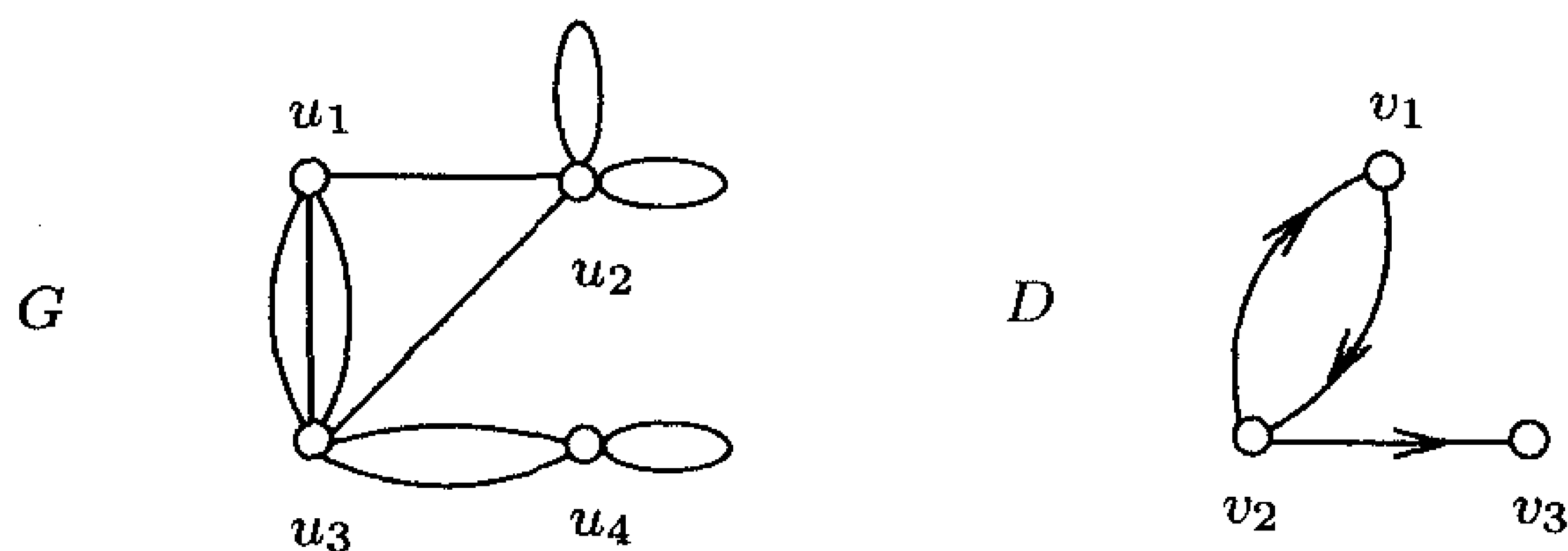



图 2.4 多重图和有向图的度

对于有向图 $D$ 的顶点 $v$, $v$ 的**出度** **(outdegree)** $\mathrm{od}\, v$ 定义为 $D$ 中以 $v$ 为起点的有向边个数, $v$ 的**入度** **(indegree)** $\mathrm{id}\, v$ 则定义为 $D$ 中以 $v$ 为终点的有向边个数. 对于图 2.4 所示的有向图 $D$, 有

$$\mathrm{od}\, v_1 = \mathrm{id}\, v_1 = 1, \mathrm{od}\, v_2 = 2, \mathrm{id}\, v_2 = 1, \mathrm{od}\, v_3 = 0, \mathrm{id}\, v_3 = 1.$$

## 习题

2.1 给出满足下列条件的图或说明这样的图为什么不存在:

(a) 阶为 7 的图, 顶点的度分别为 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3.
(b) 阶为 7 的图, 顶点的度分别为 1, 2, 2, 2, 3, 3, 7.
(c) 阶为 4 的图, 顶点的度分别为 1, 3, 3, 3.

2.2 给出满足下列条件的图或说明这样的图为什么不存在:
(a) 没有奇点的图.
(b) 所有顶点度为 3 的非完全图.
(c) 阶至少为 5 的图 $G$, 且对于 $G$ 中任意两个邻接的顶点 $u, v$, 均有 $\deg u \neq \deg v$.
(d) 阶至少为 5 的非完全图 $H$, 且对于 $H$ 中任意两个不邻接的顶点 $u, v$, 均有 $\deg u \neq \deg v$.

2.3 若阶为 12 且边数为 31 的某个图的每个顶点的度或者为 4 或者为 6, 则该图中度为 4 的顶点有多少个?

2.4 给出一个阶为 6 且边数为 10 的图 $G$, 满足 $\delta(G) = 3$, $\Delta(G) = 4$.

2.5 若阶为 25 且边数为 62 的图 $G$ 的每个顶点的度只可能为 3, 4, 5 或 6, 且有 2 个度为 4 的顶点, 11 个度为 6 的顶点. 问 $G$ 中有多少度为 5 的顶点?

2.6 证明: 在一个阶为 $3n$ $(n \geqslant 1)$ 的图中, 若度为 $n-1, n$ 和 $n+1$ 的顶点个数均为 $n$, 则 $n$ 必为偶数.

2.7 设 $G$ 为 22 阶的二部图, $U$ 和 $W$ 为 $G$ 的两个部集, 其中 $|U| = 12$. 若 $U$ 中每个顶点的度为 3, $W$ 中每个顶点的度为 2 或 4. 问: $G$ 有多少度为 2 的顶点?

2.8 设 $G$ 为 $n$ 阶图. 若对 $G$ 中任意三个互不邻接的顶点 $u, v$ 和 $w$, 都有 $\deg u + \deg v + \deg w \geqslant n-1$, 则 $G$ 一定是连通的吗?

2.9 证明: 若不连通图 $G$ 恰有两个奇点, 则这两个奇点一定属于 $G$ 的同一连通分支.

2.10 我们已经知道: 若 $n$ 阶图 $G$ 的任意两个不邻接的顶点 $u$ 和 $v$ 都满足 $\deg u + \deg v \geqslant n-2$, 则 $G$ 可能是不连通的.
(a) 证明: 存在 $n$ 阶的连通图 $G$, 它满足: 对于 $G$ 中任意两个不邻接的顶点 $u$ 和 $v$, 都有 $\deg u + \deg v \geqslant n-2$, 且 $G$ 有两个不邻接的顶点 $x$ 和 $y$, 使得 $\deg x + \deg y = n-2$.
(b) 证明: 若 $n$ 阶图 $G$ 的任意两个不邻接的顶点 $u$ 和 $v$ 都满足 $\deg u + \deg v \geqslant n-2$, 则 $G$ 至多有两个连通分支.
(c) (b) 中的界是紧的吗?

2.11 推论 2.5 说明了: 若 $n$ 阶图 $G$ 满足 $\delta(G) \geqslant (n-1)/2$, 则 $G$ 是连通的. 问: 界 $(n-1)/2$ 是否为紧的? 即, $(n-1)/2$ 能否用 $(n-2)/2$ 代替?

2.12 证明: 若 $n$ 阶图 $G$ 满足 $\Delta(G) + \delta(G) \geqslant n-1$, 则 $G$ 是连通的, 且 $\mathrm{diam}(G) \leqslant 4$. 并证明: 界 $n-1$ 是紧的.

2.13 设 $G$ 是阶为 $n(n \geqslant 2)$ 的图.
(a) 证明: 若 $G$ 的每个顶点 $v$ 都满足 $\deg v \geqslant (n-2)/3$, 则 $G$ 至多有两个连通分支.
(b) 证明 (a) 中的界是紧的.

2.14 证明：若图 $G$ 的任意一条边都连接一个奇点和一个偶点，则 $G$ 是二部图且有偶数条边.

2.15 证明：若对连通图 $G$ 的任意两个顶点 $u$ 和 $v$，每条 $u-v$ 路的长度都为奇数或都为偶数，则 $G$ 是二部图.

2.16 证明：对于阶为 $2n+1$ $(2n+1\geqslant 5)$ 的图 $G$，若 $G$ 的每个顶点的度或为 $n+1$ 或为 $n+2$，则 $G$ 包含至少 $n+1$ 个度为 $n+2$ 的顶点或至少 $n+2$ 个度为 $n+1$ 的顶点.

2.17 设 $G$ 为连通图且满足：

(a) $G$ 包含一顶点 $w$，满足 $\deg w \not\equiv 0 \pmod 3$，

(b) 对 $G$ 中任意两个邻接的顶点 $u,v$，都有 $\deg u+\deg v\equiv 0 \pmod 3$.

证明：$G$ 是二部图，且不包含满足 $\deg x\equiv 0 \pmod 3$ 的点 $x$.

2.18 设 8 阶图 $G$ 的顶点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_8\}$. 若 $\deg v_i=i$ $(1\leqslant i\leqslant 7)$，试求 $\deg v_8$. 并给予解释.

## 2.2 正 则 图

前面已经提到，对于 $n$ 阶图 $G$，有 $0\leqslant\delta(G)\leqslant\Delta(G)\leqslant n-1$. 若 $\delta(G)=\Delta(G)$，则 $G$ 的顶点具有相同的度，此时称图 $G$ 是**正则的 (regular)**. 若对于 $G$ 的任意一个顶点 $v$，都有 $\deg v=r$ $(0\leqslant r\leqslant n-1)$，则称 $G$ 是 **$r$ 正则 ($r$-regular)** 或 **度 $r$ 正则的 (regular of degree $r$)**. 图 2.5 列出了所有 4 阶和 5 阶的正则图. 由推论 2.3 可知，不存在含有奇数个奇点的图，因此不可能有 1 正则或 3 正则的 5 阶图.

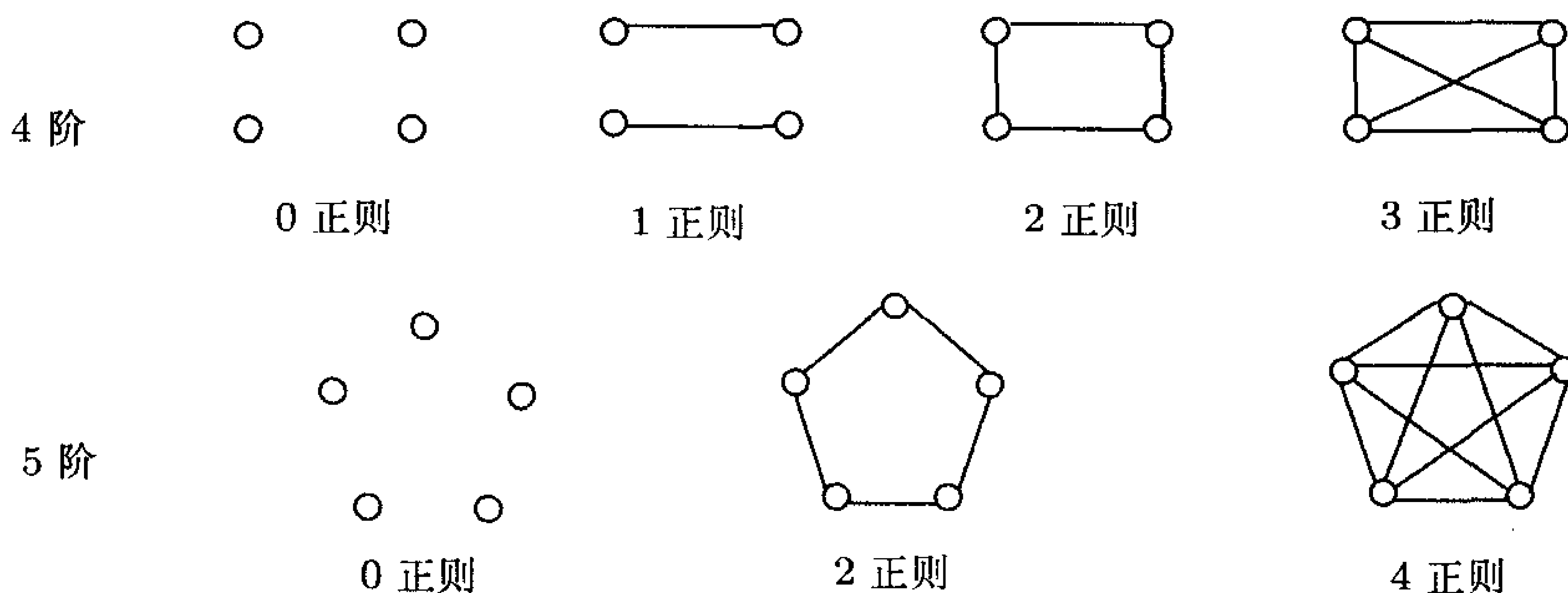



图 2.5 一些正则图

3 正则图也被称为是**立方图 (cubic graph)**. 图 $K_4$, $K_{3,3}$, 和 $Q_3$ 都是立方图；然而最为著名的立方图则是 **Petersen 图**，如图 2.6 所示. 我们将在后面遇到这个图. (8.5 节将专门讨论 Petersen 图.)

由推论 2.3 可知：若 $r$ 和 $n$ 均为奇数，则不可能存在 $n$ 阶的 $r$ 正则图. 但除此之外，对于 $0\leqslant r\leqslant n-1$，在 $n$ 阶的 $r$ 正则图存在性方面，还没有其他的限制条件.

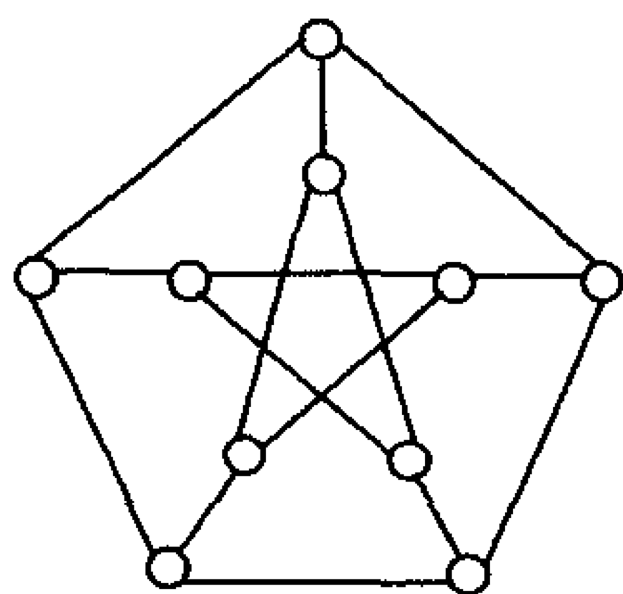


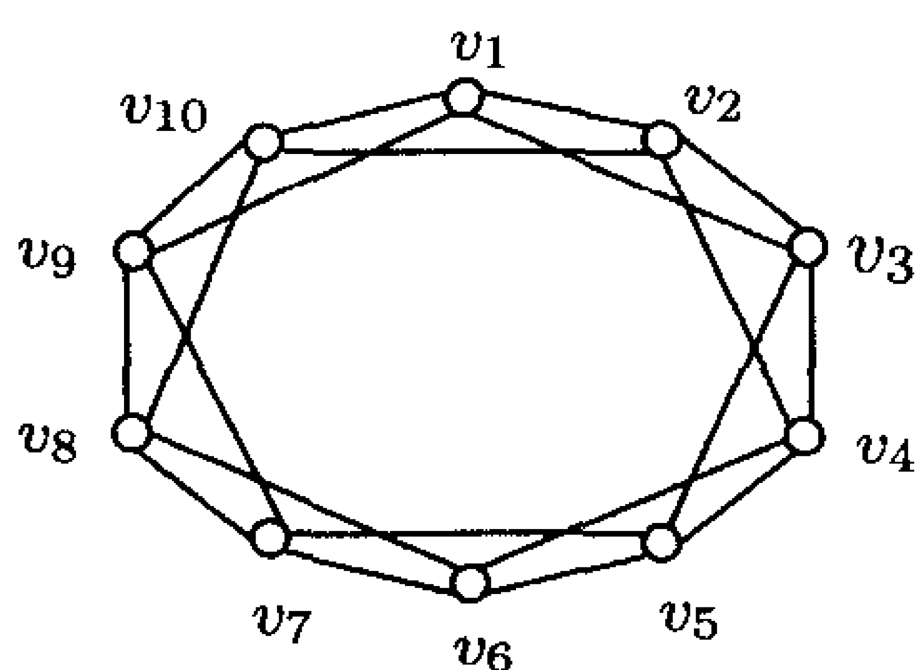
图 2.6 Petersen 图

在下面的证明中, 我们将考虑顶点集为 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的图 $G$, 并对顶点的下标实施模 $n$ 的算术运算. 例如: 若 $n=6$, $i=5$, 则将顶点 $v_{i+2}$ 记为 $v_1$.

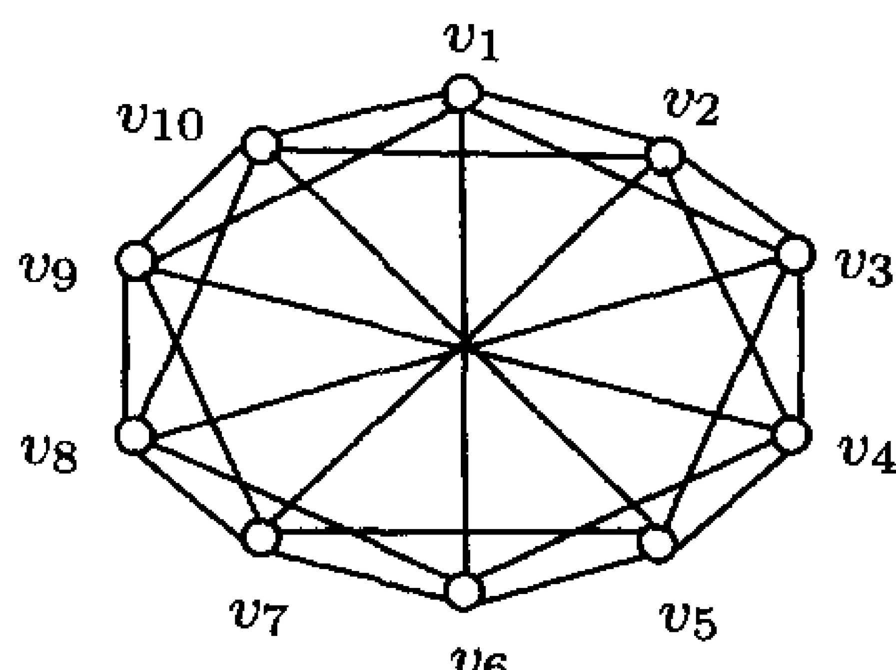
**定理 2.6** 设 $r$ 和 $n$ 为满足 $0 \leqslant r \leqslant n-1$ 的整数. 则存在 $n$ 阶的 $r$ 正则图当且仅当 $r$ 和 $n$ 中至少有一个为偶数.

**证** [直接证法] 如前面所述, 如果 $r$ 和 $n$ 均为奇数, 则不可能存在 $n$ 阶的 $r$ 正则图. 因此只需验证充分性即可. 假设 $r$ 和 $n$ 为满足 $0 \leqslant r \leqslant n-1$ 的整数, 且 $r$ 和 $n$ 中至少有一个为偶数. 下面我们构造一个 $n$ 阶 $r$ 正则图 $H_{r,n}$. 设 $V(H_{r,n})=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 首先假设 $r$ 是偶数, 则存在非负整数 $k \leqslant (n-1)/2$, 使得 $r=2k \leqslant n-1$. 对于每个 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 连接 $v_i$ 到 $v_{i+1}, v_{i+2}, \cdots, v_{i+k}$ 并连接 $v_i$ 到 $v_{i-1}, v_{i-2}, \cdots, v_{i-k}$. 如果认为顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是循环排列的, 则每一个 $v_i$ 和 $v_i$ 后的 $k$ 个顶点邻接, 也和 $v_i$ 前的 $k$ 个顶点邻接. 因此 $H_{r,n}$ 是正则的. 当 $r=4$, $n=10$ 时, $H_{4,10}$ 就是图 2.7(a) 中的图.

再假设 $r$ 是奇数, $n=2\ell$ 是偶数. 同样存在某个非负整数 $k \leqslant (n-2)/2$ 使得 $r=2k+1 \leqslant n-1$. 我们按照上述方式连接 $v_i$ 到 $2k$ 个顶点, 同时连接 $v_i$ 到 $v_{i+\ell}$. 在此情形下, 我们仍然可以认为顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是循环排列的, 每一个 $v_i$ 与 $v_i$ 后的 $k$ 个顶点以及 $v_i$ 前的 $k$ 个顶点邻接, 且 $v_i$ 和其 "相对" 的唯一顶点邻接. 因此 $H_{r,n}$ 是 $r$ 正则的. 当 $r=5$, $n=10$ 时, $H_{5,10}$ 就是图 2.7(b) 中的图. ■




(a) $H_{4,10}$




(b) $H_{5,10}$

图 2.7 10 阶 4 正则和 5 正则图

上述图 $H_{r,n}$ 称为是**Harary 图**, 是以 Frank Harary 来命名的. 在 5.3 节, 我们将再次提及 Harary 和 Harary 图.

我们所给出的定理 2.6 的证明是一种构造性证明. 我们确实构造了一个具有给定性质的图, 并非简单地证明具有这些性质的某个图是存在的. 对于正则图的子图, 会有一些限制条件. 尽管定理 2.6 的证明没有体现出这一点, 但这些限制的确是存在的. 例如, 若 $H$ 是一个 $r$ 正则图, 则 $H$ 不可能包含一个 $\Delta(G) > r$ 的图 $G$ 作为子图. 另一方面, 若对某个整数 $r$, 如果图 $G$ 满足 $\Delta(G) \leqslant r$, 则 $G$ 是某个 $r$ 正则图的子图 (事实上, 可以是诱导子图). 我们来看下面这个定理.

**定理 2.7** 对于任意图 $G$ 和任意整数 $r \geqslant \Delta(G)$, 都存在 $r$ 正则图 $H$, 它包含 $G$ 作为诱导子图.

**证** [直接证法] 若 $G$ 是 $r$ 正则的, 取 $H = G$ 即可. 因此, 我们可以假设 $G$ 不是 $r$ 正则的. 设 $G$ 的阶为 $n$, $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 设 $G'$ 是 $G$ 的一个拷贝, 其顶点集 $V(G') = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_n\}$, 且对 $1 \leqslant i \leqslant n$, $G'$ 的顶点 $v'_i$ 对应于 $G$ 的顶点 $v_i$. 我们现在从 $G$ 和 $G'$ 来构造图 $G_1$: 对 $G$ 的所有满足 $\deg v_i < r$ 的顶点 $v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 添加边 $v_iv'_i$. 易见, $G$ 是 $G_1$ 的诱导子图且 $\delta(G_1) = \delta(G) + 1$. 若 $G_1$ 是 $r$ 正则的, 取 $H = G_1$; 若 $G_1$ 不是 $r$ 正则的, 则重复上面的操作, 直到经过 $k = r - \delta(G)$ 步后得到一个 $r$ 正则图 $G_k$. 图 $G_k$ 即为所求. ■

为了举例说明定理 2.7 中的构造, 考虑图 2.8 中的 $G$, 其中 $\Delta(G) = 4$, $\delta(G) = 2$. 我们要构造一个包含 $G$ 作为诱导子图的 4 正则图 $H$. 首先, 在 $G$ 的两个拷贝中, 在所有度小于 4 的对应顶点对之间添加边, 从而构造出图 $G_1$. 显然 $\Delta(G_1) = 4$, $\delta(G_1) = 3$, 且 $G$ 是 $G_1$ 的诱导子图. 重复上面的操作, 在 $G_1$ 的两个拷贝中, 在所有度为 3 的顶点对之间添加边, 构造出图 $H$. 则 $H$ 是 4 正则的, 且 $G$ 是 $H$ 的诱导子图.

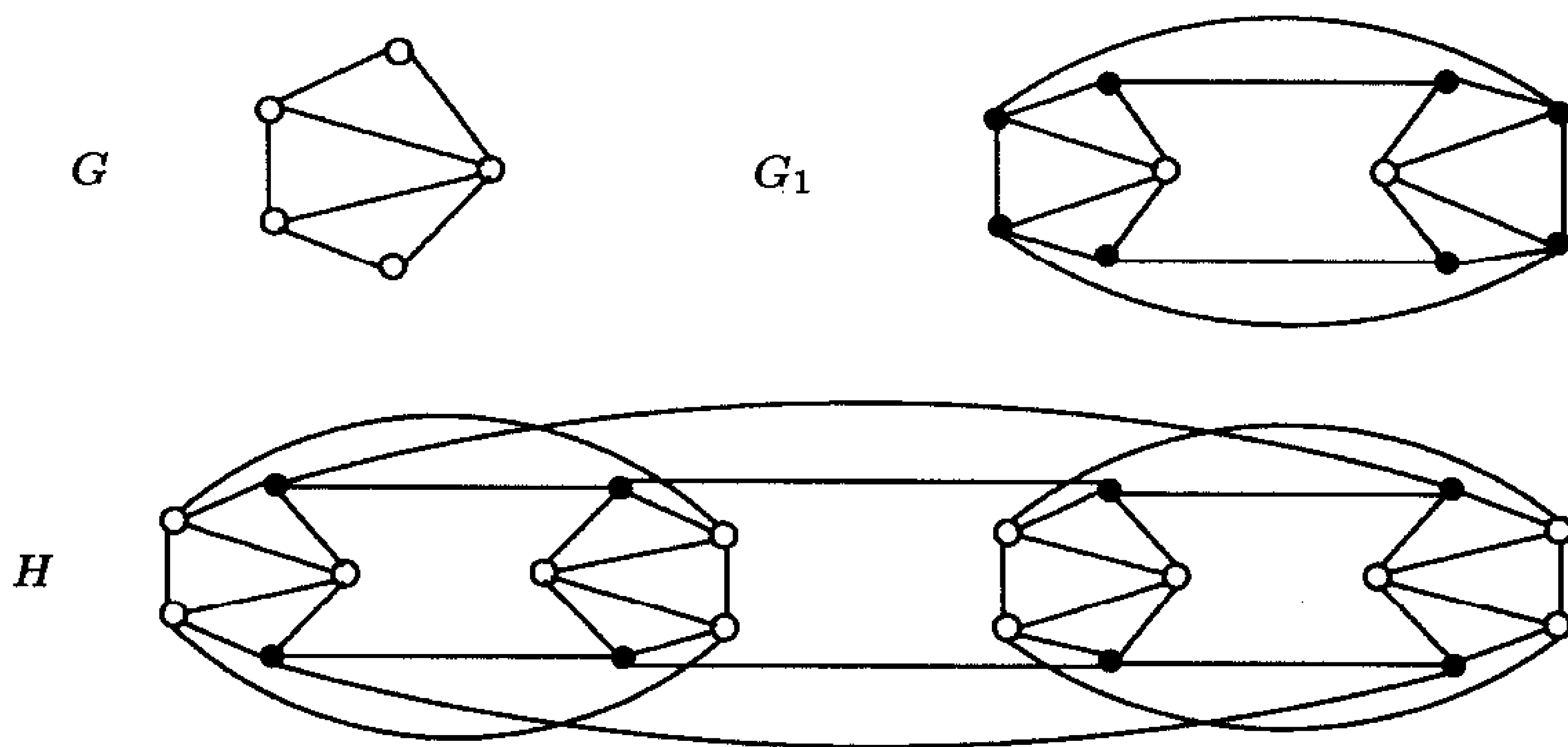



图 2.8 包含 $G$ 作为诱导子图的 4 正则图 $H$

定理 2.7 早在 1936 年出版的第一本图论专著 (Denés König 著) 中就得到了阐述. 尽管 König 的证明是对多重图而言的, 但他的证明可以导出我们在定理 2.7 中所给的证明. 然而定理 2.7 并没有构造一个包含给定图 $G$ (满足 $\Delta(G) \leqslant r$) 作为诱导子图且阶数最小的 $r$ 正则图. Paul Erdös 和 Paul J. Kelly 发现了一种方法, 应用该方法可找到上述 $r$ 正则图的最小阶数. 对于该问题, 考虑下面的例子.

**例 2.8**　对于图 2.9 所示的图 $G$, 找出含 $G$ 作为诱导子图且阶数最小的 5 正则图 $H$.

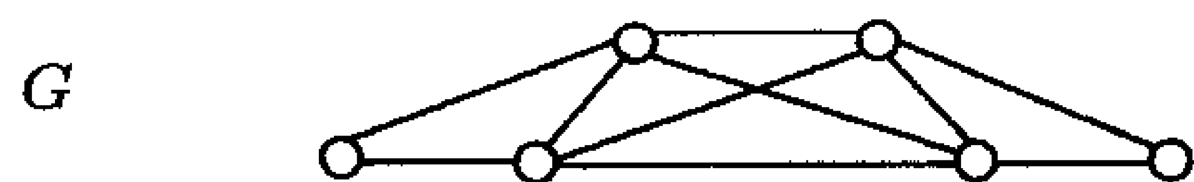



图 2.9　例 2.8 的图 $G$

**解**　由于 $G$ 的阶为 6, $\delta(G) = 2$, 故图 $H$ 的阶至少为 9. 然而并不存在 9 阶的 5 正则图, $H$ 的阶至少为 10. 因此要构造含 $G$ 作为诱导子图的 5 正则图, 就必须在 $G$ 中至少添加 4 个顶点, 记为 $u, v, w, x$, 如图 2.10(a) 所示. 如图 2.10(b) 所示, 连接 $u, v, w, x$ 到 $G$ 中的顶点以及它们之间的边, 就得到了一个 5 正则图 $H$. 显然 $G$ 是 $H$ 的诱导子图. 因此, 上述 $H$ 的最小阶数为 10. ◇

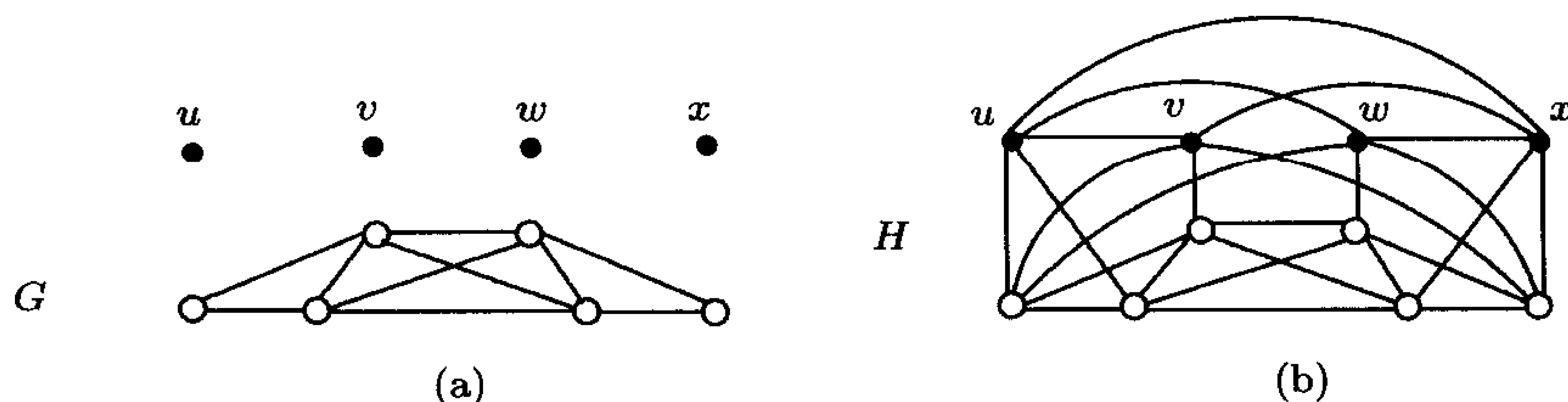



图 2.10　例 2.8 中图 $H$

### 习题

2.19　构造所有可能的 6 阶和 7 阶正则图.

2.20　证明若 $G$ 是非正则的连通图, 则 $G$ 包含两个邻接顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $\deg u \neq \deg v$.

2.21　(a) 找出 Petersen 图的 0, 1, 2, 3 正则的生成子图 $G_0, G_1, G_2, G_3$.

(b) 找出 Petersen 图的 0, 1, 2, 3 正则的诱导子图 $F_0, F_1, F_2, F_3$.

(c) 怎样修改 (b) 使问题变得更为有趣 (或更有挑战性)?

2.22　对于图 2.11 所示的图 $G$, 构造一个含 $G$ 作为诱导子图的 3 正则图 $H$.

(a) 利用定理 2.7 的证明方法, $H$ 的阶是多少?

(b) 若要使 $H$ 有最小的阶, 则阶是多少?

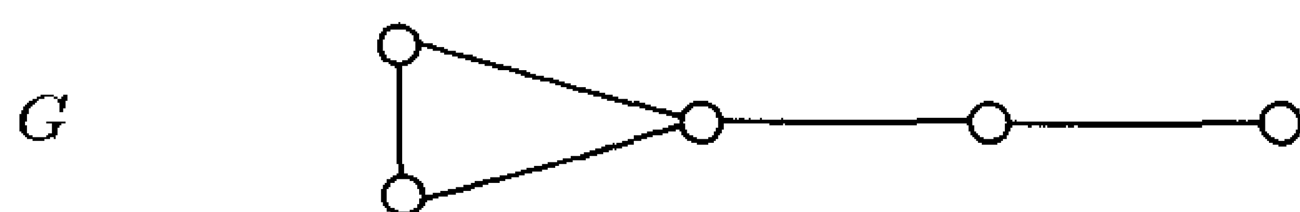



图 2.11 习题 2.22 中的图 $G$

2.23 构造一个阶数最小的 3 正则图 $H$, 它包含

(a) $P_5$ 作为诱导子图.

(b) $P_6$ 作为诱导子图.

(c) $P_7$ 作为诱导子图.

2.24 如图 2.12 所示的图 $G$, $H$ 是包含 $G$ 作为诱导子图的 3 正则图, 那么 $H$ 的阶最小为多少?

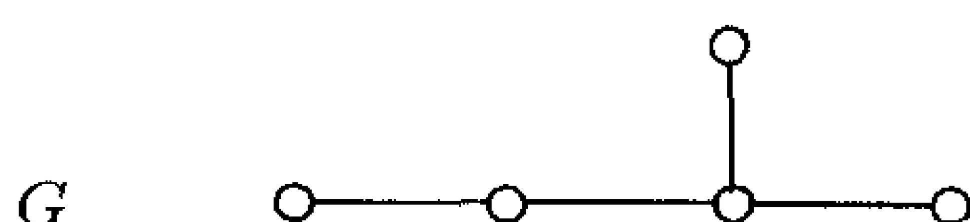



图 2.12 习题 2.24 中的图 $G$

2.25 (a) 设 $v$ 是图 $G$ 的顶点. 证明若 $G-v$ 是 3 正则的, 则 $G$ 具有奇数阶.

(b) 设图 $G$ 是 $r$ 正则图, 其中 $r$ 是奇数. 证明 $G$ 不包含奇数阶的连通分支.

2.26 (a) 证明: 图 $G$ 是正则的当且仅当 $\overline{G}$ 是正则的.

(b) 证明: 若 $G$ 与 $\overline{G}$ 均是 $r$ 正则的, 则 $G$ 具有奇数阶.

2.27 证明: 若 $G$ 是 $r$ 正则的二部图 $(r>1)$, 且部集分别为 $U$ 和 $W$, 则 $|U|=|W|$.

2.28 考虑下面问题: 是否存在图 $G$ 和正整数 $r$, 其中 $\delta(G)<r$, $\Delta(G)\leqslant r$, 使得按定理 2.7 的证明所构造的 $r$ 正则图 $H$ 不仅含 $G$ 作为诱导子图, 而且 $H$ 在所有满足条件的 $r$ 正则图中具有最小的阶.

2.29 (a) 证明: 对于 $n$ 阶图 $G$, 有 $\delta(G)+\delta(\overline{G})\leqslant n-1$.

(b) 证明: 对于 $n$ 阶图 $G$, $\delta(G)+\delta(\overline{G})=n-1$ 当且仅当 $G$ 是正则的.

2.30 从 $G=K_1$ 开始, 应用定理 2.7 中的构造方法, 给出一个含 $G$ 作为诱导子图的 3 正则图 $H$, $H$ 是哪一个著名的图?

## 2.3 度 序 列

我们已经讨论了所有顶点具有相同度的图, 但顶点具有不同度的图更加典型. 若把图 $G$ 所有顶点的度排成一个序列 $s$, 则 $s$ 称为 $G$ 的**度序列 (degree sequence)**. 例如, 如图 2.13 所示的图 $G$, 其每个顶点用度标号. 下面的序列

$$s:4,3,2,2,2,1,1,1,0;\quad s':0,1,1,1,2,2,2,3,4;\quad s'':4,3,2,1,2,2,1,1,0 \tag{2.2}$$

均为 $G$ 的度序列, 其中序列 $s$ 是非增的,$s'$ 是非减的,$s''$ 的排列是随意的. 确定图的度序列并不困难, 然而其逆问题却相当有趣.

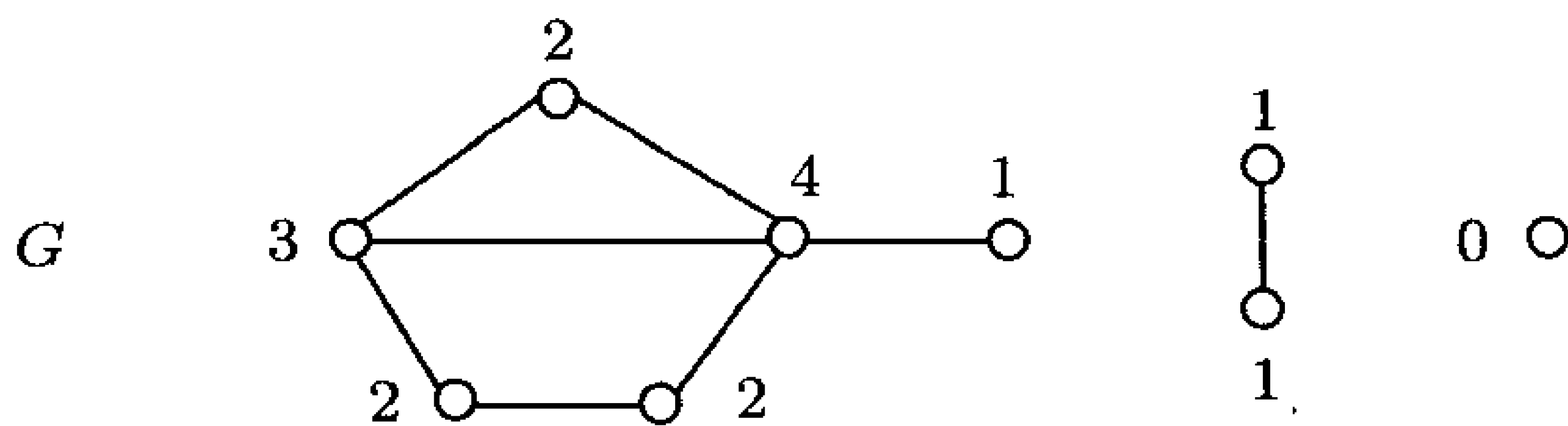



图 2.13　度序列为 4, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 0 的图

给定一个由非负整数组成的有限序列 $s$, $s$ 是否是某个图的度序列呢? 一个由非负整数组成的有限序列称为是**可图的 (graphical)**, 如果它是某个图的度序列. 当然,(2.2) 中所有的序列都是可图的.

**例 2.9**　下列哪些序列是可图的?

(1) $s_1 : 3, 3, 2, 2, 1, 1$

(2) $s_2 : 6, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2$

(3) $s_3 : 7, 6, 4, 4, 3, 3, 3$

(4) $s_4 : 3, 3, 3, 1$

**解**

(1) 序列 $s_1$ 是可图的. 事实上它是图 2.14 中 $G_1$ 的度序列.

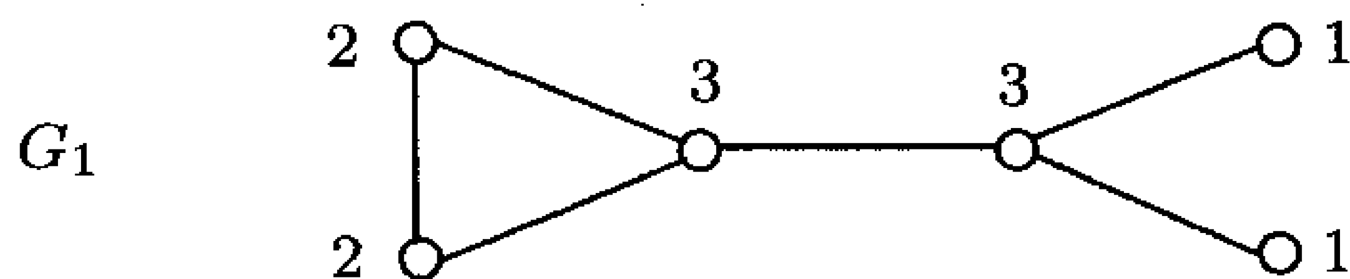



图 2.14　度序列为 3, 3, 2, 2, 1, 1 的图

(2) 因为 $s_2$ 中奇数项的个数是奇数, 所以 $s_2$ 不可能是某个图的度序列 (否则, 这个图有奇数个奇点, 与推论 2.3 矛盾). 因此, $s_2$ 不是可图的.

(3) 序列 $s_3$ 同样也不是可图的. 否则,$s_3$ 将是一个 7 阶图的度序列, 且该图包含一个度为 7 的顶点. (7 阶图任一顶点的度至多为 $7 - 1 = 6$.)

(4) 尽管序列 $s_4$ 包含的 4 项均不超过 $4 - 1 = 3$, 而且 $s_4$ 中奇数项的个数为偶数, 但 $s_4$ 仍不是可图的. [反证法] 假如 $s_4$ 是可图的, 则存在一个阶为 4 的图 $G_4$, 其顶点集 $V(G_4) = \{u, v, w, x\}$ 满足 $\deg u = \deg v = \deg w = 3$ 和 $\deg x = 1$. 这就意味着 $u, v, w$ 均与 $G_4$ 中的任意其他顶点 (包含顶点 $x$) 邻接, 但 $x$ 仅可能与 $u, v, w$ 中的一个邻接, 从而导致矛盾! ◇

序列 $s_4$ 说明, 有可能难以判断一个序列是否可图. 下面给出的定理将帮助我们有效地确定一个给定的序列是否为可图的. 该定理要归功于 Václav Havel 和 S. Louis Hakimi. 尽管 Havel 和 Hakimi 是分别独立完成了证明并各自撰写论文来阐述该定理的, 但我们还是习惯上称它为 Havel-Hakimi 定理. 为应用该定理, 我们考

虑非增序列.

**定理 2.10** 由非负整数构成的非增序列 $s: d_1, d_2, \cdots, d_n$ $(n \geqslant 2, d_1 \geqslant 1)$ 是可图的当且仅当序列

$$s_1: d_2-1, d_3-1, \cdots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n$$

是可图的.

**证** [直接证法和反证法] 假设 $s_1$ 是可图的, 则存在图 $G_1$, 顶点集 $V(G_1)=\{v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ 且满足

$$\deg_{G_1} v_i=\begin{cases} d_i-1, & \text{若 } 2 \leqslant i \leqslant d_1+1 \\ d_i, & \text{若 } d_1+2 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

我们在 $G_1$ 中增加一个新的顶点 $v_1$ 和 $d_1$ 条边 $v_1 v_i (2 \leqslant i \leqslant d_1+1)$, 从而获得图 $G$. 由于 $\deg_G v_i=d_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 则 $s$ 是 $G$ 的度序列, 即 $s$ 是可图的.

证明必要性更具有挑战性. 假设 $s$ 是可图的. 若 $s$ 是某个图 $G$ 的度序列, 并且对于 $G$ 中度为 $d_1$ 的顶点 $u$, 与之邻接的顶点的度分别为 $d_2, d_3, \cdots, d_{d_1+1}$, 则图 $G-u$ 的度序列恰好是 $s_1$; 必要性得证. (然而, 若以 $s$ 为度序列的任一个图都不包含满足上述性质的顶点 $u$, 则该如何讨论? 值得庆幸的是, 我们不必在意这个问题, 因为我们将证明: 一定存在某个以 $s$ 为度序列的图 $G$, 它包含满足上述性质的顶点 $u$.)

[反证法] 假设以 $s$ 为度序列的任一个图都不包含度为 $d_1$ 且满足下述性质的顶点: 与该顶点邻接的顶点的度分别为 $d_2, d_3, \cdots, d_{d_1+1}$. 设 $G$ 是以 $s$ 为度序列的图, 其顶点集为 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, 且满足: $\deg v_i=d_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 与 $v_1$ 邻接顶点的度和尽可能地大. 因为 $v_1$ 不同时与度为 $d_2, d_3, \cdots, d_{d_1+1}$ 的顶点邻接 (即 $v_1$ 不同时与 $d_1$ 之后的 $d_1$ 个最大度的顶点邻接), 则与 $v_1$ 邻接的顶点中必存在某个顶点 $v_s$, 使得 $v_s$ 的度小于某个与 $v_1$ 不邻接的顶点 $v_r$ 的度; 即存在顶点 $v_r$ 和 $v_s$, $d_r>d_s$, $v_1$ 与 $v_s$ 邻接, $v_1$ 与 $v_r$ 不邻接. 由于 $\deg v_r=d_r>d_s=\deg v_s$, 则一定存在顶点 $v_t$, 使得 $v_t$ 与 $v_r$ 邻接而与 $v_s$ 不邻接. 考虑在 $G$ 的基础上将边 $v_1 v_s$, $v_r v_t$ 替换成 $v_1 v_r$, $v_s v_t$ 所得到的图 $G'$ (如图 2.15 所示, 其中虚线表示两点之间没有边).

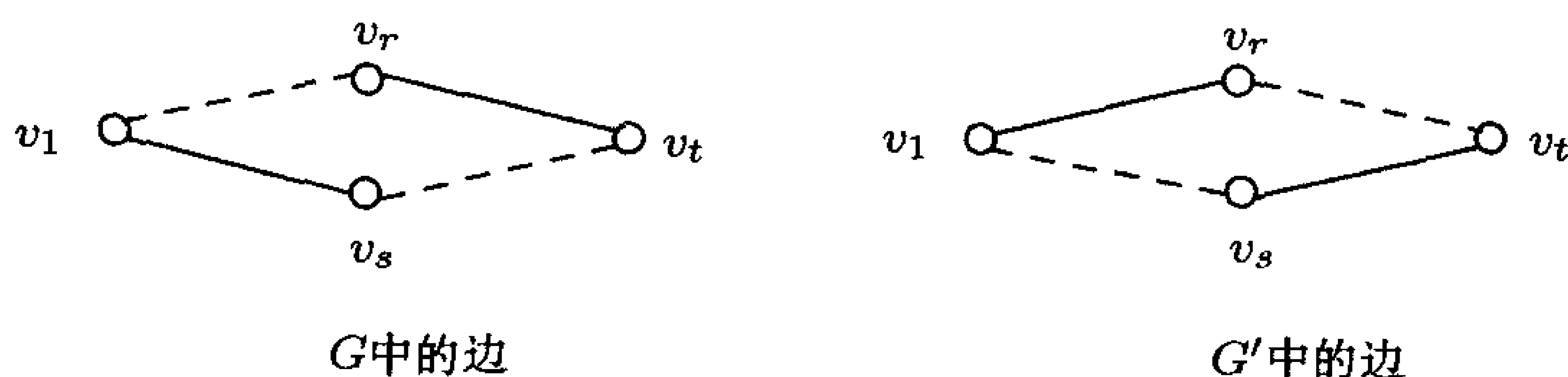



图 2.15 定理 2.10 证明中, 由 $G$ 到 $G'$ 的换边过程

可以发现,$G$ 和 $G'$ 具有相同的顶点集, 并且 $s$ 同时是 $G$ 和 $G'$ 的度序列. 然而, $G'$ 中与 $v_1$ 邻接顶点的度和大于 $G$ 中与 $v_1$ 邻接顶点的度和, 导致矛盾! ■

我们用下面两个例子来说明定理 2.10.

**例 2.11** 判断序列 $s:5,4,3,3,2,2,2,1,1,1$ 是否为可图的.

**解** 删除序列 $s$ 的首项 5, 对其后的 5 项每项减 1, 我们得到

$$s_1':3,2,2,1,1,2,1,1,1.$$

为再次利用定理 2.10, 对序列 $s_1'$ 按非增顺序排列, 得到

$$s_1:3,2,2,2,1,1,1,1,1.$$

由定理 2.10, $s$ 是可图的当且仅当 $s_1$ 是可图的. 由于 $s_1$ 仍然比较复杂, 为判断 $s_1$ 是否是可图的, 我们继续上面的操作. 删除序列 $s_1$ 的首项 3, 对其后的 3 项每项减 1, 得到

$$s_2'=s_2:1,1,1,1,1,1,1,1.$$

再由定理 2.10, $s_1$ 是可图的当且仅当 $s_2$ 是可图的. 此时 $s_2$ 已经相当简单以至我们可以迅速地判断出, $s_2$ 是如图 2.16 所示的图 $G_2=4K_2$ 的度序列. 因此 $s_2$ 是可图的, 故 $s_1$ 和 $s$ 均为可图的. ◇

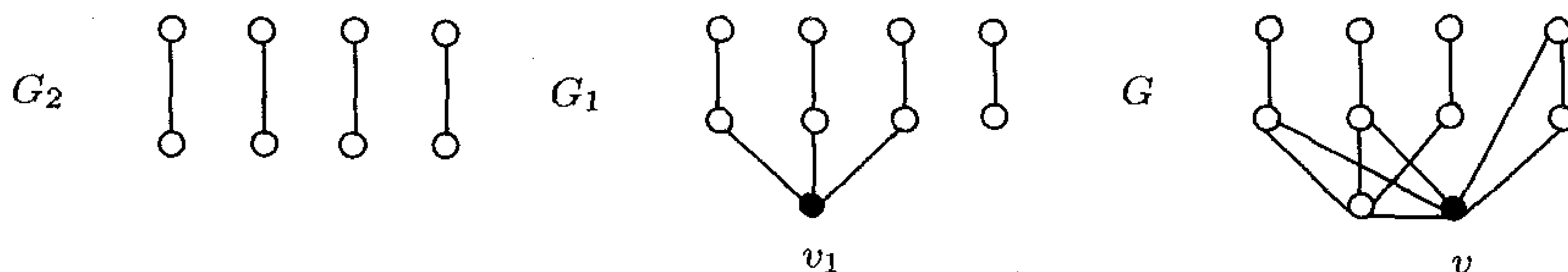



图 2.16 例 2.11 中的 $G_2$, $G_1$, 和 $G$

在例 2.11 中, 很显然 $s_2$ 是某个图的度序列 (即 $s_2$ 是图 2.16 中图 $G_2$ 的度序列), 因此我们在得到序列 $s_2$ 后停止了讨论. 回顾上面的讨论, 序列 $s_2=s_2'$ 是由 $s_1$ 删除首项 3 和对其后的 3 项每项减 1 所得到的. 从而, 如果我们在 $G_2$ 上增加一个顶点 $v_1$, 并连接 $v_1$ 到 $G_2$ 中三个度为 1 的顶点, 则可得到以 $s_1$ 为度序列的图 $G_1$, 如图 2.16 所示.

在例 2.11 中, 序列 $s_1$ 是通过对 $s_1'$ 的项重新排列而得到的递减序列. 而序列 $s_1'$ 是由序列 $s$ 通过删除首项 5, 并对其后的 5 项每项减 1 所得到的. 因此, 如果在 $G_1$ 上增加一个顶点 $v$, 并连接 $v$ 到 $G_2$ 中一个度为 3 的顶点, 两个度为 2 的顶点, 两个度为 1 的顶点, 则可以得到以 $s$ 为度序列的图 $G$. 至此我们恰好构造了一个以序列 $s$ 为度序列的图 $G$. 同时也非正式地描述了一个有效的算法, 该算法可以判断由非负整数构成的序列是否为可图的. 下面将给出另外一个例子来说明: 若一个序列不是可图的, 我们将怎样操作.

**例 2.12** 判断序列 $s: 7,7,4,3,3,3,2,1$ 是否为可图的.

**解** 删除序列 $s$ 的首项 7, 对其后的 7 项每项减 1, 我们得到

$$s_1 = s_1' : 6,3,2,2,2,1,0.$$

或许我们已经可以看出 $s_1$ 不是可图的. 若不能, 可继续上述操作. 删除序列 $s_1$ 的首项 6, 对随后的 6 项每项减 1, 得到

$$s_2 = s_2' : 2,1,1,1,0,-1.$$

由于 $s_2$ 包含负数 $-1$, 以及不可能存在负数度的顶点, 故 $s_2$ 显然不是可图的. 由定理 2.10, 序列 $s$ 和 $s_1$ 均不是可图的. ◇

我们也可以采取观察的方法证明例 2.12 中的序列 $s$ 不是可图的. 假若 $s$ 是可图的, 则存在阶为 8 的图 $G$, 且 $s$ 可作为 $G$ 的度序列. 注意到 $G$ 有两个度为 7 的顶点, 故 $G$ 中所有顶点的度至少为 2. 因此 $G$ 不可能有度为 1 的顶点.

**习题**

2.31 证明：序列 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 是可图的当且仅当 $n-d_1-1, n-d_2-1, \cdots, n-d_n-1$ 是可图的.

2.32 利用定理 2.10 判断下列序列是否为可图的. 对于可图的序列, 用类似于例 2.11 的方法, 构造出以该序列为度序列的图.

(a) $s_1: 5,3,3,3,3,2,2,2,1$

(b) $s_2: 6,3,3,3,3,2,2,2,2,1,1$

(c) $s_3: 6,5,5,4,3,2,1$

(d) $s_4: 7,5,4,4,4,3,2,1$

(e) $s_5: 7,6,5,4,4,3,2,1$

2.33 证明：对于 0 到 5 之间的任意整数 $x$, 序列 $x,1,2,3,5,5$ 均不是可图的.

2.34 存在哪些整数 $x$ $(0 \leqslant x \leqslant 7)$, 使得序列 $7,6,5,4,3,2,1,x$ 是可图的?

2.35 若序列 $x,7,7,5,5,4,3,2$ 是可图的, 则 $x$ 可能的值是多少?

2.36 令 $S=\{2,6,7\}$. 证明：存在正整数 $k$, 使得通过对 $S$ 中每一项列出 $k$ 次所得到的新序列是可图的. 试求最小的 $k$.

## 2.4 延伸阅读：图与矩阵

大家知道, 一个图 $G$ 可由两个集合定义, 即顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$; 或者由一个图表来定义. 同样, 图也可由矩阵来表述. 在处理某些问题时, 图的矩阵表述是特别有用的.

设 $G$ 是一个阶为 $n$, 边数为 $m$ 的图, 其中 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $E(G)=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$. 图 $G$ 的**邻接矩阵 (adjacency matrix)** 定义为 $n \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=$

$[a_{ij}]$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & 若\ v_iv_j \in E(G) \\ 0, & 其他情形. \end{cases}$$

图 $G$ 的**关联矩阵** (**incidence matrix**)定义为 $n \times n$ 的矩阵 $H = [b_{ij}]$, 其中

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & 若\ v_i\ 与\ e_j\ 关联 \\ 0, & 其他情形. \end{cases}$$

下面两个矩阵可用于表示图 2.17 中的图 $G$.

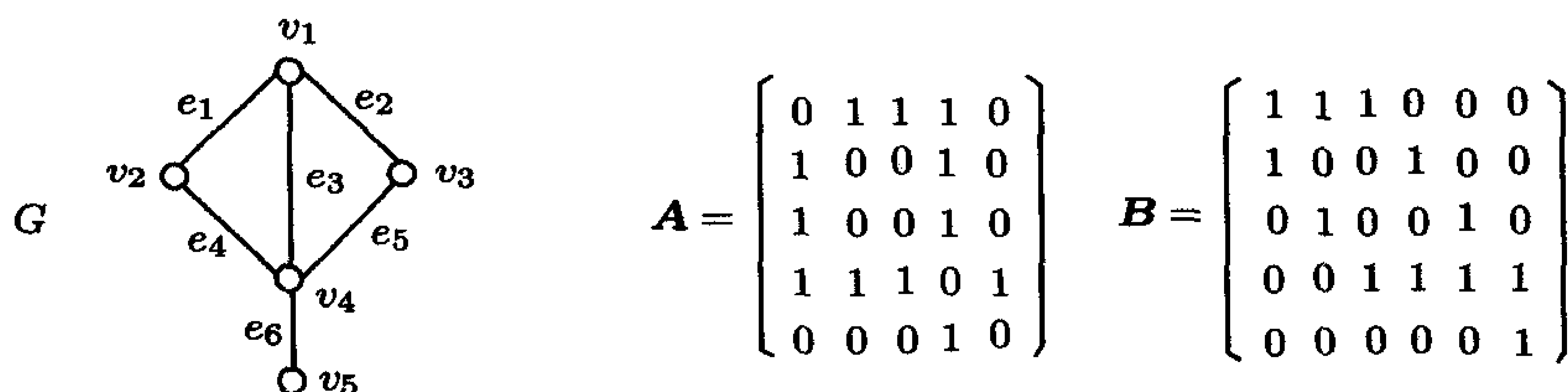



图 2.17 图的邻接矩阵和关联矩阵

关于邻接矩阵和关联矩阵, 有一些很有用的发现. 首先, 这些矩阵依赖于顶点和边的标号. 但在任何情形下, 邻接矩阵都是一个主对角元全 0 的, 对称的 $n \times n$ 矩阵; 邻接矩阵第 $i$ 行 (或第 $i$ 列) 中 1 的个数即为顶点 $v_i$ 的度. 关联矩阵的第 $i$ 行中 1 的个数也为顶点 $v_i$ 的度, 且每列中 1 的个数恰为 2, 因为与每条边关联的顶点数恰为两个.

类似于两个序列相同, 若两条 $u-v$ 链的对应项相同, 则认为这两条链是**相同的** (**equal**). 考虑图 2.17 中的图 $G$ 及其对应的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{A}$ 的平方 $\boldsymbol{A}^2$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的立方 $\boldsymbol{A}^3$ 在图 2.18 中给出. 通过观察, 我们发现 $\boldsymbol{A}^2$ 的主对角元恰好是 $G$ 的顶点的度. 该发现不仅具有一般性, 事实上, $\boldsymbol{A}$ 的任意次幂的每一元素都可以描述图 $G$ 的某种特征.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

图 2.18 邻接矩阵的幂

**定理 2.13** 设图 $G$ 的顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, 邻接矩阵为 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$. 则 $A^k$ 的第 $i$ 行, 第 $j$ 列元素 $a_{ij}^{(k)}$ 等于 $G$ 中长为 $k$ 的不同 $v_i - v_j$ 链的个数.

**证** [归纳证法] 采用归纳方法进行证明. 首先从 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^1$ 开始. 根据 $v_iv_j$ 是否为 $G$ 中的边, $\boldsymbol{A}$ 中元素 $a_{ij} = a_{ij}^{(1)}$ 为 1 或者 0. 因此, $a_{ij}^{(1)}$ 恰为 $G$ 中长为 1 的 $v_i - v_j$ 链的个数. 假设, 对正整数 $k$, $G$ 中长为 $k$ 的 $v_i - v_j$ 链的个数为 $a_{ij}^{(k)}$. 由矩阵乘法的定义, $\boldsymbol{A}^{k+1}$ 的 $(i,j)$ 元 $a_{ij}^{(k+1)}$ 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的第 $i$ 行向量和 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j$ 列向量的点 (内) 积, 即

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} a_{tj} = a_{i1}^{(k)} a_{1j} + a_{i2}^{(k)} a_{2j} + \cdots + a_{in}^{(k)} a_{nj}. \tag{2.3}$$

注意到, 每条长为 $k+1$ 的 $v_i - v_j$ 链 $W$ 是由某个长为 $k$ 的 $v_i - v_t$ 链 $W'$ (且 $v_t$ 与 $v_j$ 邻接) 开始, 再连接 $W'$ 到 $v_j$ 所得. 由归纳假设, 长为 $k$ 的 $v_i - v_t$ 链的个数为 $a_{it}^{(k)}$, 且 $v_t$ 邻接 $v_j$ 当且仅当 $a_{tj} = 1$. 因此由 (2.3) 可知, $a_{ij}^{(k+1)}$ 确实给出了 $G$ 中长为 $k+1$ 的 $v_i - v_j$ 链的个数. ■

由定理 2.13 知：$a_{ii}^{(2)} = \deg v_i$, $a_{ii}^{(3)}$ 是 $G$ 中含 $v_i$ 的三角形个数的两倍. 事实上, 知道 $A^k$ 中每个元素所表述的含义, 就可以不通过实际的矩阵乘法计算获得邻接矩阵的幂, 至少对于小阶数图的邻接矩阵的小次数幂. 例如：对于图 2.17 中的图 $G$, $\boldsymbol{A}^3$ 的元素 $a_{41}^{(3)}$ 就是 $G$ 中长为 3 的 $v_4 - v_1$ 链的个数. 不难发现, $G$ 有 6 条长度为 3 的 $v_4 - v_1$ 链, 即：

(1) $v_4, v_5, v_4, v_1$　(2) $v_4, v_2, v_4, v_1$　(3) $v_4, v_3, v_4, v_1$

(4) $v_4, v_1, v_2, v_1$　(5) $v_4, v_1, v_3, v_1$　(6) $v_4, v_1, v_4, v_1$,

因此 $a_{41}^{(3)} = 6$, 正如我们前面所见.

## 习题

2.37 对于图 2.19 所示的图 $G_1$ 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$, 不通过计算 $\boldsymbol{A}$ 或实施矩阵乘法, 确定 $\boldsymbol{A}^2$ 和 $\boldsymbol{A}^3$.

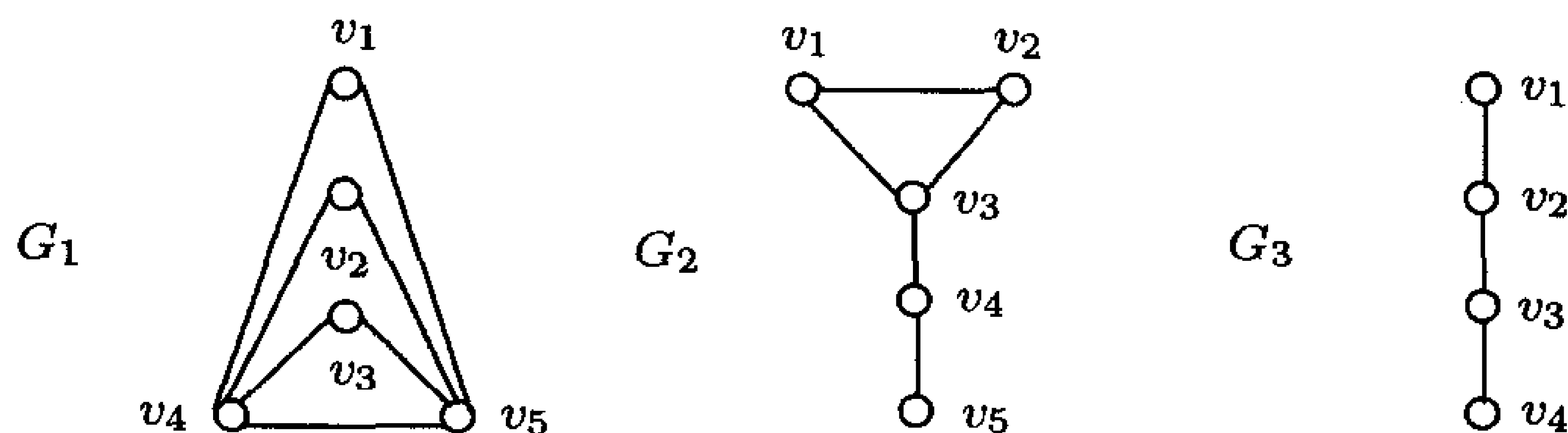



图 2.19　习题 2.37~2.39 中的图

2.38 对于图 2.19 所示的图 $G_2$ 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$, 不通过计算 $\boldsymbol{A}$ 或实施矩阵乘法, 确定 $\boldsymbol{A}^2$ 和 $\boldsymbol{A}^3$.

2.39 对于图 2.19 所示的图 $G_3$ 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$, 不通过计算 $\boldsymbol{A}$ 或实施矩阵乘法, 确定 $\boldsymbol{A}^4$.

2.40 设 $G \cong K_{r,r}$, 其两个部集为 $U = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$, $W = \{v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_{2r}\}$, 不通过矩阵乘法, 确定 $G$ 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及 $\boldsymbol{A}$ 的幂 $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$, 和 $\boldsymbol{A}^4$.

2.41 (a) 对于如图 2.17 所示的关联矩阵 $\boldsymbol{B}$, 计算 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的转置.
(b) 对于图 $G$, 其顶点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 中的 $(i,j)$ 元表达 $G$ 的什么信息?

## 2.5 专题探索: 不规则图

回顾前面定义, 若图 $G$ 任意两顶点具有相同的度, 则称 $G$ 是正则的. 我们已经在前文中讨论了正则图的存在性. 这里我们将讨论与正则图相对的一类图以及它们的存在性. 一个阶至少为 2 的图 $G$ 称为是**不规则的 (irregular)**, 若 $G$ 的任意两个顶点都有不同的度. 在深入讨论不规则图之前, 我们暂时离开一下主题.

在杂志*Mathematical Intelligencer*的第 10 卷第 4 期 (1988 年秋), 英国数学教育家和作家 David Wells 要求读者评价所列出的 24 个定理的优美之处. 两年后, 在该杂志的第 12 卷第 3 期上, 他公布了所收到的评价结果. 列在第一位的定理是

$e^{i\pi}=-1.$

并列在第二位的是:

*Euler 多面体公式*: $V-E+F=2$.

*有无穷多个素数.*

在后面我们将以不同的形式来介绍 Euler 多面体公式, 以及 David Wells 列出的另外两个定理, 其中还包括并列排在第 15 位的 6 个定理中的一个:

**宴会定理** *在任何宴会上, 总有两人在该宴会上恰有相同数量的朋友.*

所谓的宴会定理可以用图的术语来描述. 设 $G$ 为一个图, 其顶点代表出席宴会的人. 若两顶点 (人) 是朋友, 则在两点之间连接一条边. 在宴会上, 每个人的朋友数即为 $G$ 对应顶点的度. 根据宴会定理, 必定存在具有相同度的两个顶点. 这个定理可以由刚才介绍的术语重新表述.

**定理 2.14** *非平凡的不规则图是不存在的.*

**证** [反证法] 假设存在非平凡的不规则图, 即存在阶为 $n\geqslant 2$ 的图 $G$, 使得 $G$ 中顶点都有不同的度. 这些度必是 $0,1,2,\cdots,n-1$ 中的 $n$ 个整数. 因此, 对于上述的每个度, $G$ 中必有一个顶点与之对应. 设 $u$ 和 $v$ 是 $G$ 中的两个顶点, 且满足 $\deg u=0$, $\deg v=n-1$. 由于 $\deg u=0$, 故 $u$ 不与 $G$ 中的任何其他顶点邻接, 当然也包括 $v$. 另一方面, 由于 $\deg v=n-1$, 故 $v$ 与 $G$ 中的任意其他顶点都邻接, 当然包括 $u$. 这显然是矛盾的. ■

从定理 2.14 可以看出, 讨论不规则图并没有多少意义. 然而, 我们可以从其他角度考虑类似问题. 回顾定义, 非平凡图称为是**不规则的**当且仅当 $G$ 中任意两点都具有不同的度. 但若我们对度的定义作一些修改, 情形又会怎样呢?

设 $F$ 是非平凡图. 对于图 $G$ 以及 $G$ 的顶点 $v$, $v$ 在 $G$ 中**$F$ 度** (**$F$-degree**) $F\deg v$ 定义为 $G$ 中含 $v$ 的 $F$ 拷贝的个数, 其中 $F$ 拷贝是指 $G$ 中与 $F$ 有相同结构的诱导或非诱导的非标号子图. 例如, 对于图 $F \cong K_3$ 以及图 2.20 所示的图 $G$, $G$ 的每个顶点都用它的 $F$ 度标号.

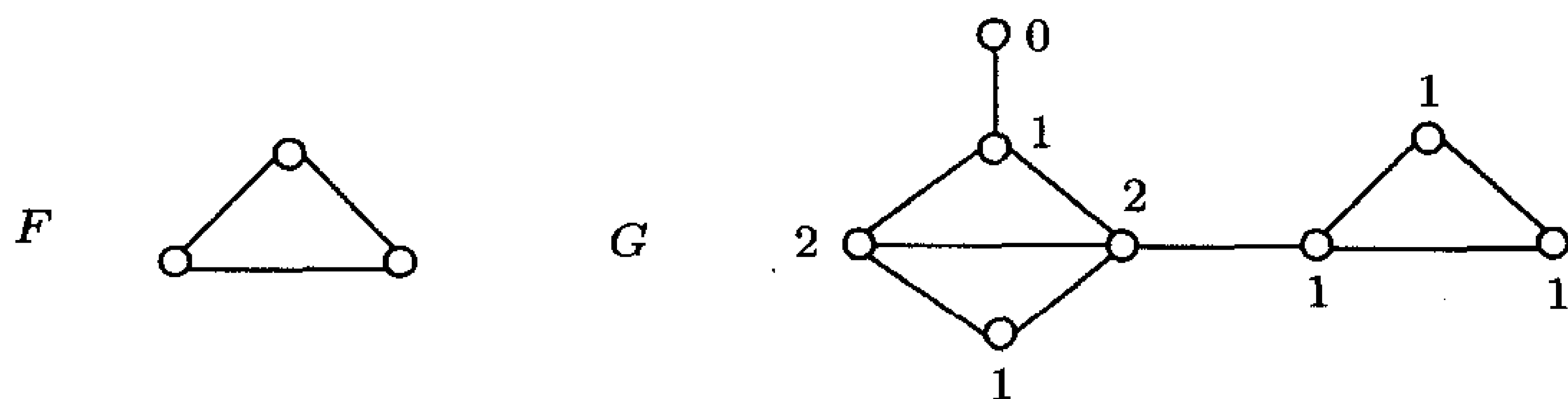



图 2.20　举例说明图 $G$ 的 $F$ 度

注意到, 若 $F \cong K_2$, 则对于 $G$ 中任意顶点 $v$, 都有 $F\deg v = \deg v$. 因此顶点的 $F$ 度是对通常度的推广. 进一步地, 下面定理是对图论第一定理的推广 (定理 2.1).

**定理 2.15**　*设 $F$ 为一个阶为 $k \geqslant 2$ 的图, $G$ 为一个图. 若 $G$ 恰包含了 $F$ 的 $m$ 个拷贝, 则*

$$\sum_{v \in V(G)} F\deg v = km. \tag{2.4}$$

**证**　[直接证法] 在计算所有顶点的 $F$ 度和时, 每个 $F$ 的拷贝被计数了 $k$ 次 (分别对应该拷贝所含的 $k$ 个顶点). 故等式 (2.4) 成立. ■

例如, 图 2.20 中图 $F \cong K_3$ 阶为 3, 图 $G$ 所有顶点的 $F$ 度和为 9, 推出了 $G$ 恰好包含 3 个三角形.

**推论 2.16**　*设 $F$ 为一个偶数阶的图, $G$ 为一个图. 则 $G$ 有偶数个 $F$ 度为奇数的顶点.*

设 $F$ 是非平凡图. 图 $G$ 称为是**$F$ 正则的** (**$F$-regular**), 若 $G$ 的任意两个顶点都有相同的 $F$ 度. 图 $G$ 称为是**$F$ 不规则的** (**$F$-irregular**), 若 $G$ 的任意两个顶点都有不同的 $F$ 度. 若 $F \cong K_2$, 则正则性与 $F$ 正则性是相同的, 不规则性与 $F$ 不规则性也是相同的. 因此对 $F \cong K_2$, 不存在非平凡的 $F$ 不规则图. 然而对 $F \cong K_3$, 并非如此. 图 $G_1$ 和 $G_2$ 的 $F$ 度如图 2.21 所示; 可以发现, 图 $G_1$ 是 $F$ 正则的但非正则的, 图 $G_2$ 则是正则的但非 $F$ 正则的.

对于 $F \cong P_3$, 图 2.22 中图 $G$ 的顶点是用它们的 $F$ 度来标号的. 6 个含顶点 $v$ 的 $P_3$ 拷贝也在图 2.22 中列出. 易见, 这是一个非平凡的 $F$ 不规则图. 图 2.22 的图 $G$ 表明了: 尽管没有 $K_2$ 不规则图, $P_3$ 不规则图依然是存在的. 事实上, 在此专题上有如下的一个猜想.

**猜想 2.17**　*设 $F$ 为一个非平凡的连通图. 则存在一个 $F$ 不规则图当且仅当 $F \not\cong K_2$.*

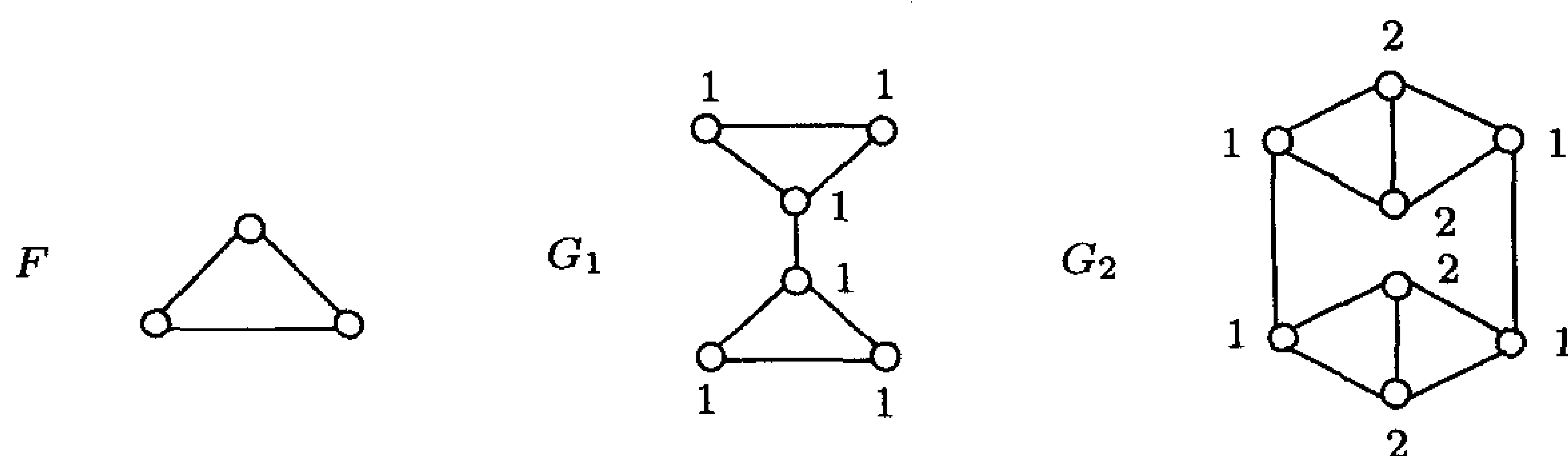



图 2.21 图 $G_1$ 和 $G_2$ 的 $F$ 度

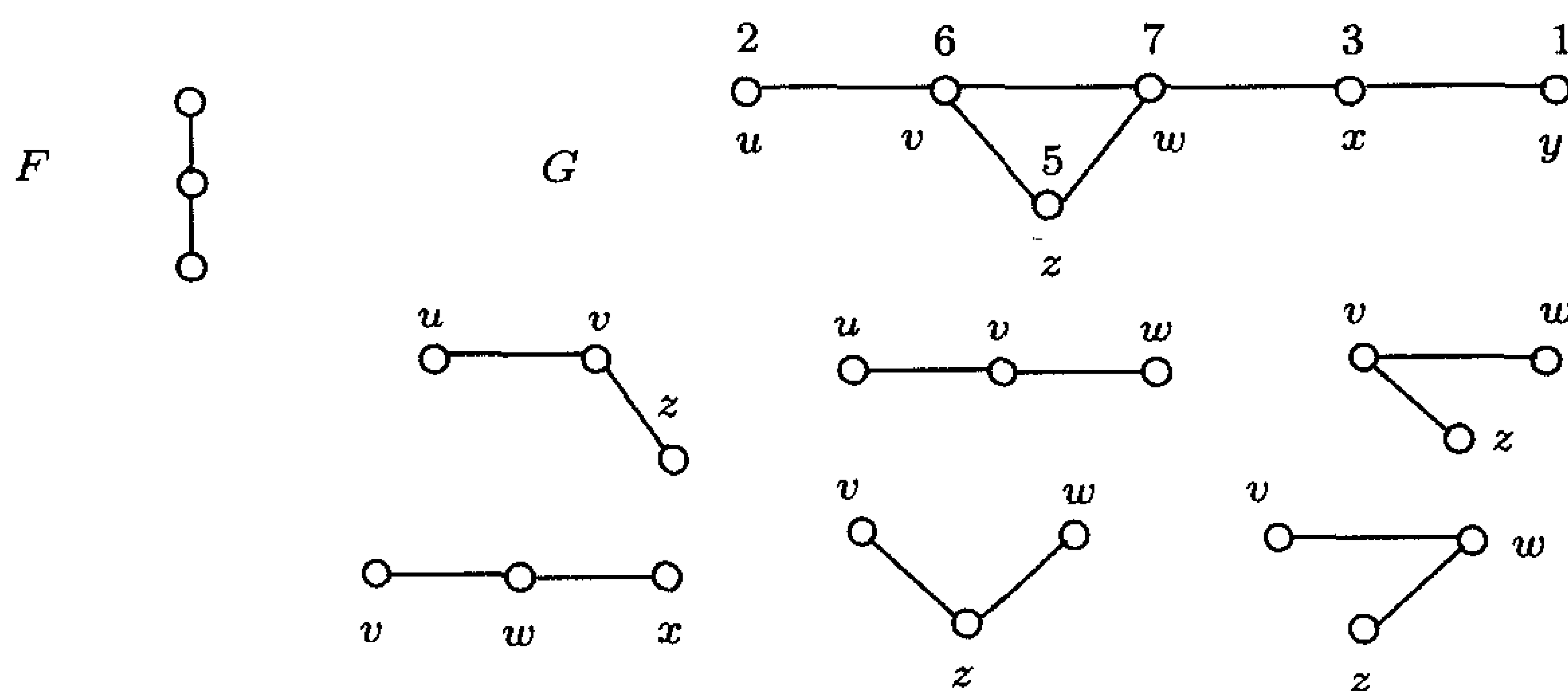



图 2.22 一个 $F$ 不规则图

再次回顾不规则图的定义：非平凡图 $G$ 称为是不规则的, 若 $G$ 中任意两点都有不同的度. 同时我们还证明了, 非平凡的不规则图是不存在的. 我们发现, 如果用新的方式重新定义度, 则不规则图是存在的. 但是如果我们仍然用标准的方式定义度, 而重新解读我们所谓的图, 譬如说考虑多重图, 情形又将会怎样呢? 图 2.23 所示的多重图 $M$(顶点已用度标号) 是不规则的, 故不规则的多重图是存在的.

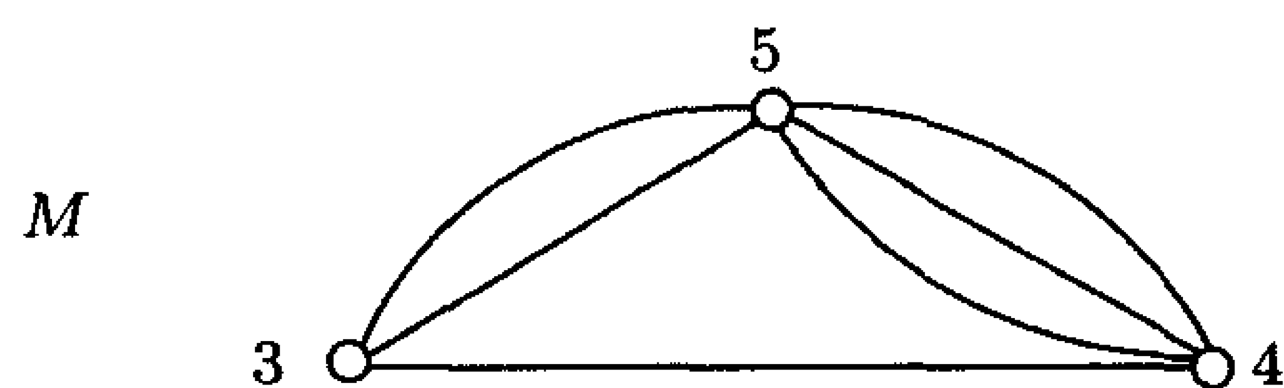



图 2.23 不规则的多重图

现在我们知道不规则的多重图是存在的, 那么对于多重图而言, 什么问题才是一个值得研究的有趣问题呢? 设 $M$ 是一个多重图. 若将 $M$ 中所有点对之间的平行边用一条边来代替, 所得到的图 $G$ 称为是 $M$ 的**基础图 (underlying graph)**. 考虑如图 2.24 所示的图 $G \cong K_3$, $G$ 是图 2.23 中多重图 $M$ 的基础图. 当然 $G$ 不是不规则的. 由图 2.23 所示的多重图 $M$ 可以看出, 用一些平行边来替换 $G$ 中的一条或几

条边，就可以构造出一个不规则图. 哪些图具有这样的性质呢? 即，哪些图是不规则多重图的基础图呢? 在试图回答这个问题之前，我们注意到可以用如图 2.24 所示的更为简单的方式来描述图 2.23 中的多重图 $M$，即将 $G$ 的每条边分配一个整数来代表多重图中连接这两顶点之间平行边的个数. 所得到的图称为是**赋权图 (weighted graph)**. 因此不规则多重图可认为是不规则的赋权图.

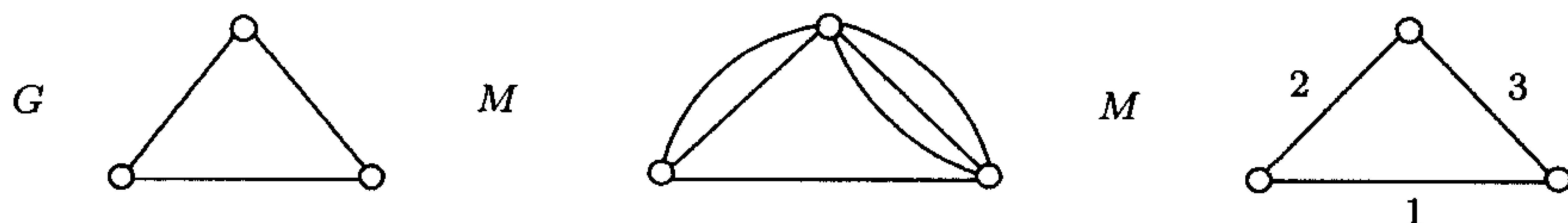



图 2.24 图和多重图

在所有非平凡连通图中，$K_2$ 是仅有的不能作为不规则赋权图的基础图的图.

**定理 2.18** 设 $G$ 是阶至少为 2 的连通图. 则 $G$ 是一个不规则多重图（赋权图）的基础图当且仅当 $G \ncong K_2$.

## 习题

2.42 对于 $F \cong K_4$，给出两个图 $H_1$ 和 $H_2$，使得 $H_1$ 是 $F$ 正则而非正则的，$H_2$ 是正则而非 $F$ 正则的.

2.43 列举连通图 $F$ 和 $G$，使得 $G$ 是正则的，且包含顶点 $u$ 和 $v$，使得 $F\deg u - F\deg v \geqslant 2$.

2.44 对于 $F \cong P_3$，列举一个阶至少为 7 的 $F$ 不规则图.

2.45 自己选取一个不连通图 $F$，并讨论 $F$ 度.

2.46 列举以下列图作为基础图的不规则多重图.

(a) $P_3$，(b) $P_4$，(c) $C_4$，(d) $C_5$，(e) $K_4$.

2.47 (a) 列举一个以 $C_4$ 为基础图的不规则多重图 (赋权图)，使得所有边的权和 $s$ 最小.

(b) 对于 (a) 中的 $s$，考虑下面问题：对于哪些大于 $s$ 的整数 $s'$，存在以 $C_4$ 为基础图的不规则赋权图，使得所有边的权和恰为 $s'$?

2.48 证明定理 2.18.

2.49 对于给定图 $G$，给 $G$ 的每条边染上红色或蓝色. 染色图 $G$ 的顶点 $v$ 的度定义为 $(a,b)$，若 $v$ 关联 $a$ 条红边和 $b$ 条蓝边. 图 $G$ 称为是 2 色不规则的，若存在 $G$ 的一种红 - 蓝染色，使得 $G$ 的任意两顶点的度都不同. 图 2.25 所示的图 $H$ 是 2 色不规则的吗? 解释原因.

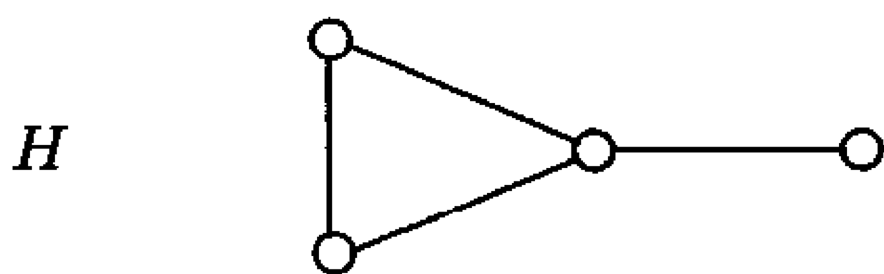



图 2.25 习题 2.49 的图

# 第3章　同　构　图

## 3.1　同构的定义

回顾前文，两个图 $G$ 和 $H$ 称为是相同的，若 $V(G) = V(H)$ 且 $E(G) = E(H)$. 我们曾经称两个图 $G$ 和 $H$ 是“同构的”，若它们有相同的结构，并记之为 $G \cong H$. 换句话说，如果 $G$ 和 $H$ 的顶点可以通过标号 (或重新标号) 而形成两个相同的图，那么 $G \cong H$. 我们现在更精确地描述这个术语.

假如要求你列举出三个阶和边数均为 5 的图，那么图 3.1 所示的三个图应该是这个问题可以接受的答案.

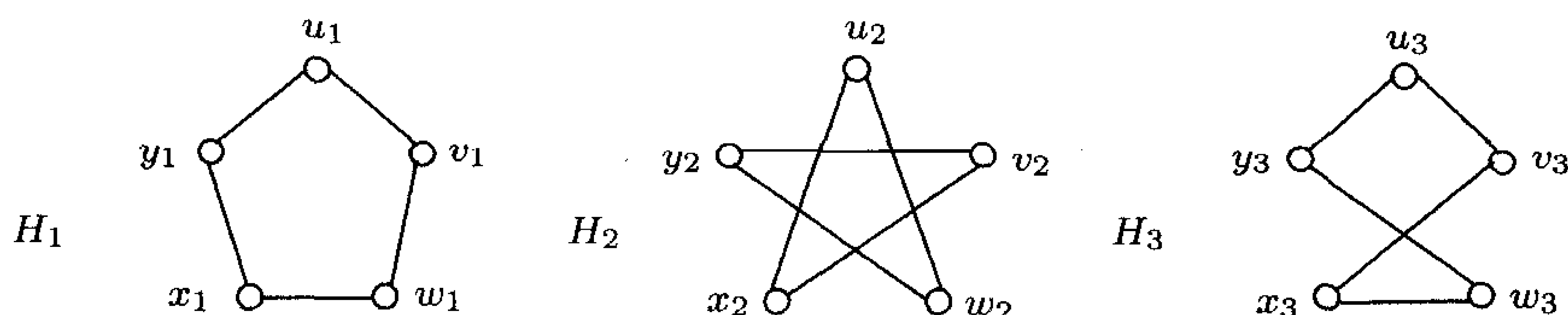



图 3.1　阶和边数均为 5 的图

通过重新放置 $H_2$ 的顶点，$H_2$ 可以被重画为图 3.2 中的 $H_2$. 类似地，$H_3$ 也可以被重画为图 3.2 中的 $H_3$.

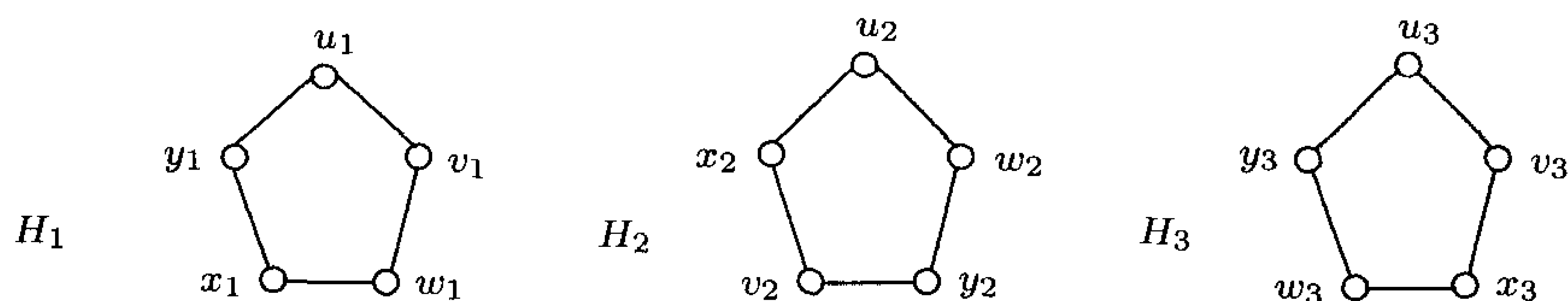



图 3.2　一个阶和边数均为 5 的图

现在我们清楚地看到，图 3.1 中的三个图的区别仅仅在于它们顶点的标号方式与图的画法，也就是说，它们有相同的结构. 因此，从某种意义上说，我们仅仅给出了一个阶和边数均为 5 的图. 换句话说，图 3.1 所示的三个图只不过是同一个图的不同表现形式；这个图就是 5 圈 $C_5$. 从图 3.2 的 $H_2$ 的重新画法中可以看出：(1) $H_2$ 的 $u_2$ 对应于 $H_1$ 的 $u_1$；(2) $H_2$ 的 $w_2$ 对应于 $H_1$ 的 $v_1$；(3) $H_2$ 的 $y_2$ 对应于 $H_1$ 的 $w_1$；(4) $H_2$ 的 $v_2$ 对应于 $H_1$ 的 $x_1$；以及 (5) $H_2$ 的 $x_2$ 对应于 $H_1$ 的 $y_1$. 当然，$H_2$ 的

顶点与 $H_1$ 的顶点的对应方式并不是唯一的. 图 3.3 所示的 $H_2$ 的另外两种画法说明了, $H_1$ 的顶点与 $H_2$ 的顶点之间存在着其他的对应方式. 事实上, 这样的对应方式还有几种.




图 3.3 图 $H_2$ 的其他画法

如上所述, 若两个图仅仅区别在画法与 (或) 顶点的标号方式上, 则称它们为同构的. 正式地说, 两个 (标号) 图 $G_1$ 和 $G_2$ 称为是**同构的 (isomorphic)** (或者, 有相同结构), 如果存在一个从 $V(G_1)$ 到 $V(G_2)$ 的一一对应 $\phi$, 使得: $u_1v_1 \in E(G_1)$ 当且仅当 $\phi(u_1)\phi(v_1) \in E(G_2)$. 此时, $\phi$ 称为是从 $G_1$ 到 $G_2$ 的一个**同构 (isomorphism)**. 如果 $G_1$ 和 $G_2$ 是同构图, 则称 $G_1$**同构于 (is isomorphic to)** $G_2$, 记为 $G_1 \cong G_2$. 对于非标号图 $G_1$ 和 $G_2$, 如果对它们的顶点进行 (任意) 标号所得的标号图是同构的, 则称 $G_1$ 和 $G_2$ 是同构的. 如果 $G_1$ 和 $G_2$ 不是同构的, 则称它们为**非同构图 (nonisomorphic graphs)**, 记为 $G \ncong H$.

从图 3.2 中 $H_2$ 的画法中可以看出, 如下定义的映射 $\phi: V(H_1) \to V(H_2)$,

$$\phi(u_1) = u_2,\ \phi(v_1) = w_2,\ \phi(w_1) = y_2,\ \phi(x_1) = v_2,\ \phi(y_1) = x_2,$$

是一个同构. 因此, $H_1 \cong H_2$. 直观上, 两个图是同构的, 如果可以将其中一个图重画使得两个图的图表完全一样. 用这种非正式的语言解释同构往往是很实用的, 但它并不对所有情形都有令人满意的解释, 因此必须要有正式的定义. 本书我们把两个同构图视为是 "相同的", 两个非同构图视为是 "不同的". 从这个角度看: 仅有 1 个 1 阶图, 2 个 2 阶图, 4 个 3 阶图. 有 11 个 4 阶 (非同构) 图, 如图 3.4 所示.

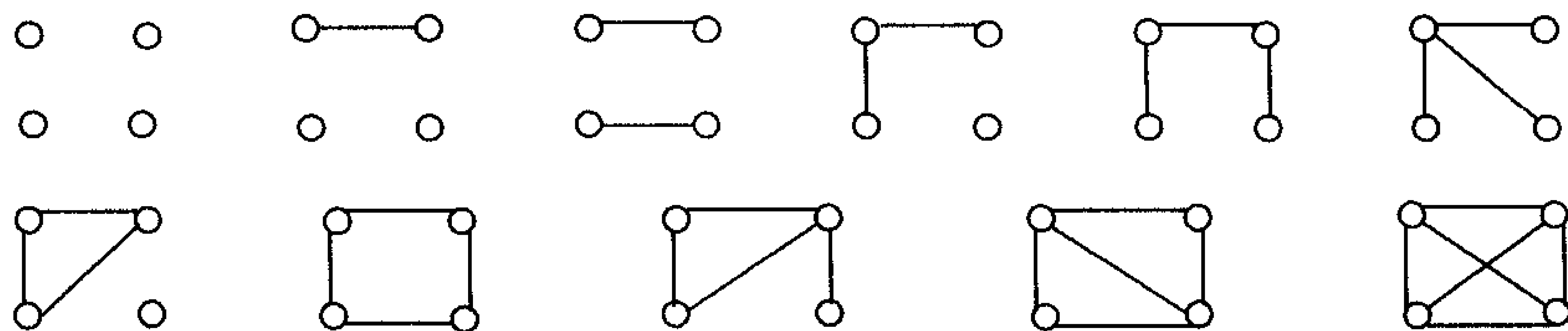


图 3.4 11 个阶为 4 的图

我们进一步讨论同构的定义. 首先, 如果两个图 $G_1$ 和 $G_2$ 是同构的, 则从 $G_1$ 的顶点集到 $G_2$ 的顶点集必须存在一个一一对应. 这意味着, $G_1$ 的顶点和 $G_2$ 的顶

点必能够完全配对. 因此有 $|V(G_1)| = |V(G_2)|$, 所以, $G_1$ 和 $G_2$ 有相同的阶. 因此, 讨论两个图是否相同, 我们先考虑它们的阶是否相同.

下面继续分析同构图的定义. 我们发现, 不仅需要从顶点集 $V(G_1)$ 到顶点集 $V(G_2)$ 的一个一一对应, 而且还要满足: $G_1$ 中的顶点 $u_1$ 和 $v_1$ 邻接当且仅当它们的对应顶点 $\phi(u_1)$ 和 $\phi(u_2)$ 在 $G_2$ 中邻接. 故 $G_1$ 中邻接的顶点被映射到 $G_2$ 中邻接的顶点, 而 $G_1$ 中不邻接的顶点被映射到 $G_2$ 中不邻接的顶点. 因此, 若 $G_1$ 和 $G_2$ 是同构的, 则 $G_1$ 和 $G_2$ 必有相同的边数.

因此, 若两个图是同构的, 则它们必须有相同的阶和相同的边数. 换句话说, 若两个图有不同的阶或不同的边数, 则它们一定不是同构的. 例如, 即使图 3.5 的 $F'$ 和 $F''$ 的边数均为 6, 它们也不是同构的, 因为它们的阶不同. 同样地, 即使图 3.5 的 $H'$ 和 $H''$ 的阶均为 6, 但它们也不是同构的, 因为它们的边数不同.

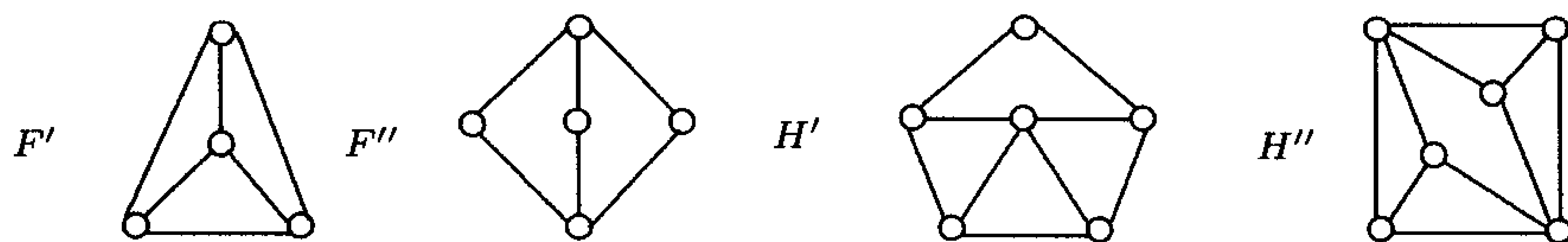



图 3.5 非同构图

另一方面, 即使两个图有相同的阶和相同的边数, 这也不能确保它们是同构的. 例如, 图 3.6 所示的 $G_1$ 和 $G_2$ 的阶和边数均为 6, 然而它们不是同构的. 为解释其原因, 我们假设它们是同构的, 则存在一个同构 $\phi: V(G_1) \to V(G_2)$. 因此, 在 $G_1$ 中存在三个顶点, 它们分别被映射到 $G_2$ 中的 $u_2, v_2, z_2$. 因为 $u_2, v_2$ 和 $z_2$ 彼此邻接, 构成一个三角形, 所以, $G_1$ 中的这三个顶点也应该构成一个三角形. 然而, $G_1$ 不含三角形, 导致矛盾.

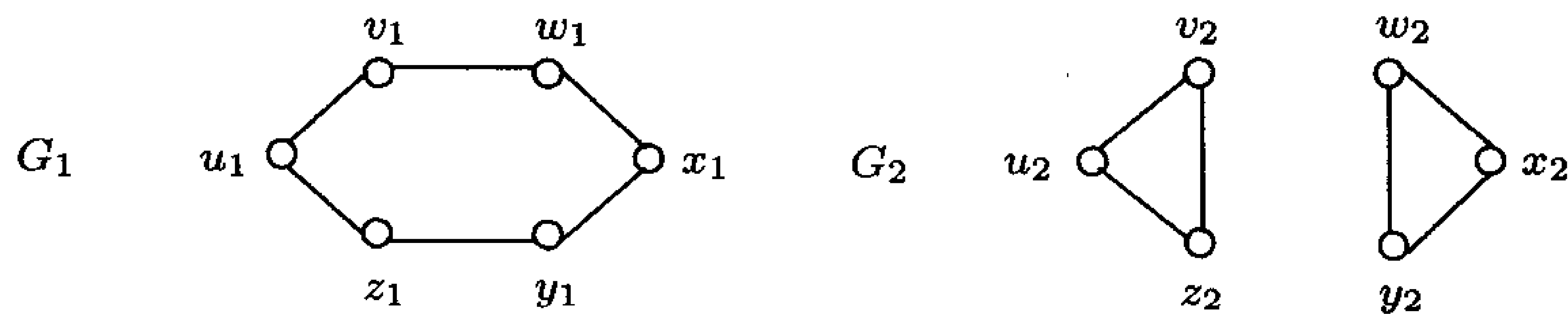



图 3.6 两个非同构图

我们重新叙述一下同构的定义: 两个图 $G_1$ 和 $G_2$ 是同构的, 如果存在从 $V(G_1)$ 到 $V(G_2)$ 的一个一一对应 $\phi$ 使得 $G_1$ 中的每对邻接顶点映射到 $G_2$ 中邻接的顶点, 且 $G_1$ 中的每对不邻接顶点映射到 $G_2$ 中不邻接的顶点. 从前文我们知道, 具有这些性质的映射 $\phi$ 是一个同构. 注意到, $V(\overline{G}_1) = V(G_1)$, $V(\overline{G}_2) = V(G_2)$, 所以同一映射 $\phi: V(\overline{G}_1) \to V(\overline{G}_2)$ 也把 $\overline{G}_1$ 中邻接的顶点映射到 $\overline{G}_2$ 中邻接的顶点, $\overline{G}_1$ 中不

邻接的顶点映射到 $\overline{G}_2$ 中不邻接的顶点. 由此我们得到如下定理.

**定理 3.1** 两个图 $G_1$ 和 $G_2$ 是同构的当且仅当它们的补图 $\overline{G}_1$ 和 $\overline{G}_2$ 是同构的.

我们来看图 3.7 所示的两个图 $H_1$ 和 $H_2$. 首先, 两个图的阶均为 6, 边数均为 9, 所以 $H_1$ 和 $H_2$ 可能是同构的, 但无法确信. 然而, 因为 $\overline{H}_1 = G_1$, $\overline{H}_2 = G_2$ (其中 $G_1$ 和 $G_2$ 为图 3.6 中的图), 并且图 $G_1$ 和 $G_2$ 不是同构的, 所以根据定理 3.1, $H_1$ 和 $H_2$ 不是同构的. 事实上, 我们不需要借助定理 3.1 也可判断出 $H_1$ 和 $H_2$ 不是同构的. 因为, 假如 $H_1$ 和 $H_2$ 是同构的, 则存在一个同构 $\phi: V(H_1) \to V(H_2)$. 在 $H_1$ 中, 顶点 $v_1, x_1, z_1$ 是彼此邻接的, 形成一个三角形, 所以在 $H_2$ 中, 顶点 $\phi(v_1), \phi(x_1)$, 和 $\phi(z_1)$ 应该也形成一个三角形. 但是, $H_2$ 不含三角形, 从而产生一个矛盾.

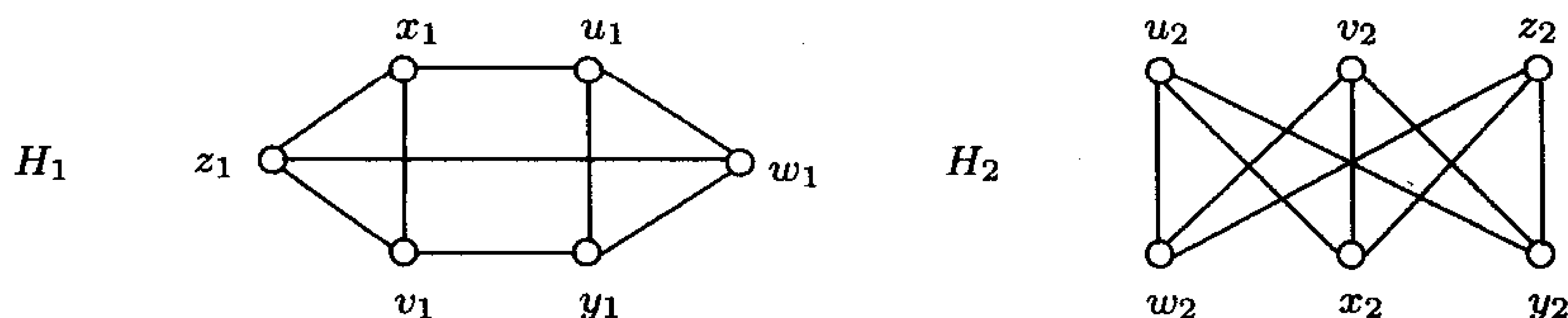



图 3.7 图 $H_1$ 和 $H_2$

事实上, 一个图和它的补图可能是彼此同构的. 如果有 $G \cong \overline{G}$, 则我们称图 $G$ 是**自补的 (self-complementary)**. 当然, 这种情形只有当 $G$ 和 $\overline{G}$ 有相同边数时才可能发生, 显然边数就是 $\frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$. 为了使 $\frac{n(n-1)}{4}$ 为一个整数, 则必须 $4 \mid n$, 或者 $4 \mid (n-1)$, 即 $n \equiv 0 \pmod 4$ 或者 $n \equiv 1 \pmod 4$. 图 3.8 列出了四个自补图.

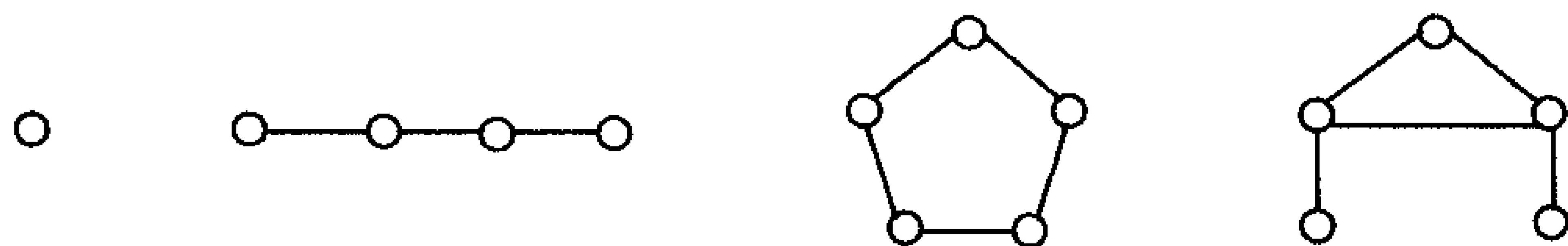


图 3.8 自补图

两个同构图不仅需要它们有相同的阶和相同的边数, 而且要求它们对应的顶点也应该有相同的度.

**定理 3.2** 如果 $G$ 和 $H$ 是同构图, 则它们对应的顶点有相同的度.

**证** [直接证法] 因为 $G$ 和 $H$ 是同构的, 所以存在一个同构 $\phi: V(G) \to V(H)$. 设 $u$ 是 $G$ 中的一个顶点且 $\phi(u) = v$, 其中 $v$ 是 $H$ 中的顶点. 我们来证明 $H$ 中 $v$ 的度等于 $G$ 中 $u$ 的度. 首先假设 $\deg_G u = 0$, 则 $G$ 没有与 $u$ 邻接的顶点. 假设 $y$ 是 $H$ 中除 $v$ 之外的任一顶点, 则 $G$ 中存在一个顶点 $x$ 使得 $\phi(x) = y$. 因为 $x$ 和 $u$ 是 $G$ 中不邻接的顶点, 故 $y$ 和 $v$ 是 $H$ 中不邻接的顶点. 所以, $H$ 不含与 $v$ 邻接的顶点,

即 $\deg_H v = 0$.

下面假设 $\deg_G u = k \geqslant 1$. 设 $N(u) = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 是 $G$ 中与顶点 $u$ 邻接的顶点集合, 其中 $\phi(x_i) = y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. 因为 $u$ 和 $x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 是邻接的, 所以 $v$ 和 $y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 也是邻接的. 若 $y$ 是 $H$ 中一个顶点, 满足 $y \notin \{v\} \cup \{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$, 则在 $G$ 中存在顶点 $x$ 使得 $\phi(x) = y$, 其中 $x \notin \{u\} \cup N(u)$. 因为 $x$ 和 $u$ 在 $G$ 中是不邻接的, 所以 $y$ 和 $v$ 在 $H$ 中是不邻接的. 因此 $\deg_H v = k$. ■

定理 3.2 不仅告诉我们, 两个同构图 $G$ 和 $H$ 必有相同的度序列, 而且从这个定理的证明中我们得到: 若 $\phi$ 是 $V(G)$ 到 $V(H)$ 的一个同构, $u$ 是 $G$ 的顶点, 则 $\deg_G u = \deg_H \phi(u)$, 也就是说, 在一个同构下, 一个顶点仅能被映射到具有相同度的顶点.

通过上面的讨论我们已经知道: 如果 $G$ 和 $H$ 是同构的, 那么它们的阶相同, 它们的边数相同, 并且它们对应顶点的度也相同. 另一方面, 如果它们对应顶点的度相同, 则它们的阶一定相同, 它们的边数也一定相同. 正如具有相同的阶和相同的边数只是两个图同构的必要条件一样, 具有相同的度序列也只是两个图同构的一个必要条件, 而非充分条件. 例如, 图 3.6 所示的两个非同构图 $G_1$ 和 $G_2$ 的度序列均为 2, 2, 2, 2, 2, 2, 图 3.7 所示的两个非同构图的度序列均为 3, 3, 3, 3, 3, 3.

因此, 我们工作所受到的挑战在于: 当两个图有相同的度序列时, 如何判断它们是否同构. 我们看几个例子.

**例 3.3** 判断图 3.9 所示的图 $F_1$ 和 $F_2$ 是否同构.

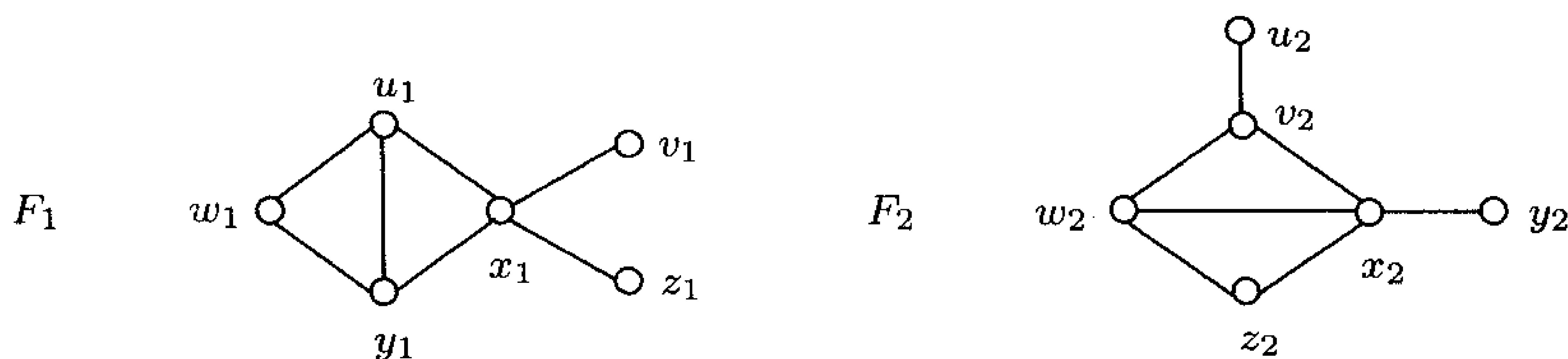



图 3.9 例 3.3 的两个图

**解** 因为 $F_1$ 和 $F_2$ 的度序列均为 4, 3, 3, 2, 1, 1, 它们可能是同构的. 事实上, 它们并不同构. 假如 $F_1 \cong F_2$, 则存在一个同构 $\phi: V(F_1) \to V(F_2)$. 顶点 $x_1$ 是 $F_1$ 中唯一的度为 4 的顶点. 因此, $\phi(x_1)$ 在 $F_2$ 中度为 4. 由于顶点 $x_2$ 是 $F_2$ 中唯一的度为 4 的顶点, 因此 $\phi(x_1) = x_2$. 因为在 $F_1$ 中 $v_1$ 和 $z_1$ 均与 $x_1$ 邻接, 所以在 $F_2$ 中 $\phi(v_1)$ 和 $\phi(z_1)$ 均与 $\phi(x_1) = x_2$ 邻接. 又因为 $\deg_{F_1} v_1 = \deg_{F_1} z_1 = 1$, 所以也有 $\deg_{F_2} \phi(v_1) = \deg_{F_2} \phi(z_1) = 1$. 这就是说, 在 $F_2$ 中 $x_2$ 与两个端点邻接. 然而, 事实并非如此, 从而导致矛盾. ◇

细心的读者也许已经发现, 上述关于图 3.9 中 $F_1$ 和 $F_2$ 不是同构的讨论可以简

化. 在 $F_1$ 中, 度为 4 的顶点邻接于两个端点, 而 $F_2$ 中度为 4 的顶点并非如此. 因此, $F_1$ 和 $F_2$ 不是同构的.

设 $G_1$ 和 $G_2$ 为两个图. 我们可以假设 $G_1$ 和 $G_2$ 有相同的度序列, 否则, 立即可得 $G_1 \ncong G_2$. 如果 $G_1$ 具有某些不依赖于 $G_1$ 的画法或顶点标号方式的性质, 而 $G_2$ 却不具有这个性质, 则 $G_1 \ncong G_2$. 例如, 若 $G_1$ 含有两个度为 3 的顶点且这两个顶点分别与一个度为 2 的顶点邻接, 而 $G_2$ 没有两个这样的顶点, 则 $G_1 \ncong G_2$; 若 $G_1$ 含有两个三角形且这两个三角形有一个公共顶点, 而 $G_2$ 没有这个性质, 则 $G_1 \ncong G_2$; 若 $G_1$ 含有 8 个三角形而 $G_2$ 仅含有 7 个三角形, 则 $G_1 \ncong G_2$. 对于最后的一个例子, 我们需要注解一下. 如果我们在解释两个图为什么不同构时, 给出的是类似于一个图含有 8 个三角形而另一个图仅含有 7 个三角形之类的理由, 这是不能使人信服的, 因为确定一个图含多少个三角形并不是容易的事, 特别当这个图阶和边数都比较大时. 这就有必要去寻找一个比较容易判定的性质 (假设这两个图的确是不同构的).

**例 3.4** 判断图 3.10 所示的图 $H_1$ 和 $H_2$ 是否同构.

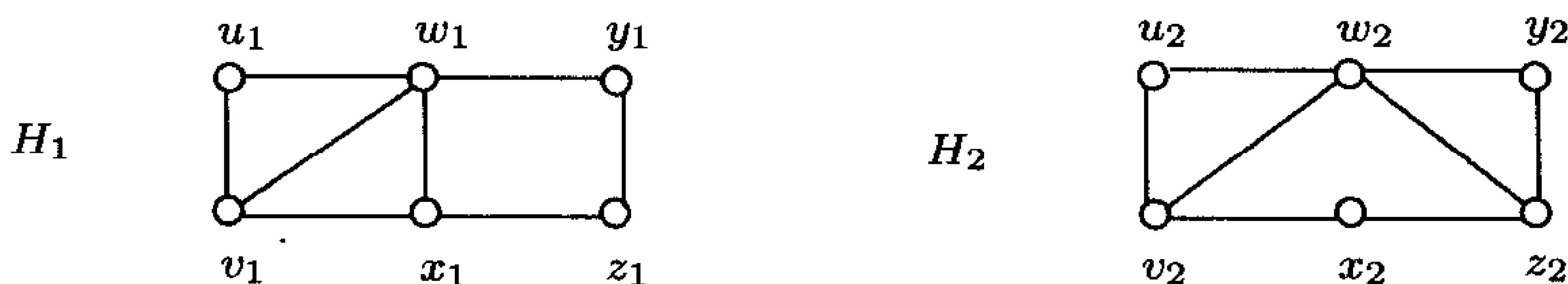



图 3.10 例 3.4 的两个图

**解** 首先, 注意到 $H_1$ 和 $H_2$ 有相同的度序列 $4,3,3,2,2,2$. 因此, 进一步观察是有必要的. 因为这两个图 "看起来" 不是同构的, 所以我们要寻找它们结构上的差异. 注意到 $H_1$ 含有两个邻接的度为 2 的顶点 (即 $y_1$ 和 $z_1$), 然而, $H_2$ 不含有这样的顶点. 因此, $H_1 \ncong H_2$. ◇

我们注意到, 如果 $G$ 和 $H$ 是两个同构图, $\phi: V(G) \to V(H)$ 是一个同构, 并且 $G$ 中顶点 $u$ 被 $\phi$ 映射到 $H$ 中顶点 $v$, 则 $G$ 中顶点 $u$ 所具有的不依赖于图的画法以及顶点标号方式的任何性质一定为 $H$ 中的顶点 $v$ 所具有. 更一般地, $G$ 所具有的任何结构性质也应该被 $H$ 所具有. 例如:

(1) 如果 $G$ 含有一个 $k$ 圈, 则 $H$ 也含有一个 $k$ 圈, 其中, $k \geqslant 3$ 为某一整数;

(2) 如果 $G$ 含有一个长为 $k$ 的 $u-v$ 路, 则 $H$ 也含有一个长为 $k$ 的 $\phi(u)-\phi(v)$ 路.

综上所述, 我们有下面的定理.

**定理 3.5** 设 $G$ 和 $H$ 为同构图, 则

(a) $G$ 是二部的当且仅当 $H$ 是二部的,

(b) $G$ 是连通的当且仅当 $H$ 是连通的.

正如所期望的, 两个有向图 $D_1$ 和 $D_2$ 称为是**同构的** (**isomorphic**), 如果存在一个一一对应 $\phi: V(D_1) \to V(D_2)$ 使得 $(u_1, v_1) \in E(D_1)$ 当且仅当 $(\phi(u_1), \phi(v_1)) \in E(D_2)$. 在第 7 章我们将详细讨论有向图.

## 习题

3.1　列举三个阶和边数均为 5 的非同构图.

3.2　列举三个彼此不同构的图, 要求它们有相同阶, 相同边数以及相同度序列.

3.3　对于图 3.11(a) 和 3.11(b) 所示的每一对图 $G_1$ 和 $G_2$, 判断它们是否同构, 并给予解释.

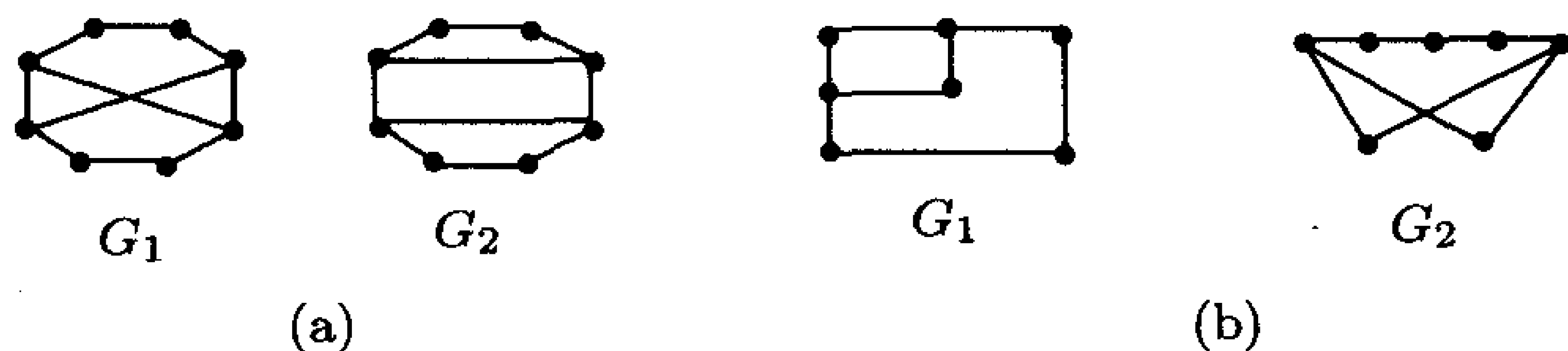



图 3.11　习题 3.3 的图

3.4　图 3.12 中的哪一对图是同构的, 并给予解释.

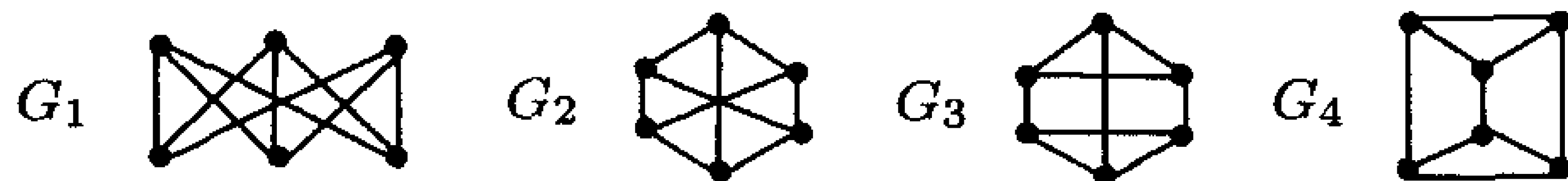



图 3.12　习题 3.4 的图

3.5　设 $G_1$ 和 $G_2$ 为两个图, 且 $V(G_1) = \{u_1, v_1, w_1, x_1, y_1, z_1\}$, $V(G_2) = \{u_2, v_2, w_2, x_2, y_2, z_2\}$. 如果 $v_1$ 的度为 3, 且 $v_1$ 与一个度为 2 的顶点邻接, 而 $v_2$ 的度为 3, 但 $v_2$ 不与度为 2 的顶点邻接, 能否由此得出结论 $G_1 \ncong G_2$? 并给予解释.

3.6　设 $G_1$ 和 $G_2$ 为两个有相同度序列的图. 如果 $G_1$ 有一个度为 2 的顶点, 并且此顶点与一个度为 3 和一个度为 4 的顶点邻接, 然而, $G_2$ 有一个度为 2 的顶点, 但此顶点与两个度为 3 的顶点邻接, 能否由此得出结论 $G_1 \ncong G_2$? 并给予解释.

3.7　下面的解答是否正确?

**问题**: 判断图 3.13 所示的图 $G_1$ 和 $G_2$ 是否同构.




图 3.13　习题 3.7 的图

**解**　图 $G_1$ 含有一个 5 圈 $C$. $C$ 的任意两个顶点可以由 $C$ 上的一个长度为 2 的路连接, 然而, $G_2$ 中却不含这样的 5 圈. 因此, $G_1 \ncong G_2$. ◇

3.8 图 3.14 中的哪一对图是同构的? 并给予解释.

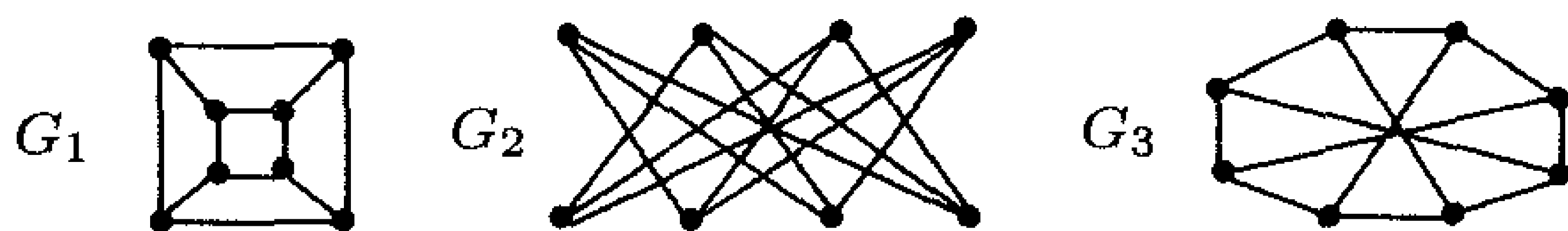



图 3.14 习题 3.8 的图

3.9 判断图 3.15 所示的图 $G_1$ 和 $G_2$ 是否同构, 并给予解释.




图 3.15 习题 3.9 的两个图

3.10 是否存在不连通的自补图?

3.11 设 $G$ 是一个阶为 $n = 4k$ 的自补图, 其中 $k \geqslant 1$. 设 $U = \{v : \deg v \leqslant n/2\}$ 以及 $W = \{v : \deg v \geqslant n/2\}$. 证明：如果 $|U| = |W|$, 那么 $G$ 中不含顶点 $v$, 使得 $\deg v = n/2$.

3.12 设 $G$ 和 $H$ 为两个顶点集不相交的自补图, 其中 $H$ 有偶数阶 $n$. 设 $F$ 是由 $G \cup H$ 通过连接 $G$ 的每一个顶点和 $H$ 中每一个度小于 $n/2$ 的顶点所得到的图. 证明：$F$ 是一个自补图.

3.13 假设存在两个连通图 $G$ 和 $H$ 以及一个从 $V(G)$ 到 $V(H)$ 上的一一映射 $\phi$, 使得对任意 $G$ 中两点顶点 $u$ 和 $v$ 均有 $d_G(u,v) = d_H(\phi(u),\phi(v))$. 证明或反驳：$G$ 和 $H$ 是同构的.

3.14 设 $G$ 和 $H$ 为两个 $n$ 阶连通图, 其中 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 如果存在一个一一映射 $\phi : V(G) \to V(H)$, 使得对任意 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, 均有 $d_G(v_i, v_{i+1}) = d_H(\phi(v_i), \phi(v_{i+1}))$. 证明或反驳：$G \cong H$.

3.15 设 $G$ 和 $H$ 为两个连通图. 如果存在一个一一映射 $\phi : V(G) \to V(H)$, 使得对两个不同顶点 $u, v \in V(G)$ 均有 $d_G(u,v) \neq d_H(\phi(u),\phi(v))$. 证明或反驳：$G \ncong H$.

## 3.2 同构关系

我们回顾一下两个图 $G_1$ 和 $G_2$ 同构的定义, 即存在一个同构 $\phi : V(G_1) \to V(G_2)$. 易知, 同构在任一个图的集合中建立了一种关系. 换句话说, 如果图 $G_1$ 同构于图 $G_2$, 则称 $G_1$ 与 $G_2$ 存在关系. 这种关系是一个等价关系, 也就是说, 同构是自反的 (任何一个图与它本身是同构的), 同构是对称的 (如果 $G_1$ 同构于 $G_2$, 则 $G_2$

同构于 $G_1$), 并且同构是传递的 (如果 $G_1$ 同构于 $G_2$ 且 $G_2$ 同构于 $G_3$, 则 $G_1$ 同构于 $G_3$).

同构是等价关系的证明依赖于双射 (即一一的和映上的映射) 的三个基本性质: (1) 每一个恒等映射是双射; (2) 每一个双射有一个逆映射, 并且该逆映射也是一个双射; (3) 两个双射的复合是一个双射.(关于映射的术语和相关结论见附录 2.)

**定理 3.6** 在图的集合上, 同构是一种等价关系.

**证** [直接证法] 首先, 我们证明同构是自反的, 也就是说, 每一个图与它本身是同构的. 设 $G$ 为一个图, 对 $G$ 的每个顶点 $v$, 考虑由 $\epsilon(v)=v$ 定义的恒等映射 $\epsilon: V(G) \to V(G)$. 显然 $\epsilon$ 是双射. 当然, $G$ 中的两个顶点 $u$ 和 $v$ 邻接当且仅当 $\epsilon(u)=u$ 和 $\epsilon(v)=v$ 邻接. 因此, $\epsilon$ 是一个同构, 所以 $G$ 同构于 $G$.

接下来, 我们来证明同构是对称的. 设 $G_1$ 和 $G_2$ 为两个图, 且 $G_1$ 同构于 $G_2$. 因此, 存在一个同构 $\phi: V(G_1) \to V(G_2)$. 因为 $\phi$ 是一个双射, 所以它的逆 $\phi^{-1}: V(G_2) \to V(G_1)$ 存在并且也是一个双射. 设 $u_2, v_2$ 为 $G_2$ 的两个顶点, 且 $\phi^{-1}(u_2) = u_1$, $\phi^{-1}(v_2) = v_1$. 因此 $\phi(u_1) = u_2$, $\phi(v_1) = v_2$. 如果 $u_2$ 和 $v_2$ 在 $G_2$ 中邻接, 因为 $\phi$ 是一个同构, 则 $u_1$ 和 $v_1$ 在 $G_1$ 中也邻接. 另一方面, 如果 $u_2$ 和 $v_2$ 在 $G_2$ 中不邻接, 则 $u_1$ 和 $v_1$ 在 $G_1$ 中也不邻接. 故 $u_2$ 和 $v_2$ 在 $G_2$ 中邻接当且仅当 $\phi^{-1}(u_2)$ 和 $\phi^{-1}(v_2)$ 在 $G_1$ 中邻接. 从而, $\phi^{-1}$ 是一个同构, 所以 $G_2$ 同构于 $G_1$.

最后, 我们证明同构是传递的. 对于图 $G_1, G_2$, 和 $G_3$, 假设 $G_1$ 同构于 $G_2$ 以及 $G_2$ 同构于 $G_3$. 因此, 存在同构 $\alpha: V(G_1) \to V(G_2)$ 和 $\beta: V(G_2) \to V(G_3)$. 考虑复合映射 $\beta \circ \alpha: V(G_1) \to V(G_3)$. 因为 $\alpha$ 和 $\beta$ 是双射, 所以 $\beta \circ \alpha$ 也是一个双射. 因为 $\alpha$ 是一个同构, 所以 $u_1$ 和 $v_1$ 在 $G_1$ 中邻接当且仅当 $\alpha(u_1)$ 和 $\alpha(v_1)$ 在 $G_2$ 中邻接. 又因为 $\beta$ 是一个同构, 所以 $\alpha(u_1)$ 和 $\alpha(v_1)$ 在 $G_2$ 中邻接当且仅当 $\beta(\alpha(u_1))$ 和 $\beta(\alpha(v_1))$ 在 $G_3$ 中邻接. 因此, $u_1$ 和 $v_1$ 在 $G_1$ 中邻接当且仅当 $(\beta \circ \alpha)(u_1)$ 和 $(\beta \circ \alpha)(v_1)$ 在 $G_3$ 中邻接, 所以 $\beta \circ \alpha$ 是一个同构. 因此, $G_1$ 同构于 $G_3$. ■

由于同构是作用在图集合上的一个等价关系, 我们可以把图集合划分成一些等价类 (子集) —— 称之为**同构类 (isomorphism class)**. 属于同一个同构类的任意两个图是同构的, 属于不同同构类的任意两个图是不同构的.

假如要求我们给出所有度序列为 $s$: 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 的图. 毫无疑问, 我们所寻找的是那些非同构的图. 图 3.16 给出了这个问题的答案.(共有 4 个这样的图!)

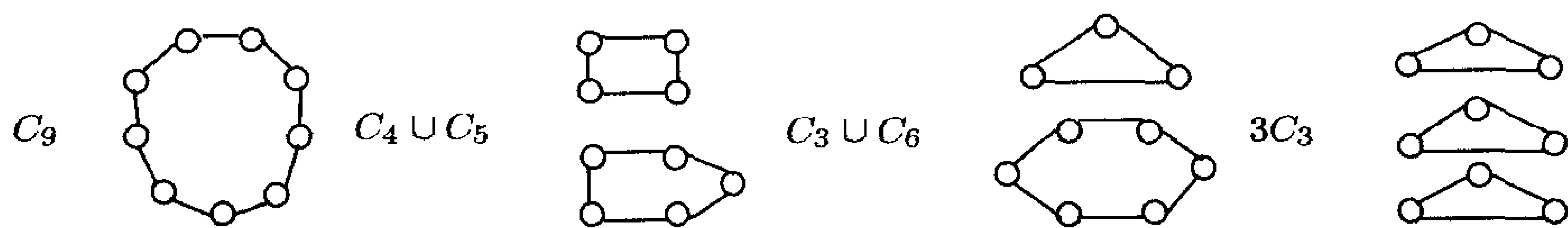



图 3.16 度序列为 $s: 2,2,2,2,2,2,2,2,2$ 的所有图

最后，我们考察图 3.17 所示的图 $H$ 和 $G$. 问：$H$ 是 $G$ 的一个子图吗？乍一看，这种提法容易让人产生疑惑，因为我们定义 $H$ 是 $G$ 的一个子图 (记为 $H \subseteq G$) 为：$V(H) \subseteq V(G)$ 并且 $E(H) \subseteq E(G)$ (此时 $H$ 和 $G$ 的顶点集合已被指定). 然而，图 3.17 所示的图 $H$ 和 $G$ 并没有被标号. 因此我们定义：对于非标号图 $H$ 和 $G$，如果对 $H$ 和 $G$ 的顶点作 (任意) 标号，$H$ 同构于 $G$ 的一个子图，则称 $H$ 是 $G$ 的一个子图. 因此，对于图 3.17 所示的图 $H$ 和 $G$，$H$ 就是 $G$ 的一个子图了.

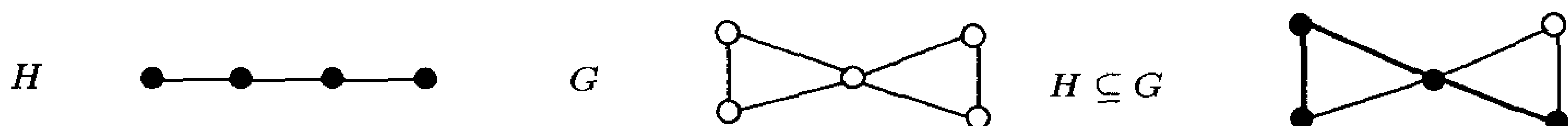



图 3.17　图 $G$ 的一个子图 $H$

**习题**

3.16　有多少个度序列为 $s$: 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6 的 (非同构) 图？

3.17　考虑图 3.18 所示的 (非标号) 图 $H_1, H_2, H_3, G$. 回答以下问题：

(a) $H_1$ 是 $G$ 的子图吗？

(b) $H_2$ 是 $G$ 的子图吗？

(c) $H_3$ 是 $G$ 的子图吗？

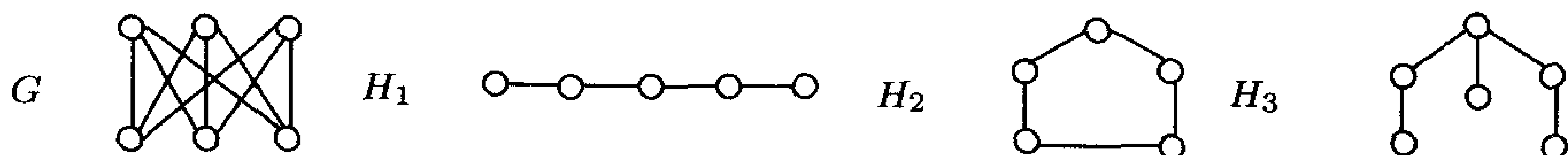



图 3.18　习题 3.17 的图

3.18　是否存在满足如下条件的图，它有三个连通分支且恰好有两个不是同构的？

3.19　给定一个含有 $n$ 个图 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的集合，且在这些图中，有些图对是同构的，有些图对是不同构的. 证明：与奇数个图同构的图的总数是偶数. [提示：构造一个顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的图 $G$，其中 $v_iv_j \in E(G)$ 当且仅当 $G_i$ 同构于 $G_j$.]

## 3.3 延伸阅读：图与群

对于两个同构图 $G_1$ 和 $G_2$，若它们的画法不同或标号不同，则确定它们是否同构可能会相当困难. 若它们画法相同且标号相同，则容易证明它们是同构的. 在此情形下，我们事实上只有一个图，例如 $G$，则如下的恒等映射显然是一个同构，$\epsilon : V(G) \to V(G)$，对任意的 $v \in V(G)$，均有 $\epsilon(v) = v$. 由此，对于图 3.19 中的图 $H$ 的每个顶点 $v$，由 $\alpha_1(v) = v$ 所定义的映射 $\alpha_1 : V(H) \to V(H)$ 是 $H$ 到其自身的一个同构.

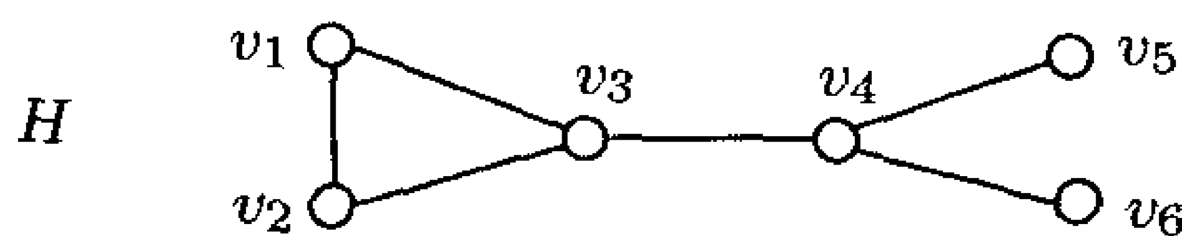



图 3.19 图 $H$

对于图 3.19 中的图 $H$, 还存在 $H$ 到其自身的其他同构. 例如, 由

$$\alpha_2(v) = \begin{cases} v_2, & \text{如果 } v = v_1, \\ v_1, & \text{如果 } v = v_2, \\ v, & \text{如果 } v \neq v_1, v_2, \end{cases}$$

所定义的映射也是一个同构. 另外, 还有两个从 $H$ 到其自身的同构, 即如下所定义的 $\alpha_3$ 和 $\alpha_4$,

$$\alpha_3(v) = \begin{cases} v_6, & \text{如果 } v = v_5; \\ v_5, & \text{如果 } v = v_6; \\ v, & \text{如果 } v \neq v_5, v_6; \end{cases}$$

$$\alpha_4(v) = \begin{cases} v_2, & \text{如果 } v = v_1; \\ v_1, & \text{如果 } v = v_2; \\ v_6, & \text{如果 } v = v_5; \\ v_5, & \text{如果 } v = v_6; \\ v, & \text{如果 } v = v_3, v_4. \end{cases}$$

从图 $G$ 到其自身的一个同构称为是 $G$ 的一个**自同构 (automorphism)**. 因为映射的复合运算满足结合律; 恒等映射是一个自同构; 一个自同构的逆仍是一个自同构; 并且两个自同构的复合也是一个自同构, 所以图 $G$ 所有自同构的集合在复合运算下构成一个群. 该群称为是 $G$ 的**自同构群 (automorphism group)**, 记为 $\text{Aut}(G)$. 例如, 对于图 3.19 所示的图 $H$, $\text{Aut}(H) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$.

因为图的每一个自同构都是顶点 $V(G)$ 上的一个置换, 所以用置换循环的术语可以更为简单地描述自同构. (关于置换的相关结论见附录 2.) 对于图 3.19 所示的图 $H$, $\text{Aut}(H)$ 的元素可以表示为

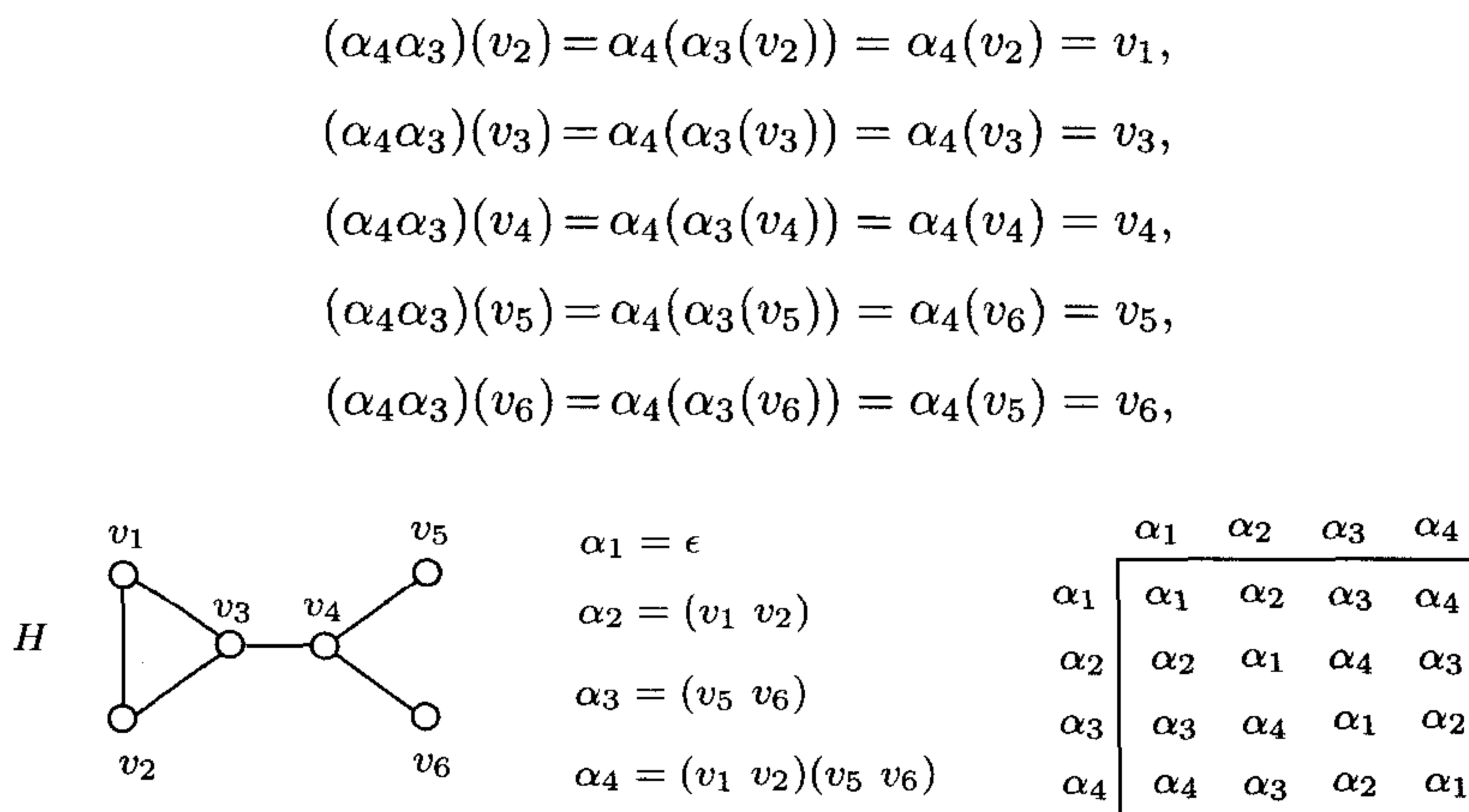
$$\alpha_1 = \epsilon \text{ (单位元)}, \alpha_2 = (v_1\ v_2), \alpha_3 = (v_5\ v_6), \alpha_4 = (v_1\ v_2)(v_5\ v_6).$$

此处, $\alpha_4$ 表示为两个置换循环 $(v_1\ v_2)$ 和 $(v_5\ v_6)$ 的 "乘积", 其含义为: (1) $\alpha_4$ 把 $v_1$ 映射到 $v_2$ 上, 把 $v_2$ 映射到 $v_1$ 上; (2) $\alpha_4$ 把 $v_6$ 映射到 $v_5$ 上, 把 $v_5$ 映射到 $v_6$ 上; (3) $\alpha_4$ 固定 $H$ 的其他所有顶点 (也就是说, $\alpha_4$ 把 $H$ 中其他顶点映射到它们自身上).

图 3.20 给出了图 3.19 中图 $H$ 的自同构群的群表. 由于 $\alpha_4$ 和 $\alpha_3$ 的 "乘积" 为 $\alpha_2$, 故群表中的第 4 行第 3 列的元素是 $\alpha_2$. 这是由于

$$(\alpha_4\alpha_3)(v_1) = \alpha_4(\alpha_3(v_1)) = \alpha_4(v_1) = v_2,$$

$$(\alpha_4\alpha_3)(v_2)=\alpha_4(\alpha_3(v_2)) = \alpha_4(v_2) = v_1,$$
$$(\alpha_4\alpha_3)(v_3)=\alpha_4(\alpha_3(v_3)) = \alpha_4(v_3) = v_3,$$
$$(\alpha_4\alpha_3)(v_4)=\alpha_4(\alpha_3(v_4)) = \alpha_4(v_4) = v_4,$$
$$(\alpha_4\alpha_3)(v_5)=\alpha_4(\alpha_3(v_5)) = \alpha_4(v_6) = v_5,$$
$$(\alpha_4\alpha_3)(v_6)=\alpha_4(\alpha_3(v_6)) = \alpha_4(v_5) = v_6,$$




| | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ |
| $\alpha_2$ | $\alpha_2$ | $\alpha_1$ | $\alpha_4$ | $\alpha_3$ |
| $\alpha_3$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
| $\alpha_4$ | $\alpha_4$ | $\alpha_3$ | $\alpha_2$ | $\alpha_1$ |

图 3.20 Aut($H$) 的群表

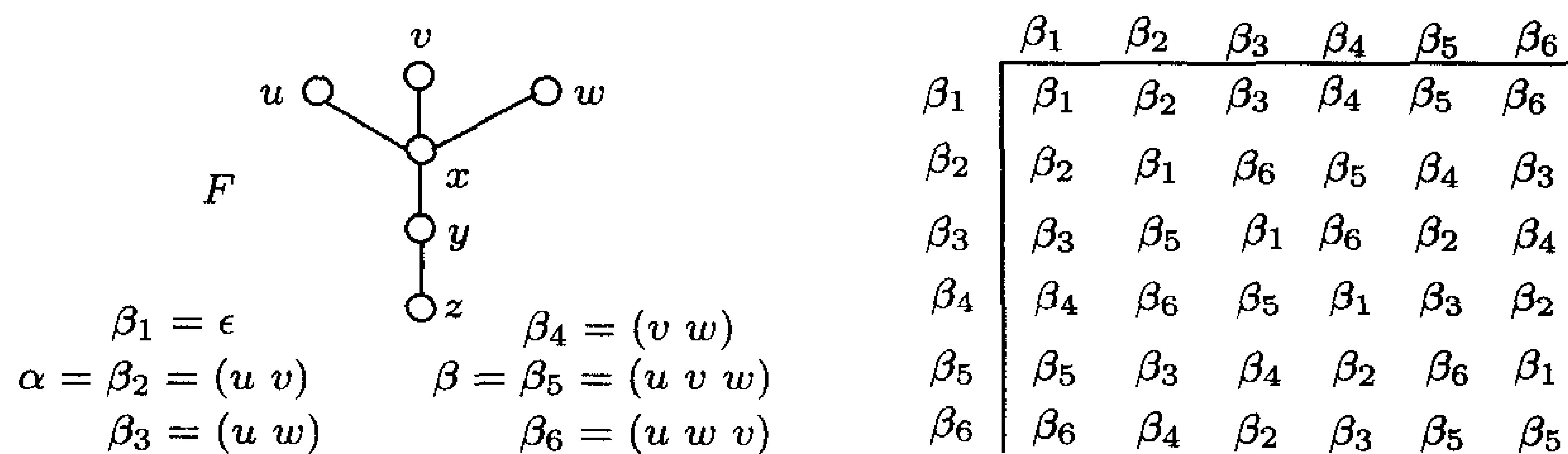
可见 $\alpha_4\alpha_3 = \alpha_2$. 然而, 如果用置换循环表示自同构, 则很容易地获得上述关于乘积的等式. 由于

$$\alpha_4\alpha_3 = [(v_1\ v_2)(v_5\ v_6)](v_5\ v_6),$$

从右向左来理解上式, 可以看出：(1) $v_1$ 被映射到 $v_2$, $v_2$ 被映射到 $v_1$; (2) $v_3$ 和 $v_4$ 始终被固定; (3) $v_5$ 通过 $(v_5\ v_6)$ 被映射到 $v_6$, 而 $v_6$ 通过中间的 $(v_5\ v_6)$ 被映射到 $v_5$, $v_5$ 被 $(v_1\ v_2)$ 所固定, 因此由上述映射的复合, $v_5$ 被映射到 $v_5$; (4) 类似可得, $v_6$ 也被固定. 故

$$\alpha_4\alpha_3 = (v_1\ v_2)(v_5\ v_6)(v_5\ v_6) = (v_1\ v_2) = \alpha_2.$$

下面看自同构群的另一种描述. 考虑图 3.21 所示的图 $F$, Aut($F$) 的元素以及群表也在图 3.21 中列出. 例如, 自同构 $\beta_5$ 把 $u$ 映射到 $v$, 把 $v$ 映射到 $w$, 把 $w$ 映射




| | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ | $\beta_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_1$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ | $\beta_6$ |
| $\beta_2$ | $\beta_2$ | $\beta_1$ | $\beta_6$ | $\beta_5$ | $\beta_4$ | $\beta_3$ |
| $\beta_3$ | $\beta_3$ | $\beta_5$ | $\beta_1$ | $\beta_6$ | $\beta_2$ | $\beta_4$ |
| $\beta_4$ | $\beta_4$ | $\beta_6$ | $\beta_5$ | $\beta_1$ | $\beta_3$ | $\beta_2$ |
| $\beta_5$ | $\beta_5$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_2$ | $\beta_6$ | $\beta_1$ |
| $\beta_6$ | $\beta_6$ | $\beta_4$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_5$ | $\beta_5$ |

图 3.21 图 $F$ 和 Aut($F$) 的群表

到 $u$, 而固定其他顶点. 把 $\beta_5$ 简写为 $\beta$, 则 $\beta^2 = \beta\beta = \beta_6$. 更进一步地, 如果把 $\beta_2$ 简写为 $\alpha$, 则 $\beta_3 = \beta_5\beta_2 = \beta\alpha$, $\beta_4 = \alpha\beta$. 因此, Aut($F$) 的每一个元素均可以由 $\alpha$ 和 $\beta$ 表示, 即

$$\beta_1 = \alpha^2 = \beta^3, \qquad \beta_2 = \alpha, \qquad \beta_3 = \beta\alpha = \alpha\beta^2,$$
$$\beta_4 = \alpha\beta = \beta^3\alpha, \qquad \beta_5 = \beta, \qquad \beta_6 = \beta^2.$$

故 $\alpha$ 和 $\beta$ 即为群 Aut($F$) 的**生成元 (generator)**, $\{\alpha,\beta\}$ 为该群的一个**生成集 (generating set)**.

对于图 $G$ 的顶点 $v$, $v$ 通过 $G$ 的自同构所映射到的顶点集合称为是 $G$ 的一个**轨道 (orbit)**. 事实上, 如果 $R$ 是定义在 $V(G)$ 的如下关系: 若存在某个 $\alpha \in \text{Aut}(G)$, 使得 $\alpha(x) = y$, 则定义 $x\ R\ y$. 可见, $R$ 是 $V(G)$ 上的一个等价关系. 不难发现, 由这个关系形成的不同等价类就是 $G$ 的轨道. 如果两个顶点 $u$ 和 $v$ 属于同一个轨道, 则称它们是**相似的 (similar)**. 图 3.20 所示的图 $H$ 有 4 个轨道, 即 $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3\}$, $\{v_4\}$, $\{v_5, v_6\}$; 而图 3.21 所示的图 $F$ 也有 4 个轨道: $\{u, v, w\}$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$. 熟悉一个图 $G$ 的轨道是很有益的. 如果已知 $G$ 中每个顶点的结构 (轨道) 信息, 由于某些顶点的相似性, 那么就没有必要去考虑 $G$ 中所有的顶点. 在此情形下, 我们只需要考虑每个轨道的 (任意) 一个顶点, 作为该轨道的代表元. 如果一个 $n$ 阶图有 $n$ 个不同的轨道, 那么 Aut($G$) 仅仅由一个自同构组成, 即恒等自同构. 图 3.22 所示的 $G$ 就是这样的一个图.

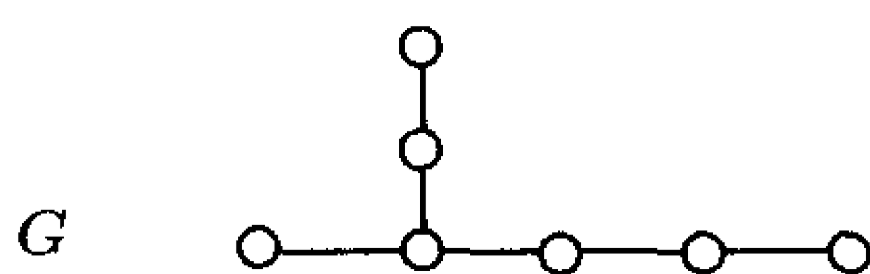



图 3.22 含有 7 个轨道的 7 阶图

另一方面, 如果图 $G$ 仅有一个轨道, 那么 $G$ 中任意两个顶点都是相似的; 此时我们称 $G$ 是**顶点可迁的 (vertex-transitive)**. 图 3.23 所示的图 $G_1$ 是顶点可迁的. 因为自同构只能把一个顶点映射到一个与它有相同度的顶点, 所以, 每个顶点可迁图都是正则的. 然而, 它的逆并不成立. 例如, 图 3.23 所示的图 $G_2$ 是一个 3 正则图, 但是, 它并不是顶点可迁的; $u$ 属于 $G_2$ 的一个三角形 (更为精确地, 两个三角形), $w$ 不属于 $G_2$ 的任何一个三角形. 因此, 不存在 $G_2$ 的自同构, 它把 $u$ 映射到 $w$. 完全图、圈、完全二部图 $K_{s,s}$、Petersen 图是为大家所熟知的几类顶点可迁图.

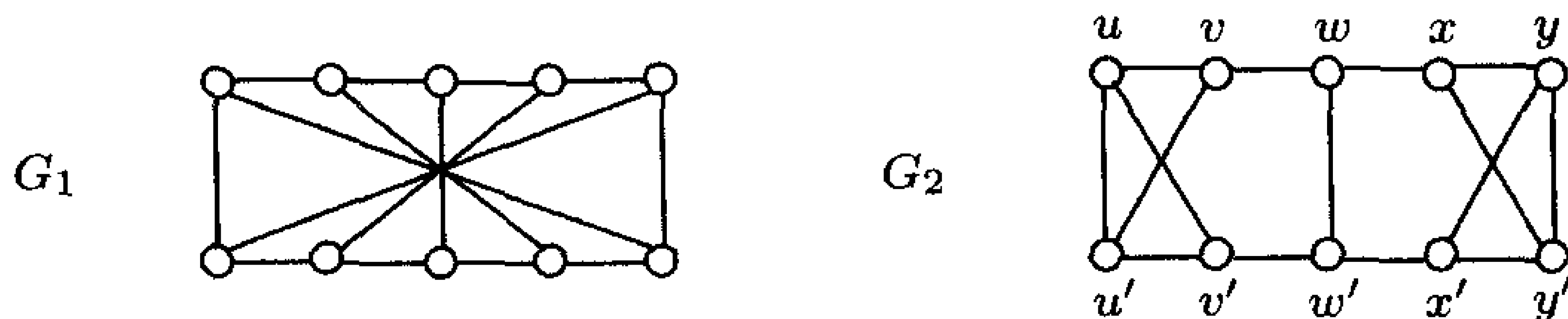



图 3.23 一个顶点可迁图和一个非顶点可迁的正则图

下面回顾一下群论的一些基本概念. 我们首先看一下群的定义. 一个**群 (group)** 是一个非空集合 $A$ (有限或无限) 以及定义在 $A$ 上的满足结合律的一个二元运算

$\circ$ 构成, 且 $A$ 含有一个单位元 $e$ (必然是唯一的), 使得对每个元素 $a \in A$ 均有 $e \circ a = a \circ e = a$; 并有另外一个性质：对每个元素 $a \in A$, 在 $A$ 中均存在一个逆元 $b$ (必然是唯一的), 使得 $b \circ a = a \circ b = e$. 记上述的群为 $(A, \circ)$. 由于运算 $\circ$ 满足结合律, 所以对于任意的 $x, y, z \in A$, 均有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. 如果对所有的 $a, b \in A$, 均有 $a \circ b = b \circ a$, 则称 $(A, \circ)$ 为一个**abel 群 (abelian group)**. 图 3.20 所示的图 $H$ 的自同构群 Aut$(H)$ 是一个 abel 群, 而图 3.21 所示的图 $F$ 的自同构群 Aut$(F)$ 群却不是 abel 群. (如果本书的主要专题是群论, 则记号 $G$ 将被用来表示一个群; 但是, 在本书中记号 $G$ 的使用上, 图更有优先权!)

设 $(A, \circ)$ 为一个群, $B$ 为 $A$ 的一个非空子集. 若 $(B, \circ)$ 是一个群, 则称 $(B, \circ)$ 是 $A$ 的一个**子群 (subgroup)**. 两个群 $(A, \circ)$ 和 $(B, *)$ 称为是**同构的 (isomorphic)**, 如果存在一个双射 $\phi : A \to B$, 使得对所有的 $x, y \in A$, 均有 $\phi(x \circ y) = \phi(x) * \phi(y)$. 通常我们用乘法来指代群 $(A, \circ)$ 上的运算 $\circ$, 并把 $a \circ b$ 写作 $ab$. 通常我们用 $A$ 记一个群, 而把运算符号省略不写.

我们还要提到一类很普遍的群 —— 置换群, 其中群运算即为映射的复合. 事实上, Arthur Cayley 给出了一个著名定理：每一个群同构于一个置换群. 我们已经提到, 图的自同构群是一个置换群. 一个基数为 $n$ 的集合上的所有置换形成的群称为是**对称群 (symmetric group)**, 记为 $S_n$. 易知,$S_n$ 的阶为 $n!$. $n$ 阶图 $G$ 的自同构群是其顶点集 $V(G)$ 上的一个置换群, 也就是说, $n$ 阶图 $G$ 的自同构群是 $S_n$ 的一个子群. 根据 Joseph-Louis Lagrange 的一个定理, Aut$(G)$ 的阶整除 $n!$ ($S_n$ 的阶). 因为每个图的自同构群的阶是有限的, 我们只对有限群感兴趣. 若一个 $n$ 阶群只有一个生成元, 则该群称为是 $n$ 阶**循环群 (cyclic group)**. 图 3.20 和 3.21 所示的图 $H$ 和 $F$ 的自同构群 Aut$(H)$ 和 Aut$(F)$ 都不是循环群. 特别地, Aut$(H)$ 是所谓的**Klein 四元群 (Klein four group)** (以 Felix Klein 命名), 而 Aut$(F)$ 是 6 阶对称群 $S_3$. 在群论中, 还有一类经常出现的非常有趣的群. 首先, 我们来看该群类的一个成员.

**例 3.7** 确定 Aut$(C_5)$.

**解** 设 $G \cong C_5$, 其中 $G$ 的顶点标号如图 3.24 所示.

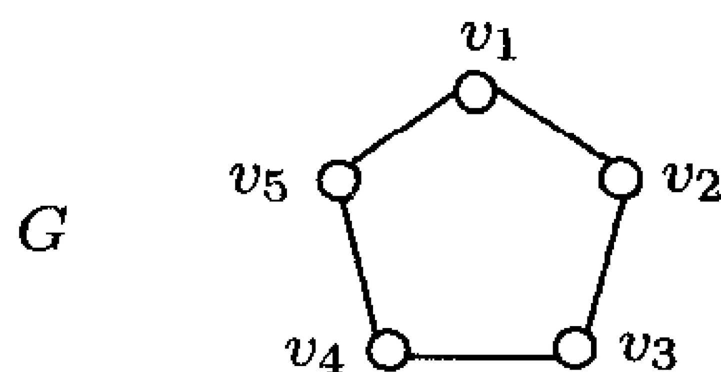



图 3.24 例 3.7 的图 $G$

$G$ 的一个自同构 $\alpha = (v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5)$ 可视为 $G$ 的一个 "旋转", $G$ 的另一个自同构 $\beta_1 = (v_2\ v_5)(v_3\ v_4)$ 可视为 $G$ 的一个 "反射". $G$ 的自同构群是由单位元 $\epsilon$, 四个旋转

$$\alpha = (v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5), \qquad \alpha^2 = (v_1\ v_3\ v_5\ v_2\ v_4),$$
$$\alpha^3 = (v_1\ v_4\ v_2\ v_5\ v_3), \qquad \alpha^4 = (v_1\ v_5\ v_4\ v_3\ v_2)$$

和五个反射

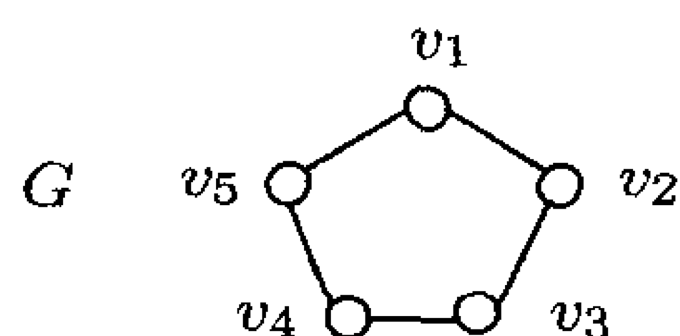
$$\beta_1 = (v_2\ v_5)(v_3\ v_4), \qquad \beta_2 = (v_1\ v_3)(v_4\ v_5), \qquad \beta_3 = (v_1\ v_5)(v_2\ v_4),$$
$$\beta_4 = (v_1\ v_2)(v_3\ v_5), \qquad \beta_5 = (v_1\ v_4)(v_2\ v_3).$$

构成. 设 $\beta = \beta_1$, 从图 3.25 中 Aut($G$) 的群表可以看出, $\alpha$ 和 $\beta$ 是 Aut($G$) 的生成元, 这是由于

$$\epsilon = \alpha^5 = \beta^2, \qquad \beta_1 = \beta, \qquad \beta_2 = \alpha^2\beta = \beta\alpha^3,$$
$$\beta_3 = \alpha^4\beta = \beta\alpha, \qquad \beta_4 = \alpha\beta = \beta\alpha^4, \qquad \beta_5 = \alpha^3\beta = \beta\alpha^2.$$

更一般地, 圈 $C_n$ 的自同构群的阶为 $2n$, 该群称为是**二面体群 (dihedral group)**, 通常记为 $D_n$. 因此, 二面体群 $D_5$ 的阶为 10, 它的群表由图 3.25 给出. 此外, $D_3 = S_3$.

◇



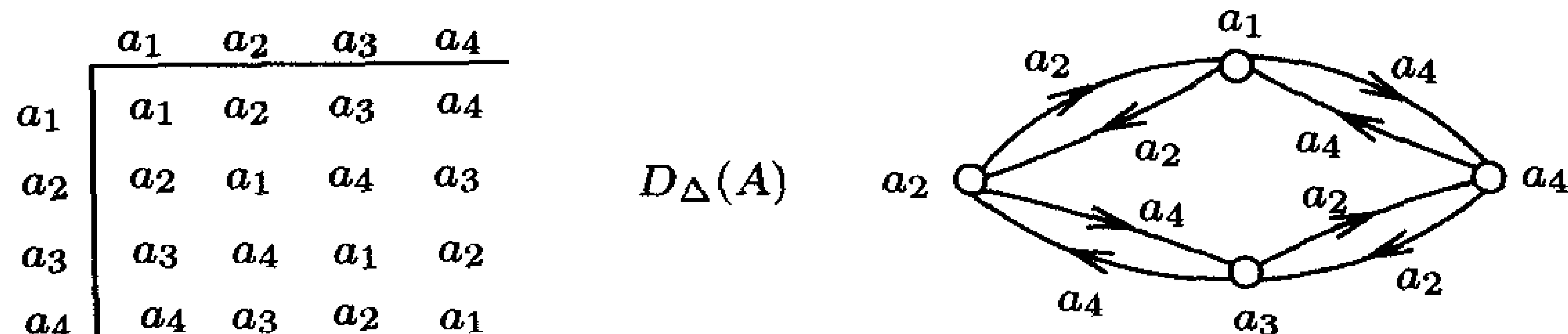

$\alpha = (v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5)$
$\beta_1 = (v_2\ v_5)(v_3\ v_4)$
$\beta_2 = (v_1\ v_3)(v_4\ v_5)$
$\beta_3 = (v_1\ v_5)(v_2\ v_4)$
$\beta_4 = (v_1\ v_2)(v_3\ v_5)$
$\beta_5 = (v_1\ v_4)(v_2\ v_3)$

| | $\epsilon$ | $\alpha$ | $\alpha^2$ | $\alpha^3$ | $\alpha^4$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\epsilon$ | $\epsilon$ | $\alpha$ | $\alpha^2$ | $\alpha^3$ | $\alpha^4$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ |
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\alpha^2$ | $\alpha^3$ | $\alpha^4$ | $\epsilon$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
| $\alpha^2$ | $\alpha^2$ | $\alpha^3$ | $\alpha^4$ | $\epsilon$ | $\alpha$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ | $\beta_1$ |
| $\alpha^3$ | $\alpha^3$ | $\alpha^4$ | $\epsilon$ | $\alpha$ | $\alpha^2$ | $\beta_5$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ |
| $\alpha^4$ | $\alpha^4$ | $\epsilon$ | $\alpha$ | $\alpha^2$ | $\alpha^3$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
| $\beta_1$ | $\beta_1$ | $\beta_3$ | $\beta_5$ | $\beta_2$ | $\beta_4$ | $\epsilon$ | $\alpha^3$ | $\alpha$ | $\alpha^4$ | $\alpha^2$ |
| $\beta_2$ | $\beta_2$ | $\beta_4$ | $\beta_1$ | $\beta_3$ | $\beta_5$ | $\alpha^2$ | $\epsilon$ | $\alpha^3$ | $\alpha$ | $\alpha^4$ |
| $\beta_3$ | $\beta_3$ | $\beta_5$ | $\beta_2$ | $\beta_4$ | $\beta_1$ | $\alpha^4$ | $\alpha^2$ | $\epsilon$ | $\alpha^3$ | $\alpha$ |
| $\beta_4$ | $\beta_4$ | $\beta_1$ | $\beta_3$ | $\beta_5$ | $\beta_2$ | $\alpha$ | $\alpha^4$ | $\alpha^2$ | $\epsilon$ | $\alpha^3$ |
| $\beta_5$ | $\beta_5$ | $\beta_2$ | $\beta_4$ | $\beta_1$ | $\beta_3$ | $\alpha^3$ | $\alpha$ | $\alpha^4$ | $\alpha^2$ | $\epsilon$ |

图 3.25 例 3.7 中 Aut($G$) 的群表

一个有限群 $A$ 可能有, 也的确可能需要, 一个较大的生成集; 习惯上我们不把单位元作为 $A$ 的生成元. 对于一个群 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 以及 $A$ 的一个生成集 $\Delta$, 我们定义一个有向图 $D_\Delta(A)$ 与之关联, 并称该有向图为**Cayley 染色有向图 (Cayley color digraph)** (以著名数学家 Arthur Cayley 命名). 有向图 $D_\Delta(A)$ 的顶点集为 $A$, $(a_i, a_j)$ $(i \neq j)$ 是 $D_\Delta(A)$ 的一条弧, 若存在某个生成元 $b \in \Delta$, 使得 $a_j = a_i b$; 并用 $b$ 给这条弧标号 (或染色). 因此, 对每个 $b \in \Delta$, $D_\Delta(A)$ 的每个顶点 $a_i$ 都邻接到 (指向) 顶点 $a_i b$. 类似地, 对每个 $b \in \Delta$, $D_\Delta(A)$ 的每个顶点 $a_j$ 都邻接自顶点 $a_j b^{-1}$(即, 被 $a_j b^{-1}$ 所指向). 故 $D_\Delta(A)$ 的每个顶点的出度和入度都等于 $|\Delta|$. 我们看 Cayley 染色有向图的几个例子.

**例 3.8** 图 3.26 给出了*Klein*四元群 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$的群表, 对应于生成元集 $\Delta = \{a_2, a_4\}$的*Cayley* 染色有向图也在图 3.26 中给出.

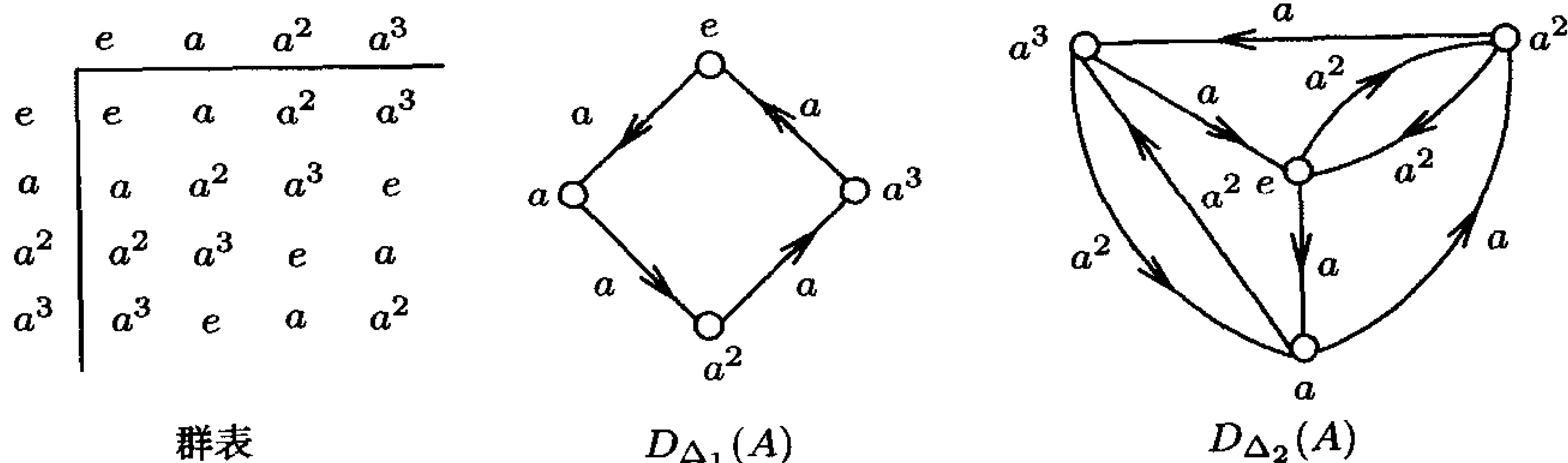


| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $a_2$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_4$ | $a_3$ |
| $a_3$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_1$ | $a_2$ |
| $a_4$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ |



图 3.26 例 3.8 的群表和其 Cayley 染色有向图

**例 3.9** 图 3.27 给出的是循环群 $A = \{e, a, a^2, a^3\}$的群表, 对应于两个生成元集 $\Delta_1 = \{a\}$ 和 $\Delta_2 = \{a, a^2\}$ 的*Cayley* 染色有向图分别在图 3.27 中给出.



| | $e$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ | $e$ |
| $a^2$ | $a^2$ | $a^3$ | $e$ | $a$ |
| $a^3$ | $a^3$ | $e$ | $a$ | $a^2$ |



图 3.27 例 3.9 的群表和其 Cayley 染色有向图

正如每个无向图都有自同构群一样, 每一个有向图也有自同构群. 对于 Cayley 染色有向图 $D$ 的情形, $D$ 的保色自同构 $\phi$ 构成了 (弧没有被染色的) 有向图 $D$ 的自同构群的一个子群; 所谓 $\phi$ 保色, 其含义为: 对 $D$ 的每条弧 $(u, v)$, 弧 $(u, v)$ 与弧 $(\phi(u), \phi(v))$ 有相同的颜色 (即对应同一个生成元).

在图论的第一本专著里 (事实上, 在该书之前), 图的自同构群就已经成为一个重要专题了. 1936 年, Dénes König 在这本专著的第 1 章 (基础) 第 1 节 (基本概念) 的第 5 页, 就提出了下面的问题 (从德语中翻译的):

> 一个给定的抽象群何时能被解释为是一个图的群? 如果可行, 相应的图又该如何构造?

早在 20 世纪初, 德国在群论方面拥有很多著名的数学家, 于世闻名. Ferdinand Georg Frobenius (1849—1917) 便是其中最著名的一位, 他在数学的很多领域作出了重要贡献, 尤其在群论方面. 他有一位博士生 Issai Schur (1875—1941), Schur 在他 66 岁生日 (1 月 10 日) 那天去世.

Schur 是一位天才数学家, 他的研究涉猎于数学的诸多方面, 但他最出名的还是因为他在群论方面的工作, 特别是在表示论方面. 由于 Schur 的影响, 柏林成为当时最著名的群论研究基地. Schur 非常受学生们的欢迎, 他在柏林大学的演讲经常是座无虚席. 然而, 从 1933 年开始, 德国发生的一系列的事件导致 Schur 的生活极度

艰难, 因为他是犹太人. 1935 年, Schur 被大学解聘, 他的余生充满艰辛.

在柏林大学, Schur 指导了几名博士生, 包括 Richard Rado, 我们将在第 11 章介绍他; Richard Brauer (1901—1977), 他在代数和数论上的工作非常有名; 以及 Helmut Wielandt (1910—2001), 他在置换群与线性代数方面做出了很大贡献.

Schur 的另一个学生是 Roberto Frucht (1906—1997). Frucht 于 1924 年进入柏林大学学习, 当年他 18 岁. 尽管 Frucht 最喜爱的数学领域是张量微积分, 但他在该领域找不到导师. 他对 Schur 极为崇拜, 问 Schur 是否可以作为他的导师. Schur 同意了, 前提是 Frucht 愿意在 Schur 的研究方向上做博士论文. 因此, Frucht 转而研究群论并于 1930 年获得了博士学位.

就在 Frucht 毕业时, 他的父亲失业了. 因此, 谋生成为 Frucht 的首选. 在德国的那段时间里, 学数学的想找一个除高校教师以外的工作是很困难的. 即使要做高校教师的工作也要求是德国公民, 但 Frucht 却是捷克斯洛伐克人. 因此, Frucht 只好辗转到意大利的特里斯特, 在一家意大利保险公司工作. Frucht 在意大利一直呆到 1938 年. 在那段时间里, 他在数学方面少有作为. 直到 1936 年的某一天, 他收到 Akademische Verlagsgesellschaft 出版公司的一份宣传图论专著 ( Dénes König 著) 的目录. Frucht 马上订购了这本书, 并且很快成为一名狂热的图论研究者.

König 关于自同构群的问题很快引起了 Frucht 的极大关注. 在此问题上, Frucht 经历几个月的失败以后, 找到了一个似乎很简单的解法 (当然是在他发现了以后). 1939 年, 在二战爆发前夕, Frucht 从意大利逃亡到南美. 在阿根廷做了一段时间的保险精算师以后, 他在智利瓦尔帕莱索的圣母玛利亚大学找到了一份满意的工作. 在那里, 他继续着自己衷爱的图论方面的工作, 度过了自己的余生.

**定理 3.10 (Frucht 定理)** *对于每个有限群 $A$, 都存在一个图 $G$, 使得 $\mathrm{Aut}(G)$ 同构于 $A$.*

为了证明定理 3.10, Frucht 首先利用了他自己所获得的结果: 每一个有限的抽象群 $A$ 都同构于 Cayley 染色有向图 $D_\Delta(A)$ 的保色自同构群. 接下来, Frucht 把 $D_\Delta(A)$ 转换为一个图 $G$, 使得 $G$ 的自同构按适当的方式与 $D_\Delta(A)$ 的保色自同构相对应.

实现上述想法有多种方法, 其中之一为: 对于 $D_\Delta(A)$ 中标号为 $b_1 \in \Delta$ 的每条弧 $(u,v)$, 用一条路 $u,u_1,v_1,v$ 取代它, 并且在顶点 $u_1$ 处添加一个悬挂边, 在顶点 $v_1$ 处添加一条长为 2 的路, 其中 $u_1$ 和 $v_1$ 为新的顶点. 如果有另一个生成元, 例如 $b_2$, 则对 $D_\Delta(A)$ 中标号为 $b_2 \in \Delta$ 的每条弧 $(u,v)$, 用路 $u,u_2,v_2,v$ 取代它, 并且在顶点 $u_2$ 处添加一条长为 3 的路, 在顶点 $v_2$ 处添加一条长为 4 的路, 其中 $u_2$ 和 $v_2$ 为新的顶点. 如果有另外的生成元, 则重复上面的操作; 见图 3.28 的演示.

例如, 考虑例 3.8 的 Cayley 染色有向图 $D_\Delta(A)$. 我们把它重新画成图 3.29 所示的图, 相应的图 $G$ 也在图 3.29 中画出, 其中 $b_1 = a_2$, $b_2 = a_4$. 根据 Frucht 定理,

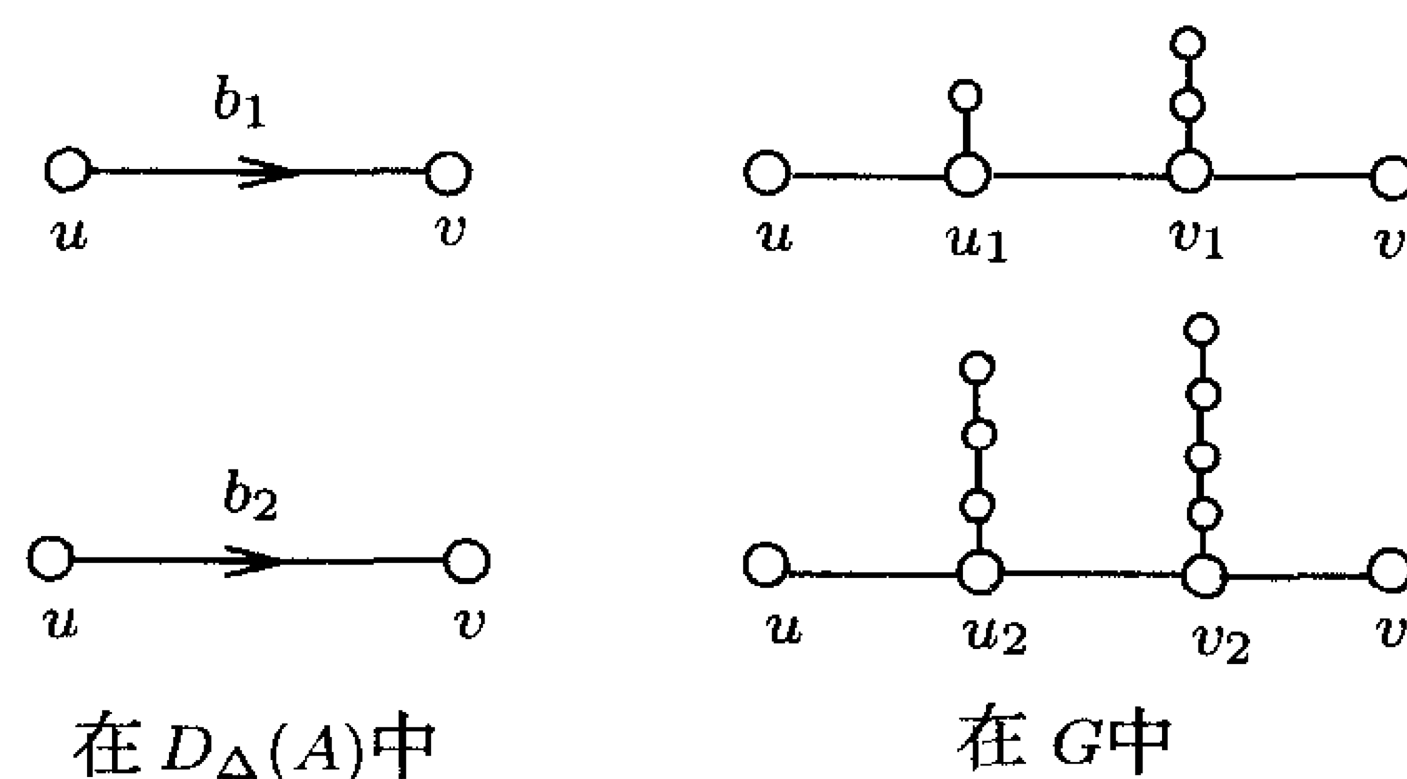



图 3.28　由 $D_\Delta(A)$ 构造一个图 $G$

Aut($G$) 与 $A$ (Klein 四元群) 是同构的.

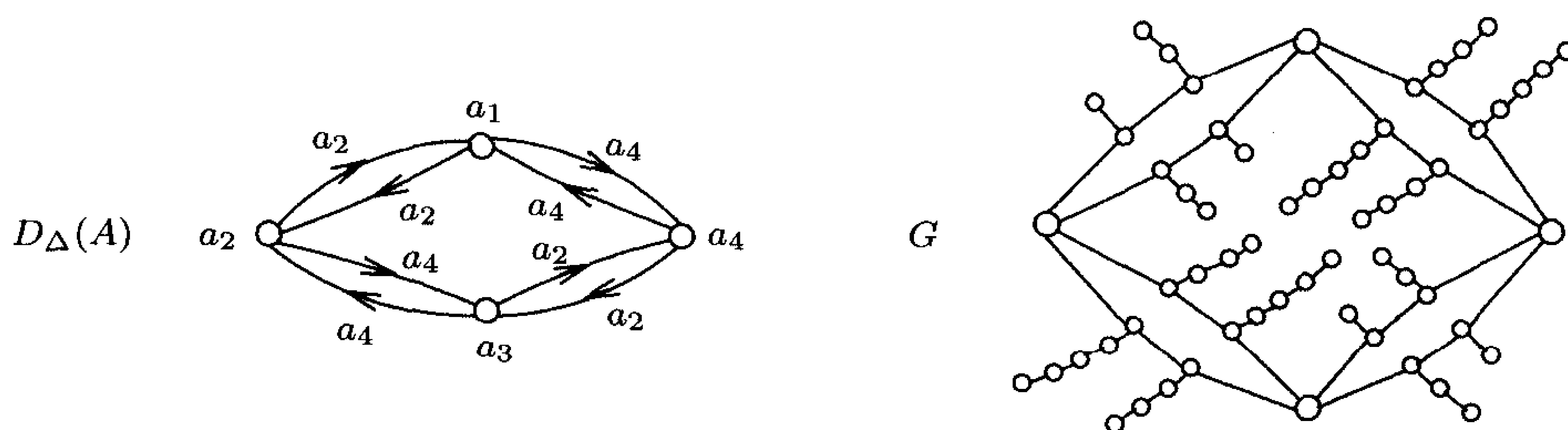



图 3.29　由 $D_\Delta(A)$ 重构的图 $G$

## 习题

3.20　对于图 3.19 所示的图 $H$, 列举 $V(H)$ 的一个置换, 使其保持度, 但不是 $H$ 的自同构.

3.21　确定 $K_3$ 的自同构群.

3.22　确定 $K_{1,3}$ 的自同构群.

3.23　确定 $P_n$ 的自同构群, 其中 $n \geqslant 2$.

3.24　确定 $C_4$ 的自同构群.

3.25　对图 3.30 所示的图 $H_1$ 和 $H_2$, 确定

(a) 每个图的轨道.

(b) 每个图的自同构群.

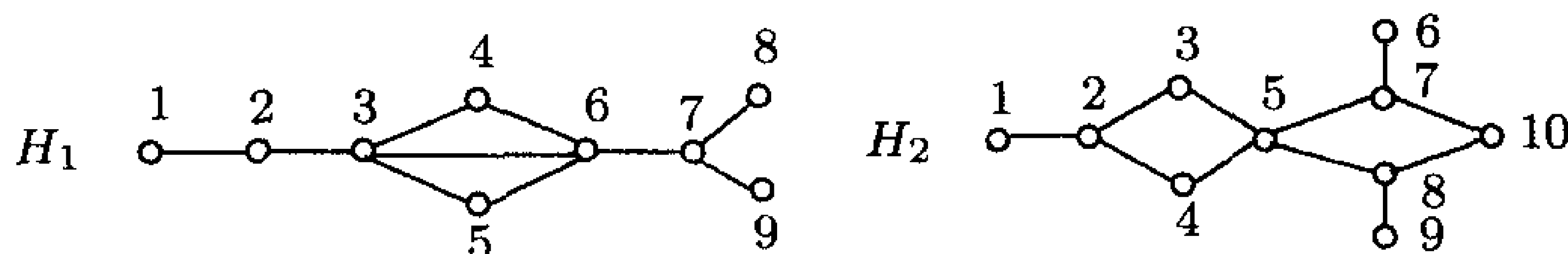



图 3.30　习题 3.25 的图

3.26　对图 3.23 所示的图 $G_2$, 确定

(a) $G_2$ 的轨道.

(b) $G_2$ 的自同构群.

3.27 证明：对每个图 $G$, Aut($G$) 同构于 Aut($\overline{G}$).

3.28 对于群表如图 3.31 所示的群 $A = \{e, a, b\}$,

(a) 给出一个生成集 $\Delta$ 以及对应的 Cayley 染色有向图.

(b) 用 (a) 中的 Cayley 染色有向图, 构造一个图 $G$, 使得 Aut($G$) $\cong A$.

(c) 给出一个阶为 12 的图 $H$, 使得 Aut($H$) $\cong A$.

| | $e$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $e$ |
| $b$ | $b$ | $e$ | $a$ |

图 3.31 习题 3.28 的群表

3.29 考虑群表如图 3.32 所示的群 $A = \{e, a, b, c\}$, 其中 $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

(a) 对于 $\Delta = \{a, b\}$, 给出相应的 Cayley 染色有向图.

(b) 用 (a) 中的 Cayley 染色有向图, 构造一个图 $G$, 使得 Aut($G$) $\cong A$.

| | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | e | c | b |
| b | b | c | e | a |
| c | c | b | a | e |

图 3.32 习题 3.29 的群表

3.30 考虑群表如图 3.33 所示的群 $A = \{e, a, b, c, d\}$,

(a) 对于 $\Delta = \{a\}$, 给出相应的 Cayley 染色有向图.

(b) 用 (a) 中的 Cayley 染色有向图, 构造一个图 $G$, 使得 Aut($G$) $\cong A$.

| | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |

图 3.33 习题 3.30 的群表

3.31 设 $A = S_3$ 是作用在集合 $\{1, 2, 3\}$ 上的对称群. 对于 $\Delta = \{(123), (12)\}$.

(a) 给出相应的 Cayley 染色有向图.

(b) 用 (a) 中的 Cayley 染色有向图, 构造一个图 $G$, 使得 Aut($G$) $\cong A$.

3.32 对于例 3.9 中的每一个 Cayley 染色有向图, 分别构造图 $G$, 使得 Aut($G$) $\cong A$.

## 3.4 延伸阅读：重构与可解性

图 3.34 是五张卡片组成的一副纸牌，在每张卡片上都画了一个图.

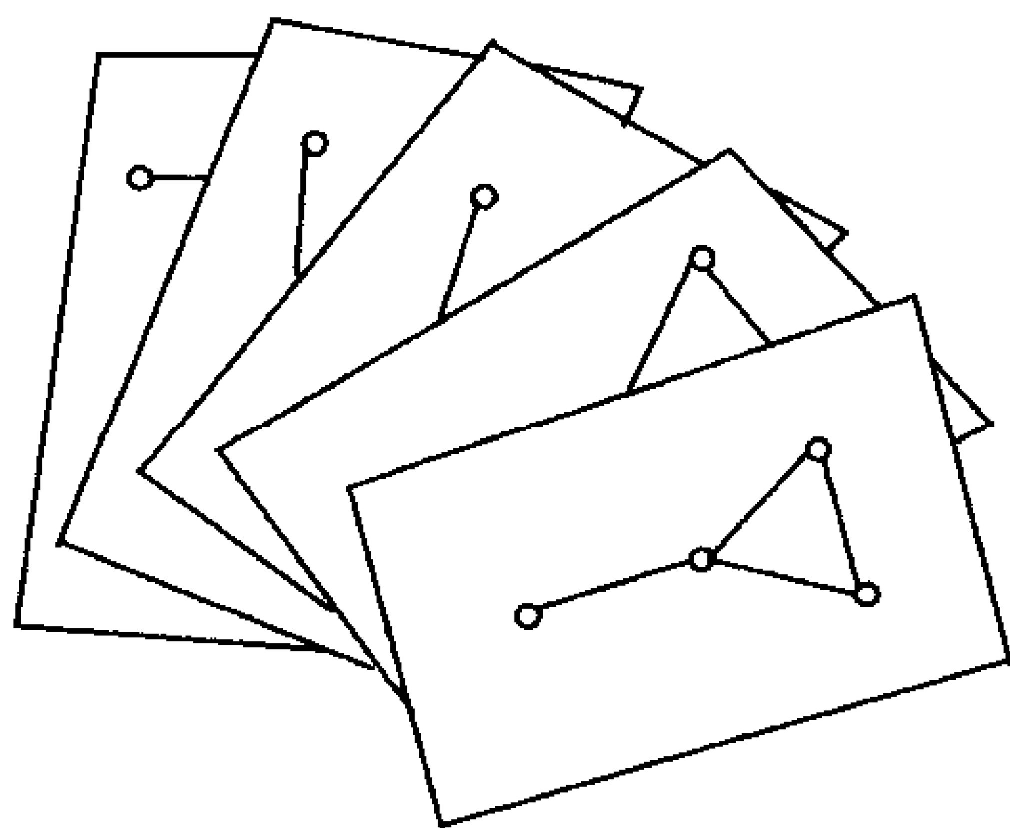


图 3.34 一副纸牌

我们看不清每张卡片上的图，现在把它们分开，如图 3.35 所示. 我们给这些卡片编号. 你发现这 5 张卡片上的图之间有什么关系? 当然，1 号和 2 号卡片上的图是同构的，3 号和 4 号卡片上的图也是同构的. 另外，我们还发现这些图的阶均为 4.

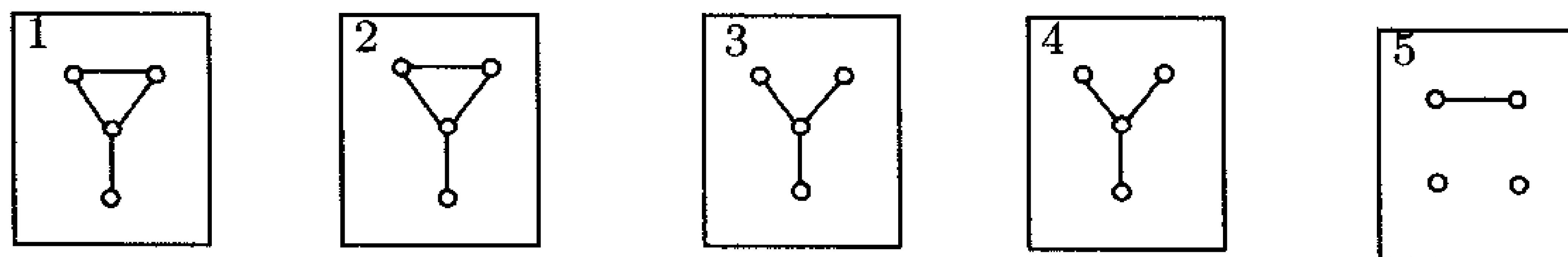



图 3.35 由五张卡片组成的一副纸牌

可以证明，存在某个 $n$ 阶图 $G$，使得对每个 $v \in V(G)$，非标号子图 $G-v$ 就画在图 3.35 中纸牌的某一张卡片上. 从两方面可以看出 $n=5$. 其一，$n$ 必须等于 5，因为有 5 张卡片；其二，对 $v \in V(G)$，每个子图 $G-v$ 的阶为 $n-1=4$，故 $n=5$.

如果图 $G$ 的某个参数值或者某个性质可以由 (非标号) 图 $G-v$ $(v \in V(G))$ 所确定，则对图 $G$ 而言，这个参数或这个性质称为是**可识别的 (recognizable)**. 上述例子的讨论为下面定理提供了一般性的证明.

**定理 3.11** *每个图的阶是可识别的.*

在继续下面内容之前，我们看图 3.36 中的一副 (非常少的) 纸牌. 因为这副纸牌只有两张卡片并且每张卡片都是 1 阶 (平凡) 图，所以我们所要讨论的图 $G$ 的阶为 2. 容易看出，恰有两个 2 阶 (非同构) 图，即 $K_2$ 和 $\overline{K}_2$. 显然，$K_2$ 的边数是 1，而 $\overline{K}_2$ 的边数是 0. 但是，不论是情形 $G \cong K_2$ 还是情形 $G \cong \overline{K}_2$，在两种情形下 $G-v$

都是 $K_1$. 换句话说, 可能 $G \cong K_2$, 也可能 $G \cong \overline{K}_2$, 因此我们无法从子图 $G-v$ ($v \in V(G)$) 来确定 $G$ 的边数. 因此, $K_2$ 和 $\overline{K}_2$ 的边数是不可识别的. 所幸的是, 这仅是个例外, 并不是一般规律.

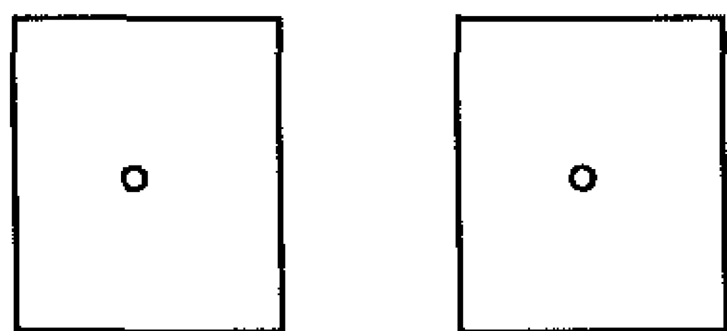


图 3.36　由两张卡片组成的纸牌

**定理 3.12**　*每个阶至少为 3 的图的边数是可识别的.*

**证**　[直接证法] 设 $G$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 且边数为 $m$ 的图. 设 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 当然, 在由子图 $G-v_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) 组成的纸牌中, 所有顶点都没有标号. 设 $e$ 为是 $G$ 的一条边, 例如 $e=v_1v_2$. 那么边 $e$ 将出项在每个子图 $G-v_i$ ($3 \leqslant i \leqslant n$) 中, 但不出现在 $G-v_1$ 或 $G-v_2$ 中. 设 $G-v_i$ 的边数为 $m_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), 则在和式 $\sum_{i=1}^{n} m_i$ 中, 每一条边被计数了 $n-2$ 次, 即,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m(n-2), \quad m=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n-2}.$$

■

设图 3.35 中的卡片 $i$ ($1 \leqslant i \leqslant 5$) 给出子图 $G-v_i$, 其边数为 $m_i$. 我们有

$$\sum_{i=1}^{5} m_i = 4+4+3+3+1=15.$$

根据定理 3.12, $m=15/(5-2)=5$. 因此, 对于图 3.35 中纸牌所描述的问题, 图 $G$ 的边数是 5.

现在我们知道, 阶至少为 3 的每个图 $G$ 的边数是可识别的. 接下来, 我们将证明图 $G$ 的另一性质也是可识别的.

**定理 3.13**　*每个阶至少为 3 的图 $G$ 的度序列都是可识别的.*

**证**　[直接证法] 设 $G$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 且边数为 $m$ 的图, 其中 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 由定理 3.12 知, $m$ 可由子图 $G-v_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) 确定. 设 $G-v_i$ 的边数为 $m_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 换句话说, $G$ 的边数是 $m$, 但当顶点 $v_i$ 从 $G$ 中删除以后, 所得子图 $G-v_i$ 的边数为 $m_i$. 因此, $\deg v_i = m - m_i$, 故 $m-m_1, m-m_2, \cdots, m-m_n$ 是 $G$ 的一个度序列. ■

再回到图 3.35 中纸牌上的子图 $G-v_i$ ($1 \leqslant i \leqslant 5$), 我们发现 $m_1=m_2=4$, $m_3=m_4=3$, $m_5=1$. 我们已经知道, $G$ 的边数 $m$ 等于 5, 所以 $1,1,2,2,4$ 是 $G$ 的一个度序列. 特别地, $\deg v_5=4$, 从而 $v_5$ 与卡片 5 中图 $G-v_5$ 的每一个顶点都邻

接. 现在, 我们已经完全弄清了对应于图 3.35 中纸牌的那个神秘图 $G$ 了 (在同构意义下). 这个图在图 3.37 中给出.

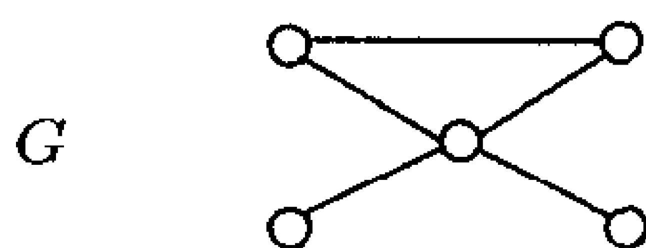



图 3.37 对应于图 3.35 中纸牌的图 $G$

因此, 由图 3.35 中纸牌所给的子图 $G-v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, 我们不仅可以确定 $G$ 的阶, $G$ 的边数, $G$ 的度序列, 而且我们还可以确定图 $G$ 本身.

一个阶为 $n \geqslant 2$ 的图 $G$ 称为是**可重构的 (reconstructible)**, 如果 $G$ 可由它的子图 $G-v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 唯一确定 (在同构意义下). 因此, 图 3.37 所示的图 $G$ 是可重构的. 从前面的讨论可知, 阶为 2 的图不是可重构的. 很多人都确信, 阶至少为 3 的每个图都是可重构的, 但是该猜想还没有被证明.

**重构猜想** *阶至少为 3 的每个图都是可重构的.*

人们普遍认为, 这个猜想是在 1941 年由 Paul J. Kelly (1915—1995) 和 Stanislaw M. Ulam 共同提出的. Kelly 是一名教员, 在加州大学圣巴巴拉分校工作多年, 在此专题上获得了很多结论. Ulam 于 1909 年 4 月 3 日出生在波兰的莱姆堡 (即如今乌克兰的利沃夫). 在十几岁的时候, Ulam 就对天文、物理和数学产生兴趣, 并自学了微积分. 1927 年, 他到利沃夫工学院学习. Kazimierz Kuratowski 就是该学院的一名教授 (我们将在第 9 章学习他的相关结论). Ulam 在 Stefan Banach 的指导下从事研究工作, 并于 1933 年获得博士学位.

1940 年, Ulam 在威斯康星大学获得助理教授的职位, 此前他在此攻读博士学位. 三年后, John von Neumann 与 Ulam 约定在芝加哥的一个火车站相见. 这导致了 Ulam 来到新墨西哥州的洛斯阿拉莫斯国家实验室, 与物理学家 Edward Teller 一起研究氢弹. 在洛斯阿拉莫斯期间, Ulam 应用带随机数的统计抽样方法, 提出了著名的 Monte Carlo 方法并用之解决数学问题. 在其一生中, 他在数学的很多领域做出了重要贡献. Ulam 于 1984 年 5 月 13 日去世.

**重构问题**就是判断重构猜想是否正确. 解决重构问题需要验证：不存在两个非同构图 $G$ 和 $H$, 使得子图集 $\{G-v, v \in V(G)\}$ 和子图集 $\{H-v, v \in V(H)\}$ 是相同的. 如果存在具有上述性质的非同构图 $G$ 和 $H$, 则这两个图必须有相同的阶, 相同的边数和相同的度序列, 因为所有这些参数与性质都是可识别的. 进一步地, 任意两个这样的图 $G$ 和 $H$ 必须都是连通的或者都是不连通的. 这就是定理 1.10 的结论, 即：阶至少为 3 的图 $G$ 是连通的当且仅当 $G$ 含有两个不同的顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $G-u$ 和 $G-v$ 都是连通的.

**定理 3.14** *对所有阶至少为 3 的图, 连通性与非连通性都是可识别的性质.*

**证** [直接证法] 根据定理 1.10, $G$ 是连通的当且仅当在子图 $G-v$ ($v \in V(G)$) 中, 至少两个子图是连通的. ■

重构问题主要讨论如下问题: 给一个图 (或若干图) 的某些信息, 要求我们去证明仅有一个图 $G$ 满足这些给定的信息, 即确定这样的图 $G$. 在此情形下, 所给的信息是 $G$ 的子图集合, 也就是形如 $G-v$ 的所有子图, 其中 $v \in V(G)$. 事实上, 我们可能会获得所讨论图的更多信息. 继续按照前面的讨论方式, 假设我们获得一个图的若干条信息, 每条信息写在一张卡片上. 这样的卡片集合就是我们的**纸牌**. 满足这副纸牌中所有信息的任一个图 $G$ 称为是**该纸牌的一个解**. 因此, 问题就转化为确定这副纸牌的所有解. 一副纸牌可能有唯一解, 也可能有两个或更多个解, 但也可能没有解. 对于一个给定的 $n \geqslant 3$ 阶的图 $G$, 假设一副纸牌由形如 $G-v$ ($v \in V(G)$) 的所有 $n$ 个子图组成, 并且还假设重构猜想是正确的, 则这副纸牌有唯一解, 也就是 $G$.

**例 3.15** 找出满足如下条件的所有图 $G$, $G$ 的子图 $G-v$ ($v \in V(G)$) 由图 3.38 中纸牌的卡片给出.

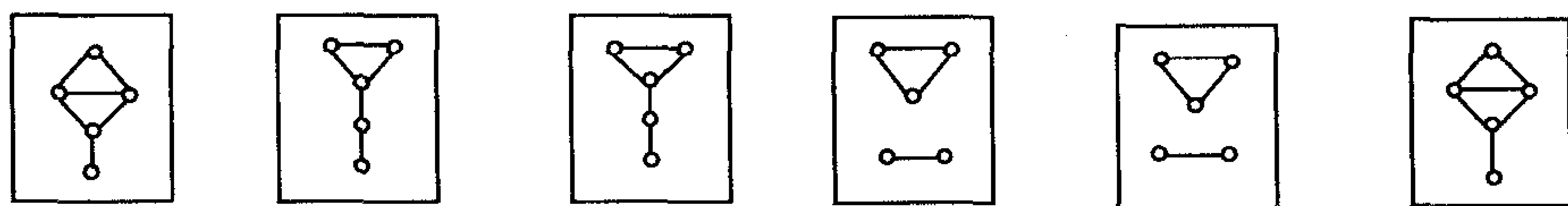


图 3.38 例 3.15 中的纸牌

**解** 首先, 注意到这副纸牌的任一解 $G$ 的阶是 6. 在这副纸牌中, 图的边数之和为 $6+5+5+4+4+6=30$. 因此解 $G$ 的边数为 $30/(6-2)=7.5$. 这是不可能的, 所以图 3.38 中的纸牌上的图不是任一个图 $G$ 的子图 $G-v$, $v \in V(G)$. 因此, 这副纸牌无解. ◇

**例 3.16** 确定图 3.39 中纸牌的解.

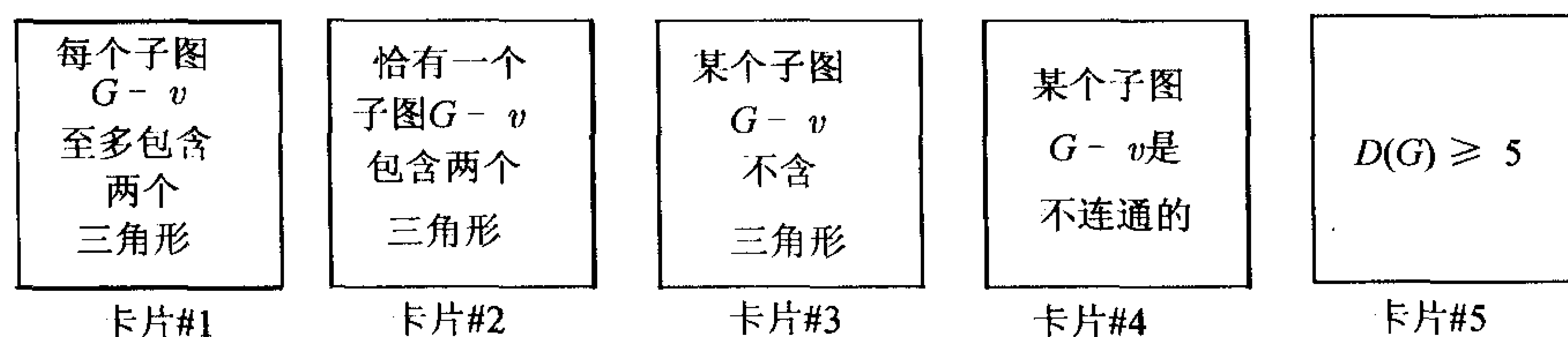



图 3.39 例 3.16 中的纸牌

**解** 假设 $G$ 是一个解, 由卡片 #1, 解 $G$ 的所有子图 $G-v$ 至多包含两个三角

形, 并且由卡片 #2, 恰好有一个子图 $G-v$, 例如 $G-v_1$, 包含两个三角形. 这两个三角形或者是不邻接的, 或者有一个公共顶点, 或者有一条公共边, 如图 3.40 所示.

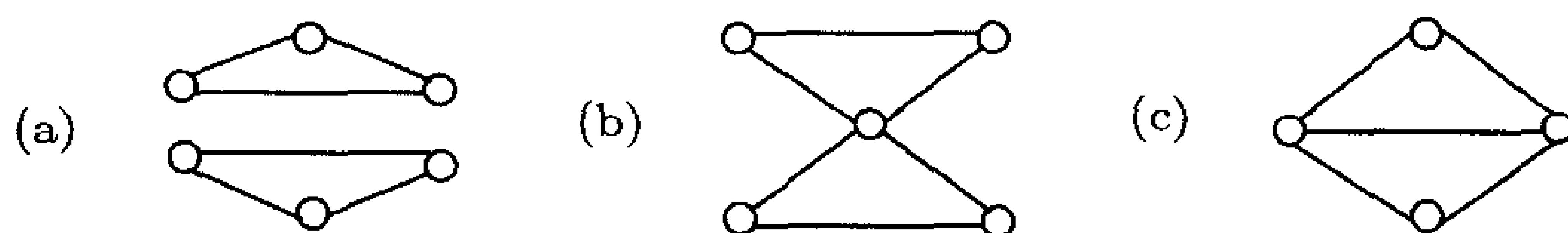



图 3.40 解的可能子图

由卡片 #3 我们可以排除图 3.40(a) 所示的子图. 如果图 3.40(c) 所示的子图出现, 则根据卡片 #5, $G$ 必须至少包含两个另外的顶点 $x$ 和 $y$. 在此情形下, $G-x$ 和 $G-y$ 都至少包含两个三角形, 与卡片 #2 矛盾. 因此, $G$ 必然包含图 3.40(b) 所示的子图和另外一个 (仅有的一个) 顶点 $z$. 进一步地, 这个子图必须为诱导子图, 因为 $G-v_1$ 恰含有两个三角形. 由卡片 #5, $z$ 必须与一个度为 4 的顶点邻接. 除此顶点外, 如果 $z$ 还与图 3.40(b) 中子图的其他顶点邻接, 则与卡片 #2 矛盾. 因此, 我们最终仅得到一个图 $G$, 也就是图 3.41 所示的那个图 $G$. 在确定图 $G$ 时, 卡片 #4 没有用到.(它是一张王牌!) ◇

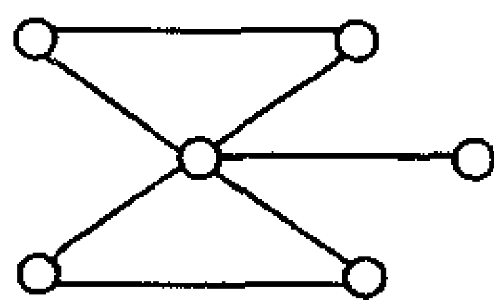


图 3.41 图 3.39 所示纸牌的唯一解

## 习题

3.33 列举两个阶至少为 3 的非同构图 $G$ 和 $H$, 它们分别包含顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $G-u$ 和 $H-v$ 是同构的; 或者解释为什么不存在这样的两个图.

3.34 对于图 3.42 中的卡片纸牌 $D$, 卡片 $i$ 为某个图 $G$ 的子图 $G_i \cong G-v_i$, $v_i \in V(G)$. 回答下面问题, 并给出解释.

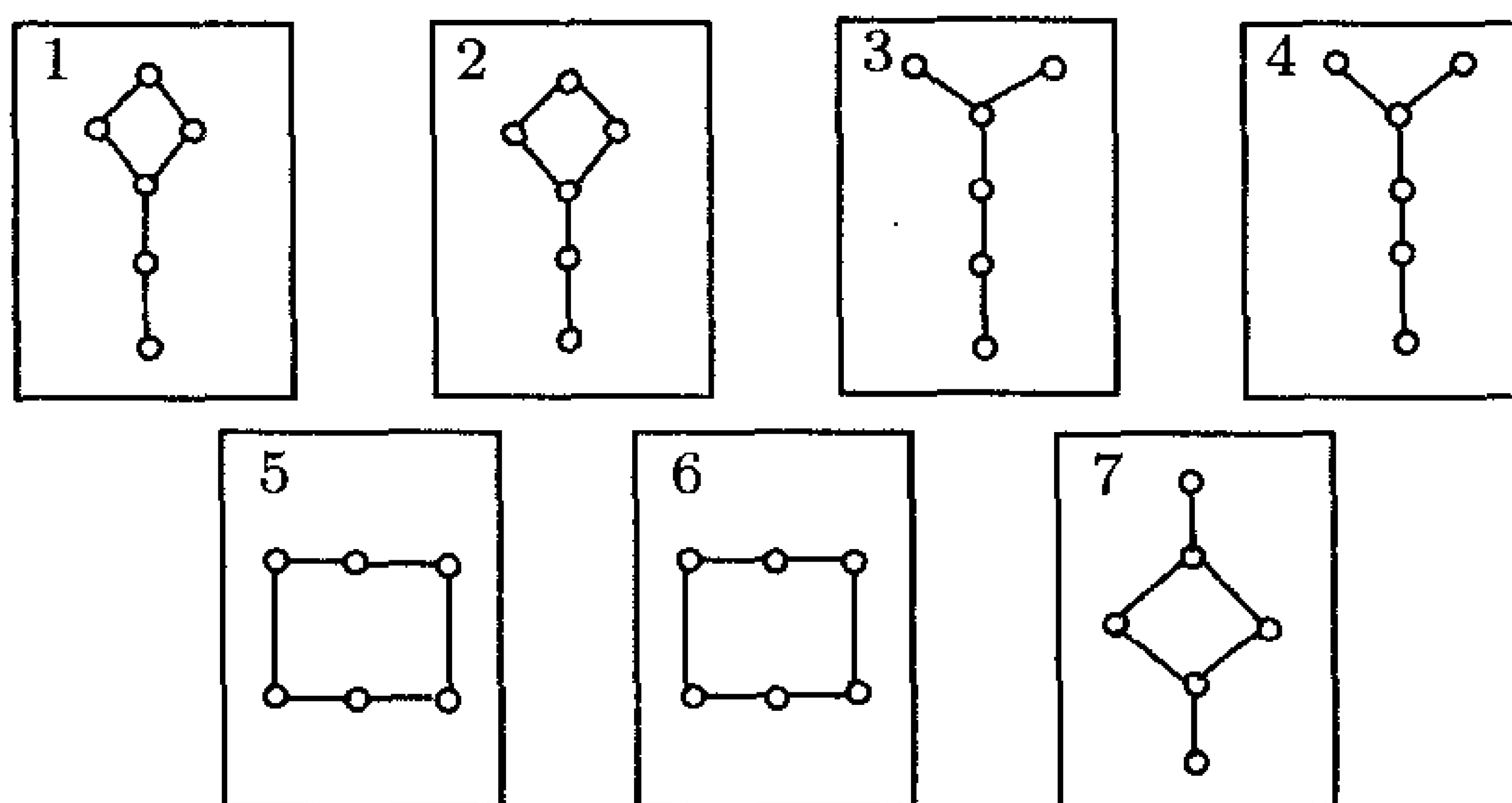



图 3.42 习题 3.34 中的卡片纸牌

(a) $G$ 的阶 $n$ 是多少?

(b) $G$ 的边数 $m$ 是多少?

(c) $G$ 的各顶点的度是多少?

(d) $G$ 是连通的吗?

(e) $D$ 的解是什么?

3.35 对于一个阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图 $G$, 它的子图 $G-v$ $(v \in V(G))$ 由图 3.43 中的卡片纸牌给出. 回答下面问题, 并给出解释.

(a) $n$ 是多少?

(b) $m$ 是多少?

(c) $G$ 是连通的吗?

(d) $G$ 的度序列是什么?

(e) 找出纸牌的所有解.

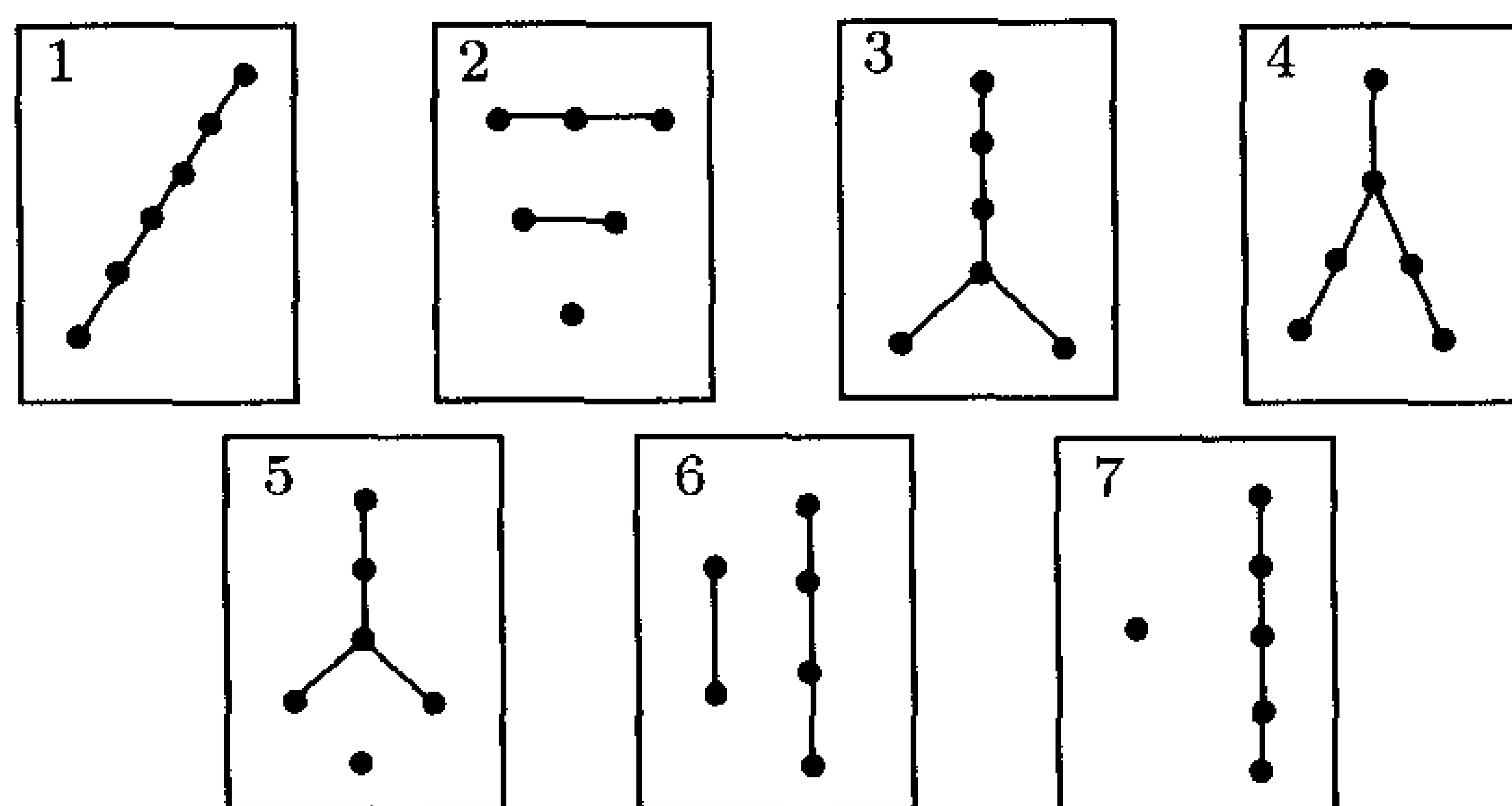



图 3.43 习题 3.35 中的卡片纸牌

3.36 确定图 3.44 中的卡片纸牌的所有解 $G$.

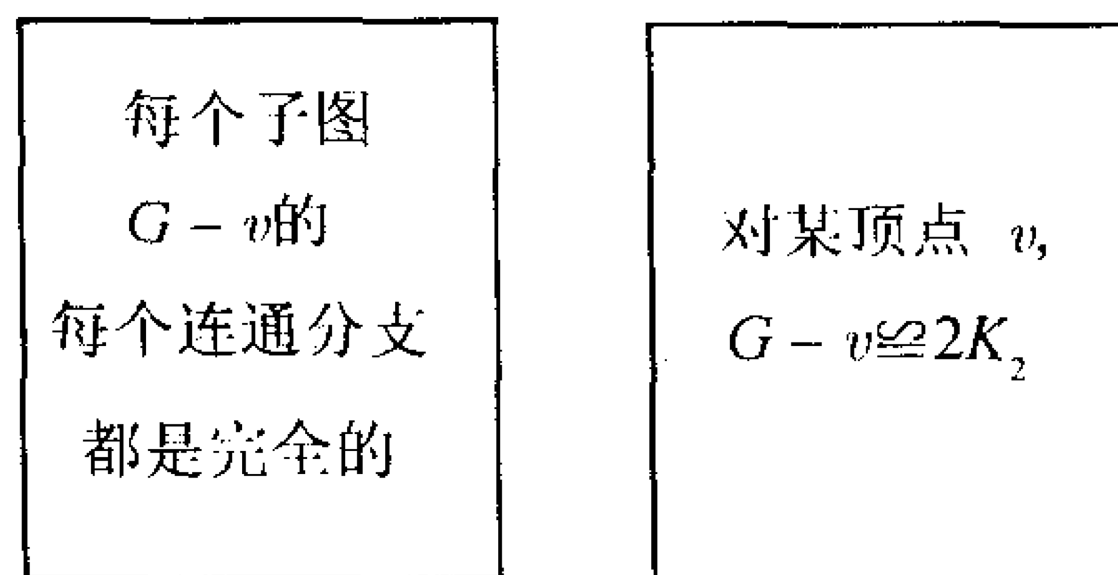



图 3.44 习题 3.36 中的卡片纸牌

3.37 确定图 3.45 中的卡片纸牌的所有解 $G$.

3.38 确定图 3.46 中的卡片纸牌的所有解 $G$.

3.39 确定图 3.47 中的卡片纸牌的所有解 $G$.

3.40 确定图 3.48 中的卡片纸牌的所有解 $G$.

3.41 确定图 3.49 中的卡片纸牌 (由两张卡片组成) 的所有解 $G$.

3.42 设 $G = 3K_2 + K_1$.

(a) 列举一副卡片纸牌, 使得 $G$ 是该纸牌的唯一解; 并证明之.

(b) 找出由最小张数卡片组成的纸牌，使得 $G$ 是该纸牌的唯一解；并证明之.

(c) 列举一副卡片纸牌，使得 $G$ 和另外一个图是它的仅有的两个解；并证明之.

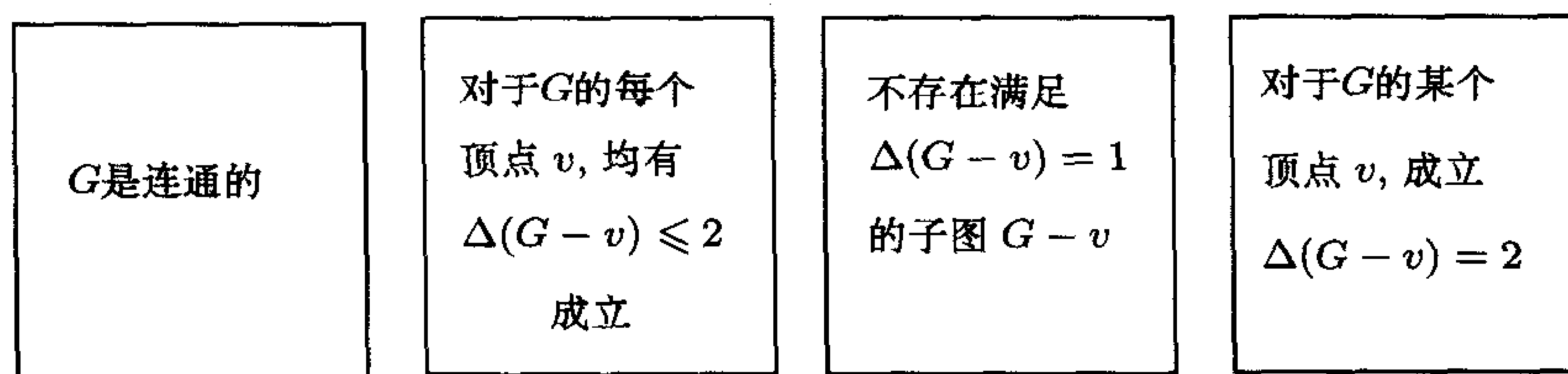



图 3.45 习题 3.37 中的卡片纸牌

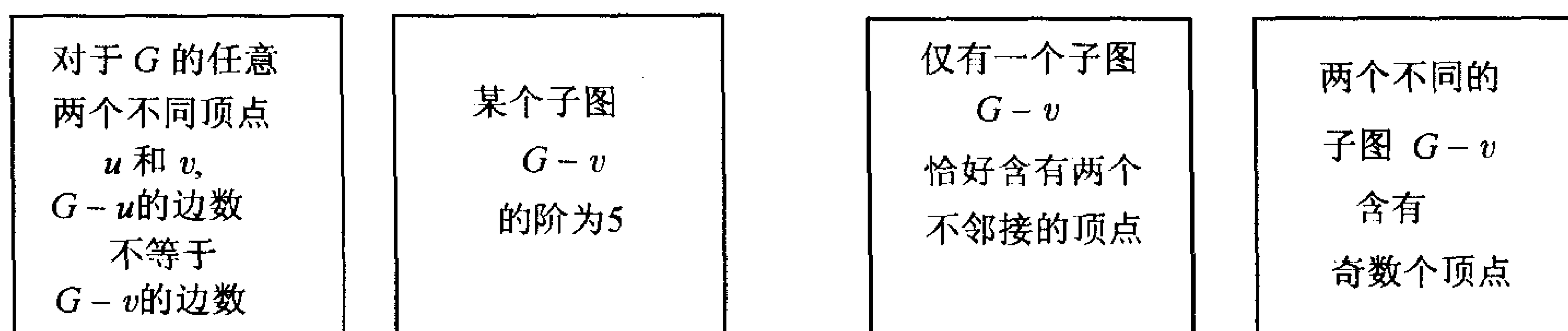
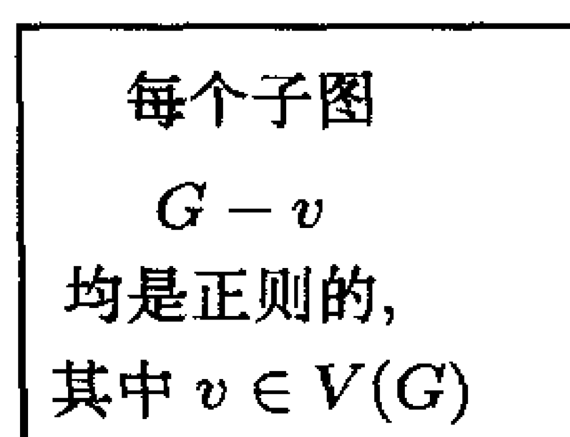



图 3.46 习题 3.38 中的卡片纸牌　　图 3.47 习题 3.39 中的卡片纸牌

3.43 列举一副卡片纸牌，使得该纸牌恰有两个阶至少为 3 的解.

3.44 列举一副卡片纸牌，它由三张卡片组成. 该纸牌无解，但是由它的任意两张卡片组成的纸牌至少有一个解.



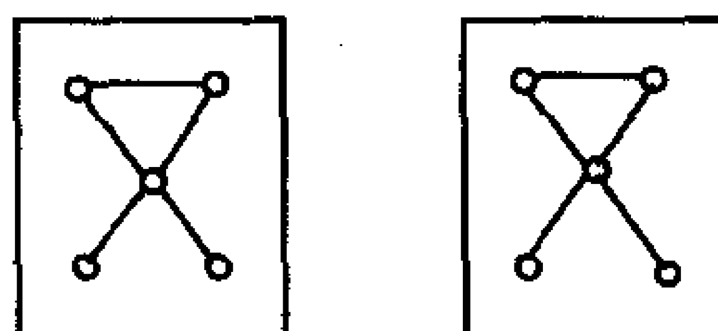



图 3.48 习题 3.40 中的卡片纸牌　　图 3.49 习题 3.41 中的卡片纸牌

# 第 4 章　树

## 4.1　割　　边

假如在人口稀少的乡村地区, 有些乡村道路可以让我们在某些村落之间直接走动. 因为在这些道路上车辆通常很少, 所以这个地区所修建的道路非常少. 假如我们已经有了图 4.1 所示的地理位置图, 其中有 7 个乡村 (分别记为 $v_1, v_2, \cdots, v_7$) 和 6 条道路. 这个地图不仅能够用图 4.1 中图 $G$ 来建立模型, 而且该地图本质上就是一个图.

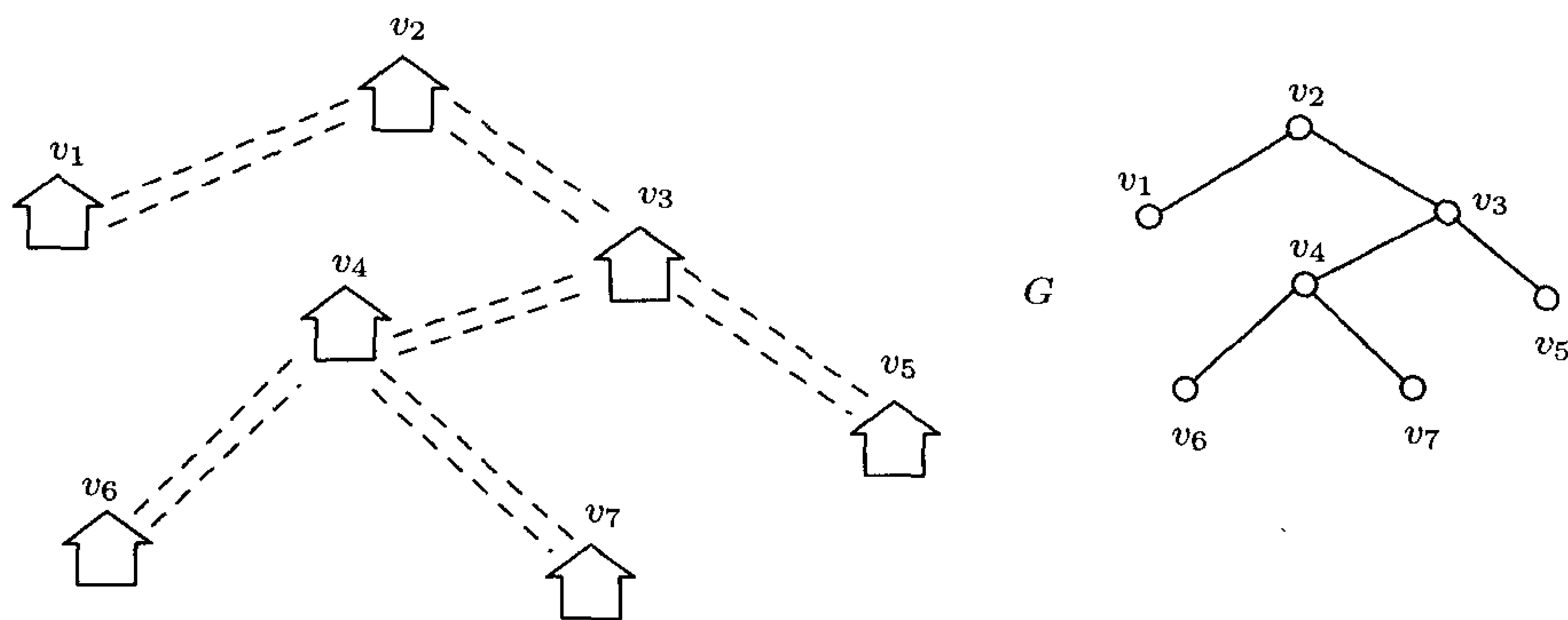



图 4.1　乡村和道路的图模型

图 4.1 中的地图 (和图) 有两个有趣的特征. 你或许曾听说过, 人在旅途, 问路于当地人:"怎样才能到达那里呢?", 答曰:"你从这里到不了那里." 比较幸运的是, 对于图 4.1 中的乡村, 我们不会遇到那样的情形. 实际上, 沿着乡村道路, 能够到达任何其他乡村. 换句话说, 图 4.1 所示的图 $G$ 是连通的. 尽管这是一个非常有积极意义的特征 (可以说是一个本质特征), 但该地图和图也有一个消极的特征, 即当由于道路修建、洪水泛滥、暴风雪肆虐等原因必须关闭某条道路时, 就不可能到达每个乡村了. 对图 4.1 中的图 $G$ 来说, 这意味着, 若我们移去 $G$ 的任一条边, 则所得到的图是不连通的. 具有这种性质的边在图论中起着非常重要的作用.

回顾前文知, 若 $e$ 是图 $G$ 的一条边, 则 $G-e$ 是 $G$ 的一个子图, 其顶点集与 $G$ 的顶点集相同, 边集是由除 $e$ 之外的 $G$ 的所有边构成. 类似地, 若 $X$ 是由 $G$ 的若干边构成的集合, 则 $G-X$ 是 $G$ 的一个子图, 其顶点集与 $G$ 的顶点集相同, 其边集是

由除 $X$ 中那些边之外的 $G$ 的所有边构成. 如果 $G$ 的阶是 $n$, 那么 $G-E(G)$ 是空图 $\overline{K}_n$.

连通图 $G$ 的一条边 $e=uv$ 称为是 $G$ 的**割边** (**bridge**), 如果 $G-e$ 是不连通的. 在此情形下, $G-e$ 必然恰好包含两个连通分支, 一个包含 $u$, 一个包含 $v$. 若顶点 $v$ 的度是 1, 则在 $G-e$ 中, 包含 $v$ 的连通分支就是一个顶点, 此时, $G-v$ 仅含有一个连通分支. 换句话说, 若 $v$ 是连通图 $G$ 的一个端点, 则 $G-v$ 是连通的. 边 $e$ 称为是不连通图 $G$ 的**割边**, 如果 $e$ 是 $G$ 的某个连通分支的割边. 在图 4.2 的不连通图 $G$ 中, 边 $u_2u_5, v_3v_4, v_4v_5, w_1w_2$ 都是割边 (用粗线标出), 其他的边均不是割边.

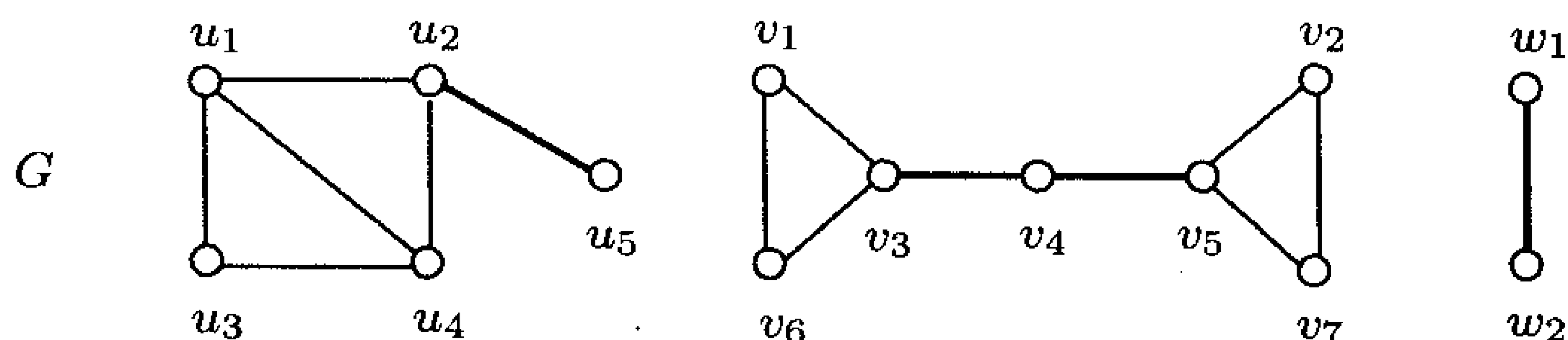



图 4.2 具有 4 个割边的不连通图

下面这个定理可以让我们很容易地判断出图中哪些边是割边.

**定理 4.1** 图 $G$ 的边 $e$ 是割边当且仅当 $e$ 不在 $G$ 的任一个圈上.

**证** [逆否证法] 设 $e=uv$ 是 $G$ 的一条边, 但不是割边. 设 $e$ 属于 $G$ 的某个连通分支 $G_1$. (当然, 若 $G$ 是连通的, 则 $G_1=G$.) 可以看出, $G_1-e$ 是连通的. 因此 $G_1-e$ 中存在一条 $u-v$ 路 $P$. $P$ 与 $e$ 构成了 $G_1$ 中一个包含 $e$ 的圈, 因而也是 $G$ 中的圈.

现在来验证上述定理的逆. 设 $e=uv$ 在 $G$ 的某个圈 $C$ 上, 并且 $e$ 和 $C$ 属于 $G$ 的连通分支 $G_1$. 则 $G_1$ 中存在一条不含 $e$ 的 $u-v$ 路 $P'$. 我们来证明 $G_1-e$ 是连通的. 设 $x$ 和 $y$ 是 $G_1-e$ 的任意两个顶点. 下面证明 $x$ 和 $y$ 在 $G_1-e$ 中是连通的. 因为 $G_1$ 是连通的, 所以 $G_1$ 包含一条 $x-y$ 路 $Q$. 若 $e$ 不属于 $Q$, 则 $Q$ 也是 $G_1-e$ 中的一条 $x-y$ 路. 若 $e$ 属于 $Q$, 则在 $Q$ 中用 $u-v$ 路 $P'$ 来代替 $e$, 就得到一条 $x-y$ 链. 根据定理 1.6, $G_1-e$ 包含一条 $x-y$ 路. ■

图 4.1 中的图 $G$ 是连通的, 并且不包含圈. 因此, $G$ 的每条边都是割边. 具有这两个性质的图是特别重要的, 也将是本章的主要讨论对象.

## 习题

4.1 列举一个非平凡图 $G$, $G$ 具有如下性质: (1) $G$ 的每条割边都邻接到一条非割边的边, (2) $G$ 的每条非割边的边都邻接到一条割边,(3) $G$ 包含两条不邻接的割边,(4) $G$ 的任何两条非割边的边都是邻接的.

4.2 证明: 所有顶点的度都是偶数的连通图不含割边.

4.3 证明: 如果 $uv$ 是图 $G$ 的割边, 则 $G$ 中存在唯一的 $u-v$ 路.

4.4 设 $G$ 是连通图, $e_1, e_2$ 是 $G$ 的两条边. 证明: $G - e_1 - e_2$ 有三个连通分支当且仅当 $e_1$ 与 $e_2$ 都是 $G$ 中的割边.

4.5 (a) 设 $G$ 为 $n$ 阶连通图, 且 $G$ 的每条边都是割边. $G$ 的边数是多少? 并给予解释.

(b) 设 $G$ 为 $n$ 阶的不连通图, 有 $k$ 个连通分支, 且 $G$ 的每条边都是割边. $G$ 的边数是多少? 并给予解释.

4.6 设 $G$ 是阶为 $n \geqslant 3$ 的连通图, 且不含有割边. 假设对于 $G$ 的每条边 $e$, $G - e$ 的每条边都是割边. $G$ 有什么结构? 并给予证明.

## 4.2 树

一个图 $G$ 称为是**无圈的 (acyclic)**, 如果 $G$ 不含有圈. **树 (tree)**是无圈的连通图. 因此图 4.1 中的图 $G$ 是树. 在讨论树的问题时, 我们经常用 $T$ (而不是 $G$) 来记一个树. 由定理 4.1 可知, 树的每条边都是割边. 事实上, 我们可以把树定义为每条边都是割边的连通图. 图 4.3 列出了 6 个 6 阶的所有树. 树 $T_1 \cong K_{1,5}$ 是一个星图, $T_6 \cong P_6$ 是一条路. 图 4.3 中树的端点数在 2 到 5 之间. 对此我们有进一步的结论, 恰好包含两个非端点 (它们必然是邻接的) 的树称为是**双星 (double star)**(图). 图 4.3 中树 $T_2$ 和 $T_3$ 是双星.

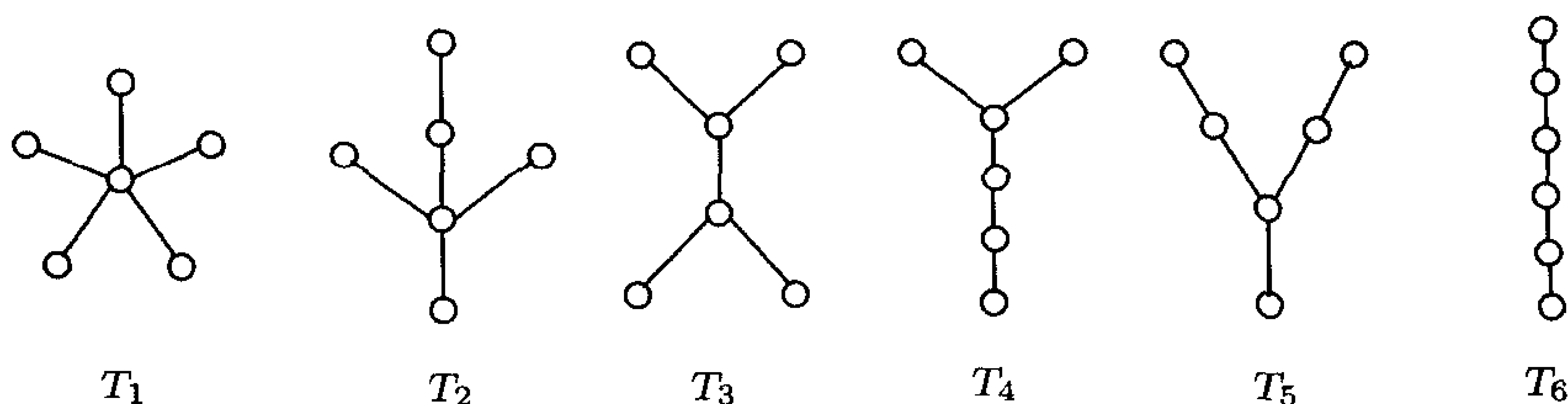



图 4.3 阶为 6 的树

另一种常见的树类是由 “毛毛虫” 构成. **毛毛虫 (caterpillar)**是阶至少为 3 的树, 并且移去该树的端点就会产生一条路 (称为是毛毛虫的**脊骨 (spine)**). 因此路, 星 (阶至少为 3), 以及双星都是毛毛虫. 图 4.3 所示的树都是毛毛虫; 图 4.4 所示的树 $T'$ 和 $T''$ 也是毛毛虫, 但 $T'''$ 不是.

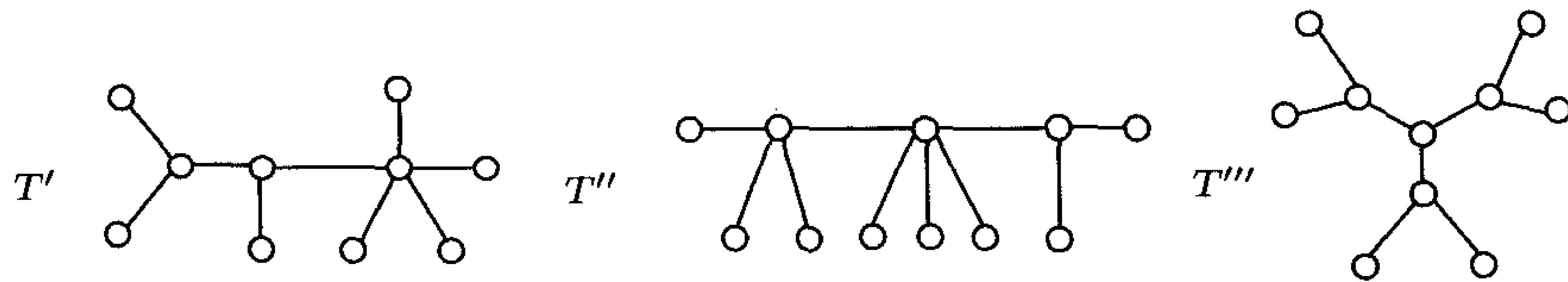



图 4.4 两个毛毛虫和一个不是毛毛虫的树

在有些情形下，选择树 $T$ 的一个顶点，并指定它为 $T$ 的**根 (root)**，这种做法往往会带来很多方便. 此时 $T$ 就成为一个**有根树 (rooted tree)**. 通常用如下方法来画有根树 $T$: $T$ 的根 $r$ 画在顶部，对于其他顶点，根据它们到 $r$ 的距离，依次画在下面，且把与 $r$ 距离相同的顶点画在同一水平线上. 图 4.5 给出了有根树的一个例子.

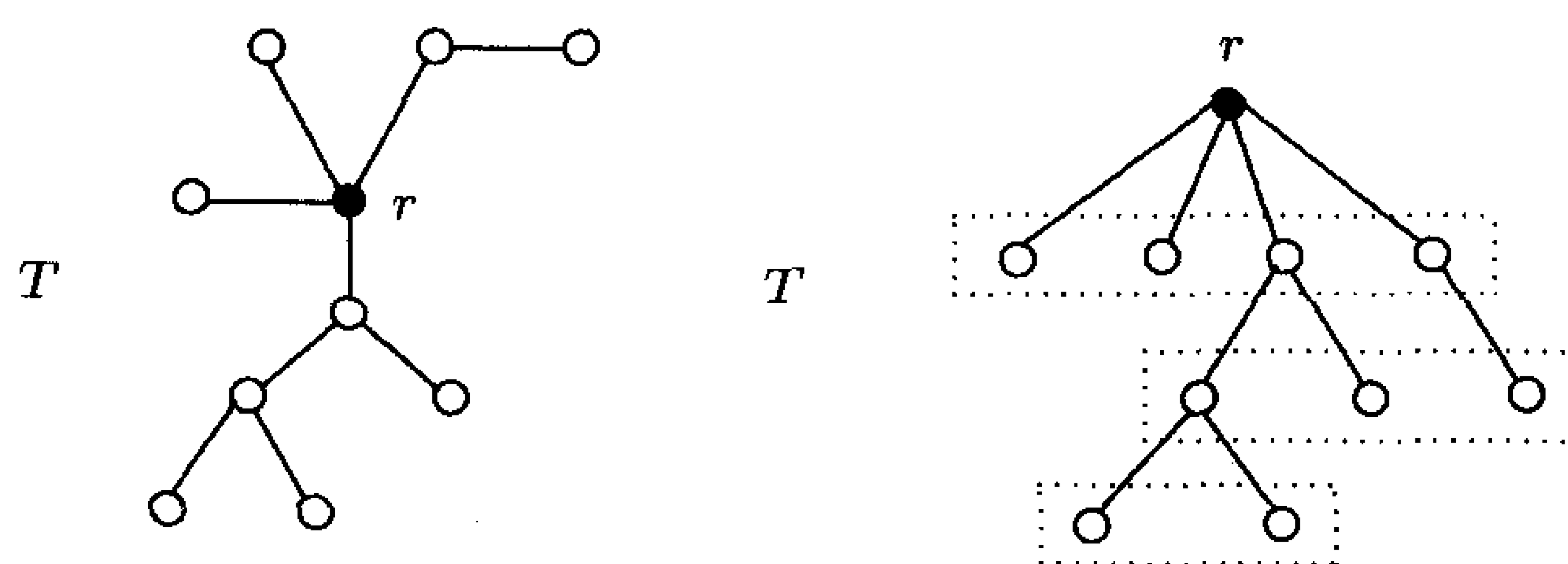



图 4.5 一个有根树

对于标号树 $T$ 的两个不同的顶点 $r$ 和 $s$，把 $T$ 的根指定在 $r$ 和指定在 $s$ 所得到的两个有根树被认为是不同的 (即使存在从 $T$ 到其自身的，可把 $r$ 映射到 $s$ 的同构映射).

无圈图称为是**森林 (forest)**. 因此，森林的每个连通分支显然就是一个树. 有一个事实可以区分树和森林，即树要求是连通的，而森林并不要求是连通的. 由于树是连通的，所以树的任意两个顶点都被一条路连接. 事实上，我们还可以做进一步地补充.

**定理 4.2** 图 $G$ 是树当且仅当 $G$ 的任何两个顶点都被唯一的路连接.

**证** [反证法] 设 $G$ 是一个树，则由定义可知 $G$ 是连通的. 因此 $G$ 的每两个顶点之间都会连接一条路. 假设 $G$ 的某两个顶点之间连接了两条不同的路，则可由这两条路的全部或者部分边产生一个圈，导致矛盾.

现在来证明充分性，设 $G$ 的每两个不同顶点之间都被唯一的路连接. 显然，$G$ 是连通的. 假设 $G$ 含有一个圈 $C$. 设 $u$ 和 $v$ 是 $C$ 的两个不同的顶点，因此 $C$ 就确定了两条不同的 $u-v$ 路，导致矛盾. 所以 $G$ 是无圈的，从而 $G$ 是树. ■

我们已经发现，图 4.3 和图 4.4 中的每个树都至少有两个端点. 事实上，所有非平凡树都有这个性质.

**定理 4.3** 每个非平凡树至少有两个端点.

**证** [直接证法] 设 $T$ 是一个非平凡树，并且在 $T$ 的所有路中，设 $P$ 是一条最长的路. 不妨设 $P: u=u_0, u_1, \cdots, u_k=v$ 为一条 $u-v$ 路，其中 $k \geqslant 1$. 我们来证明 $u$ 和 $v$ 是 $T$ 的端点. 显然，$u$ 和 $v$ 都不会邻接到不在 $P$ 上的任何一个顶点，否则将产生一条更长的路. 当然，$u$ 邻接到 $u_1$，$v$ 邻接到 $u_{k-1}$，另外，由于 $T$ 不含圈，所以 $u$ 和 $v$ 都不会邻接到 $P$ 上的其他任何顶点. 因此，$\deg u = \deg v = 1$. ■

作为该结果的一个主要的推论, 我们有, 若 $T$ 是一个阶为 $k+1 \geqslant 2$ 的树, 则对于 $T$ 的每个端点 $v$, 子图 $T-v$ 是一个阶为 $k$ 的树. 这个推论对于树的相关结论的归纳证明是很有用的. 我们把该想法应用于树的另一个重要性质的证明, 即每个树的边数都比它的阶少 1.

**定理 4.4**　*每个 $n$ 阶树的边数是 $n-1$.*

**证**　[归纳法] 我们对 $n$ 进行归纳. 1 阶树是唯一的, 即 $K_1$, 其边数位 0. 因此, 对于 $n=1$, 结论是正确的. 假设对于正整数 $k$, 每个 $k$ 阶树的边数都是 $k-1$. 设 $T$ 是一个 $k+1$ 阶树. 由定理 4.3 可知, $T$ 至少含有两个端点. 设 $v$ 是其中一个端点. 则 $T'=T-v$ 是一个阶为 $k$ 的树. 由归纳假设知, $T'$ 的边数是 $m=k-1$. 由于 $T$ 恰好比 $T'$ 多一条边, 所以 $T$ 的边数是 $m+1=(k-1)+1=(k+1)-1$, 从而结论成立. ■

下面举例阐述了我们刚刚讨论的一些想法.

**例 4.5**　*设 $T$ 为某个 13 阶树, 其顶点的度为 1,2,5. 如果 $T$ 恰有 3 个度为 2 的顶点, 那么 $T$ 有多少个端点?*

**解**　由于 $T$ 有 3 个度为 2 的顶点, 故 $T$ 就有 10 个度为 1 或 5 的顶点. 设 $x$ 是 $T$ 的端点数. 则 $T$ 含有 $10-x$ 个度为 5 的顶点. 因为 $T$ 含有 13 个顶点, 由定理 4.4 可知, $T$ 有 12 条边. 对 $T$ 的所有顶点的度求和, 并应用图论第一定理, 可以得到

$$\begin{aligned} 1\times x+2\times 3+5\times(10-x) &= 2\times 12 \\ x+6+50-5x &= 24 \\ x &= 8. \end{aligned}$$

◇

注意到, 画出一个 13 阶的树 (该树有三个度为 2 的顶点, 两个度为 5 的顶点, 8 个端点) 并不能回答上面问题. 它仅仅说明我们所画的树有 8 个端点, 但未必说明例 4.5 中的树 $T$ 有 8 个端点. 但例题的解法告诉我们, 具有例 4.5 所描述性质的每个树都有 8 个端点.

根据森林的阶及其连通分支的个数, 我们可以确定该森林的边数.

**推论 4.6**　*阶为 $n$ 且有 $k$ 个连通分支的每个森林有 $n-k$ 条边.*

**证**　[直接证法] 设 $F$ 是一个阶为 $m$ 的森林, 且 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 是 $F$ 的连通分支, 其中 $k\geqslant 1$. 设 $G_i$ 的阶为 $n_i$, 边数为 $m_i$, 其中 $1\leqslant i\leqslant k$. 则有 $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$, $m=\sum_{i=1}^{k} m_i$. 由于每个连通分支 $G_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 都是树, 所以根据定理 4.4 可知, $m_i=n_i-1$. 因此

$$m=\sum_{i=1}^{k} m_i=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=n-k.$$

■

根据定理 4.4, 我们已知 $n$ 阶树是包含 $n-1$ 条边连通图. 实际上, 每个 $n$ 阶连通图都至少包含 $n-1$ 条边. 尽管可以用一些不同的方法来证明这个结论, 我们这

里采用最小反例证法, 目的是为了说明这种证明方法的有效性. (最小反例证法将在附录 3 中给予解释.)

**定理 4.7** 每个 $n$ 阶连通图的边数至少是 $n-1$.

**证** [最小反例证法] 易见定理对阶分别为 1, 2, 3 的连通图成立. 现在假设定理不成立, 则存在一个具有最小阶 (设为 $n$) 的连通图 $G$, 它的边数 $m$ 至多是 $n-2$. 显然, $n \geqslant 4$. 由于 $G$ 是一个非平凡的连通图, 所以 $G$ 不含孤立顶点.

我们断言: $G$ 必含一个端点. 假设 $G$ 的每个顶点的度至少是 2, 则 $G$ 的顶点的度和是 $2m \geqslant 2n$. 因此, $m \geqslant n \geqslant m+2$, 导致矛盾. 所以 $G$ 含有一个端点.

设 $v$ 是 $G$ 的一个端点. 由于 $G$ 是连通的, 并且阶为 $n$, 边数为 $m \leqslant n-2$; 所以 $G-v$ 是连通的, 并且阶为 $n-1$, 边数为 $m-1 \leqslant n-3$. 这与上述对 $G$ 的假设矛盾, 即 $G$ 是边数至少比阶小 2 且阶最小的连通图. ■

设 $G$ 是一个阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的树. 由树的定义和定理 4.4 可知, $G$ 有如下三个性质: (1) $G$ 是连通的, (2) $G$ 是无圈的, (3) $m=n-1$. 事实上, 若图 $G$ 的阶为 $n$, 边数为 $m$, 且满足这三个性质中的任意两个, 则 $G$ 是一个树.

**定理 4.8** 设 $G$ 是阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图. 若 $G$ 满足如下性质中的任意两个

(1) $G$ 是连通的, (2) $G$ 是无圈的, (3) $m=n-1$,

则 $G$ 是树.

**证** [反证法, 直接证法] 首先, 若 $G$ 满足 (1) 和 (2), 则由定义可知 $G$ 是一个树. 因此, 我们只需要假设 $G$ 满足 (1) 和 (3), 或者满足 (2) 和 (3) 即可. 下面考虑这两种情形.

**情形 1** $G$ 满足 (1) 和 (3). 由于 $G$ 是连通的, 只需证明 $G$ 是无圈的. 假设 $G$ 含有一个圈 $C$. 设 $e$ 是 $C$ 的一条边, 则由定理 4.1 可知, $e$ 不是 $G$ 的割边. 故 $G-e$ 是一个连通图, 并且其阶为 $n$, 边数为 $n-2$; 与定理 4.7 矛盾. 因此, $G$ 是无圈的, 从而是树.

**情形 2** $G$ 满足 (2) 和 (3). 由于 $G$ 是无圈的, 只需证明 $G$ 是连通的. 因为 $G$ 满足 (2) 和 (3), 所以 $G$ 是一个森林, 且其阶为 $n$, 边数为 $m=n-1$. 由推论 4.6 可知, $G$ 的边数为 $n-k$, 其中 $k$ 是 $G$ 的连通分支的个数. 因此 $n-1=n-k$, 可知 $k=1$. 所以 $G$ 是连通的. ■

如果 $T$ 是一个 $k$ 阶树, 很显然 $T$ 同构于 $K_k$ 的一个子图. 易见, $\delta(K_k)=k-1$. 事实上, $T$ 不仅仅同构于 $K_k$ 的一个子图, 而且同构于最小度至少为 $k-1$ 的任意图的一个子图.

**定理 4.9** 设 $T$ 为 $k$ 阶树. 若图 $G$ 满足 $\delta(G) \geqslant k-1$, 则 $T$ 同构于 $G$ 的某个子图.

**证** [归纳证法] 我们对 $k$ 进行归纳. 当 $k=1$ 时, 由于每个图都至少含有一个顶点, 结论显然成立. 当 $k=2$ 时, 由于不含孤立点的每个图都会含有边, 所以结论也成立.

假设对阶为 $k-1$ $(k \geqslant 3)$ 的每个树 $T'$, 以及最小度至少为 $k-2$ 的每个图 $H$, $T'$ 同构于 $H$ 的某个子图. 现在设 $T$ 为 $k$ 阶树, $G$ 为满足 $\delta(G) \geqslant k-1$ 的图. 我们来证明 $T$ 同构于 $G$ 的某个子图.

设 $v$ 是 $T$ 的一个端点, $u$ 是 $T$ 中与 $v$ 邻接的顶点. 则 $T-v$ 是 $k-1$ 阶树. 由于 $\delta(G) \geqslant k-1 \geqslant k-2$, 所以由归纳假设可知: $T-v$ 同构于 $G$ 的某个子图 $F$. 设 $u'$ 是与 $T$ 中 $u$ 相对应的 $F$ 的顶点. 由于 $\deg_G u' \geqslant k-1$, 以及 $F$ 的阶为 $k-1$, 所以 $u'$ 一定邻接到 $G$ 的某个不属于 $F$ 的顶点 $w$ (见图 4.6). 因此, $T$ 同构于 $G$ 的某个子图. ■

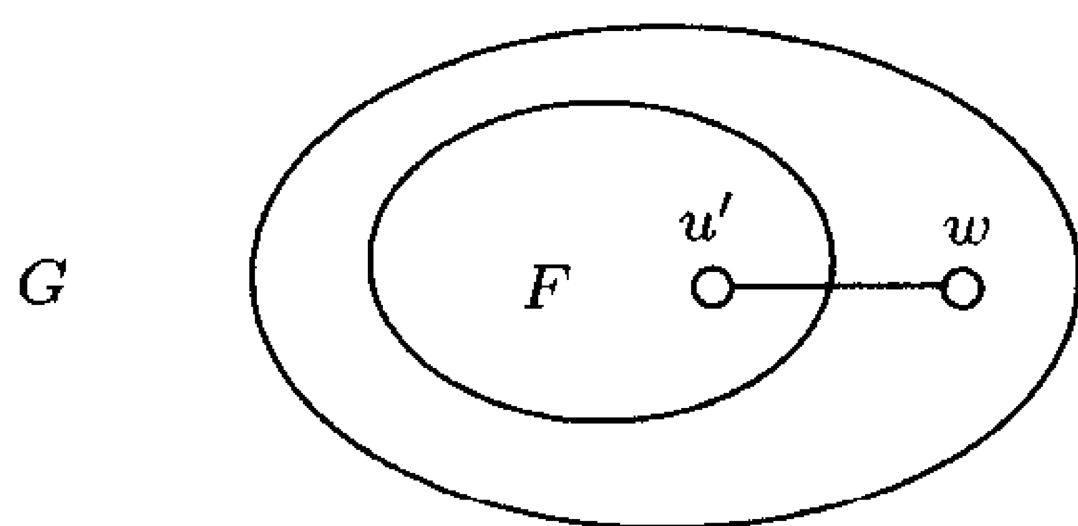



图 4.6 定理 4.9 证明中的图 $G$ 的子图 $T-v$

## 习题

4.7 (a) 画出所有 5 阶树.

(b) 画出所有 6 阶森林.

4.8 证明: 若图 $G$ 的每个顶点的度至少是 2, 则 $G$ 含有一个圈.

4.9 说明一个阶为 $n$ 且边数为 $n-1$ 的图未必是一个树.

4.10 对于下面的三种情形, 分别举出一个例子或者说明为什么不存在这样的例子.

(a) 一个图, 它不是树, 但它的每条边都是割边.

(b) 一个 4 阶树, 它的补图不是树.

(c) 一个树 $T$, $T$ 恰好包含 3 个非端点的顶点, 但 $T$ 不是毛毛虫.

4.11 对 $k=2,3,4$, 分别列举一个树 $T_k$, 要求 $\Delta(T_k)=k$, 并且具有相同度的两个顶点不会邻接到同一个顶点.

4.12 (a) 列举一个树 $T$ 及其一条边 $e$, 要求 $T-e$ 的两个连通分支是同构的.

(b) 说明为什么不存在这样的树 $T$, 它包含两个不同的边 $e_1$ 和 $e_2$, 使得 $T-e_1$ 的两个连通分支是同构的, 且 $T-e_2$ 的两个连通分支也是同构的.

4.13 某个 21 阶的树 $T$ 仅含有度为 1, 3, 5, 6 的顶点. 若 $T$ 含有 15 个端点, 一个度为 6 的顶点, 则 $T$ 含有多少个度为 5 的顶点?

4.14 已知某个 35 阶的树 $T$ 含有 25 个度为 1 的顶点, 2 个度为 2 的顶点, 3 个度为 4 的顶点, 1 个度为 5 的顶点, 和 2 个度为 6 的顶点. 它还含有 2 个具有相同 (未知的) 度 $x$ 的顶点. $x$ 是多少?

4.15 已知某树 $T$ 含有 50 个端点, 并且还含有相同个数的度分别为 2, 3, 4, 5 的顶点, 此外不再含有度大于 5 的顶点. $T$ 的阶是多少?

4.16 (a) 列举一个 6 阶树, 该树含有 4 个度为 1 的顶点, 2 个度为 3 的顶点. (只有一个树具有这个性质.)

(b) 找出满足下述条件的所有树 $T$, 要求 $T$ 的 2/3 顶点的度为 1, 其余 1/3 顶点的度为 3.

4.17 (a) 列举一个 8 阶树, 该树含有 6 个度为 1 的顶点, 2 个度为 4 的顶点. (只有一个树具有这个性质.)

(b) 找出具有如下性质的所有树 $T$, $T$ 的 75% 顶点的度为 1, 其余 25% 顶点的度为 4.

(c) 找出具有如下性质的所有树 $T$, $T$ 的 75% 顶点的度为 1, 其余 25% 顶点的度是另一个固定的数.

(d) 找出具有如下性质的所有树 $T$, $T$ 的 25% 顶点的度为 1, 其余 75% 顶点的度是另一个固定的数.

4.18 某个 $n$ 阶树 $T$ 仅含有度为 1, 3 的顶点. 证明 $T$ 有 $(n-2)/2$ 个度为 3 的顶点.

4.19 设 $T$ 是阶为 $n$ 且边数为 $m$ 树, 且 $T$ 有 $n_i$ 个度为 $i$ $(i \geqslant 1)$ 的顶点. 则

$$n = \sum_i n_i, \quad 2(n-1) = 2m = \sum_i in_i.$$

(a) 证明: $n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 + 4n_6 + \cdots$.

(b) 假设树 $T$ 有 3 个度为 2 的顶点, 5 个度为 3 的顶点, 2 个度为 4 的顶点, 此外, $T$ 不再含有度大于或等于 5 的顶点. 根据 (a) 中的公式, 问 $T$ 有多少个端点?

4.20 证明或反驳:

(a) 若 $G$ 是阶为 $n$ 且边数为 $m$ 图, 且 $G$ 含有 3 个圈, 则 $m \geqslant n+2$.

(b) 恰有两个正则树.

4.21 设 $T$ 是一个 $n$ 阶树. 证明: $T$ 同构于 $\overline{C}_{n+2}$ 的一个子图.

4.22 设 $T$ 是一个 $n$ 阶树. 证明: $T$ 的补图 $\overline{T}$ 的边数与 $K_{n-1}$ 的边数相同.

4.23 找出满足如下性质的所有树 $T$, 要求 $\overline{T}$ 是树.

4.24 (a) 找出阶为 $n \geqslant 4$ 的所有图 $G$, 要求由 $G$ 的任意 3 个顶点所诱导的子图都是树. 若不存在这样的图, 请说明理由.

(b) 提出 (a) 中问题的一个推广, 并解决之.

## 4.3 最小生成树问题

假如图 4.1 所描述的 7 个乡村真地存在, 这些乡村很有可能是一个接着一个发展的 (按时间); 当一个新乡村在发展的时候, 会修建一条新的道路来连接该乡村与

前面已经开发过的乡村. 例如, 假设乡村 $v_1, v_2, v_3$ 已经存在, $v_1$ 和 $v_2$, $v_2$ 和 $v_3$ 之间分别存在一条道路. 此外, 还假设社区 $v_4$ 也发展成了乡村, 则铺设一条道路来连接 $v_4$ 与 $v_1, v_2, v_3$ 中的某一个也是非常合理的. 当然, 在 $v_4$ 与某条已有道路的中间某个位置建一条道路, 也可能更为合理; 这样可能为此交叉处带来一个新的发展机会. 但是, 我们假设这种情形不会发生. 正如人的一生中有许多决定, 决定修建哪一条道路更多地是要考虑财政因素.

另一方面, 假设最初乡村 $v_1, v_2, \cdots, v_7$ 中的任意两个之间都不存在公路 (这种情形也可能发生, 在奥运会即将到来之际, 奥运村建了 7 栋宿舍, 为参加运动员提供住宿). 那么就要在这些宿舍之间铺路. 铺设哪些路很可能也要考虑财政因素. 在进一步讨论之前, 我们看一个新的概念.

若一个 $n$ 阶连通图 $G$ 不含圈, 则 $G$ 是一个树. 另一方面, 假设连通图 $G$ 含有圈, 并设边 $e_1$ 属于 $G$ 的一个圈. 根据定理 4.1, $e_1$ 不是割边, 且 $G - e_1$ 是连通的. 如果 $G - e_1$ 含有圈, 则设边 $e_2$ 属于 $G - e_1$ 的一个圈, 那么 $G - e_1 - e_2$ 是连通的. 最后我们得到 $G$ 的一个边集合 $X = \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$, 它使得 $G - X$ 是一个树. 上述所构造的树 $G - X$ 是 $G$ 的一个子图, 并且与 $G$ 有相同的顶点集.

我们从另一个角度看上述的发现. 设 $G$ 是连通图. 考虑顶点集为 $V(G)$ 的空图 $H$. 把 $G$ 的一条边 $f_1$ 加到 $H$ 上; 再把 $G$ 的另一条边 $f_2$ 加到 $H$ 上; 接下来再把 $G$ 的另一条边 $f_3$ 加到 $H$ 上, 其中 $f_3 \notin \{f_1, f_2\}$, 并且保证不产生圈. 我们继续上面操作, 直到把 $G$ 的边 $f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}$ 加到 $H$ 上, 产生一个边数为 $n-1$ 且不含圈的 $n$ 阶图 $F$. 根据定理 4.8, $F$ 是一个树, 其中 $V(F) = V(G)$. 我们知道, 用这种方法构造树是可行的, 因为选择上面所提到的 $G - X$ 的边即可.

我们已经给出了构造树 $T$ 的两种方法, 其中 $T$ 是给定连通图 $G$ 的子图, 且 $V(T) = V(G)$. 回顾前文, 图 $G$ 的子图 $H$ 是 $G$ 的一个**生成子图**, 如果 $H$ 包含 $G$ 的每个顶点. 若连通图 $G$ 的一个生成子图 $H$ 是一个树, 则称 $H$ 是 $G$ 的一个**生成树** **(spanning tree)**. 对于图 4.7 中连通图 $G$, 它的两个不同生成树 $T_1$ 和 $T_2$ 也在图 4.7 中列出. 我们现在就得到了如下定理.

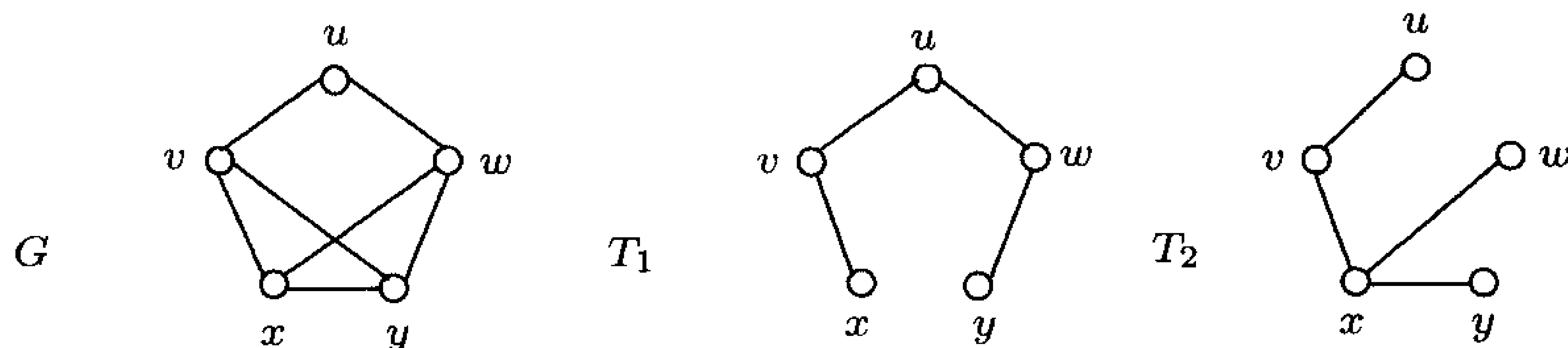



图 4.7 图的两个生成树

**定理 4.10** 每个连通图都含有一个生成树.

我们再一次回到在图 4.1 中所考虑的例子, 其中有 7 个乡村和 6 条公路. 用来描述此地理位置的图就是一个树, 因此可以在任意两个乡村之间走动. 实际上, 任意两个乡村之间都只存在唯一的路. 例如, 在乡村 $v_1$ 和 $v_6$ 间行走, 即使我们不愿意, 但还是必须经过 $v_2, v_3, v_4$. 所以, $v_1$ 和 $v_6$ 之间的旅程是不方便的. 当然, 为了使该旅程更加方便些, 我们总可以修建一条新的公路 (例如, 在 $v_1$ 和 $v_6$ 之间). 这样做可能需要比较多的费用 (可能是一大笔钱). 在最初阶段, 如何确定图 4.1 中的 6 条公路就是需要修建的那几条呢? 无论修建哪些路都会产生一个连通图. 若所得到的图含有一个圈, 则图中就有一些不是割边的边. 换句话说, 若我们的主要目的是得到一个连通图, 则用较少的费用修建公路就可以达到这个目的, 并且所得到的图是一个树. 但是如何来选择那 6 条需要修建的特定公路呢?

假设存在一些乡村 (例如 $v_1, v_2, \cdots, v_7$), 我们想用尽可能少的费用来修建公路, 并使得最后所得到的图是连通的. 但是如何来做呢? 假定我们对每两个乡村间修建公路的造价都已经有了一个精确的估计. 如果某两个乡村间的公路造价过高 (例如, 该公路有可能经过流沙带、私有土地, 或者穿越或跨越一座高山), 那么我们就不再考虑修建这样的公路. 这个问题可以用过图来阐述.

设 $G$ 是连通图, 并且对它的每条边都分配一个数值, 该数值称为边的**成本 (cost)** 或**权值 (weight)**. 图 $G$ 的边 $e$ 的权值记为 $w(e)$. 在第 2 章中, 我们把这样的图称为**赋权图**. 对于 $G$ 的任一子图 $H$, $H$ 的**权值** $w(H)$ 定义为其边的权值和, 即

$$w(H) = \sum_{e \in E(H)} w(e).$$

我们要寻找 $G$ 的一个生成树, 其权值在 $G$ 的所有生成树中最小; 该生成树称为**最小生成树 (minimum spanning tree)**. 在连通赋权图中寻找最小生成树的问题称为**最小生成树问题 (Minimum Spanning Tree Problem)**.

最小生成树问题的重要性在于它在计算机网络、通信网络、运输网络设计方面的应用. Ronald L. Graham 和 Pavol Hell 在 1985 年研究过该问题的发展历史.(我们将在第 11 章再次见到 Graham.) 他们认为该问题最初是由 Otakar Borůvka 在 1926 年明确提出的, 问题的提出源于 Borůvka 在输电线网络的最节约设计方面的兴趣. Borůvka 还给出了这个问题的第一种解法. 在 Borůvka 之前, 人类学家 Jan Czekanowski 在研究分类方案时所产生的想法很接近于最小生成树问题.

多年来, 应用一些算法, 最小生成树问题已经可以用不同的方法获得解决. 其中最为著名的一个算法是由 John Bernard Kruskal (生于 1928 年) 提出来的. Kruskal 出生于一个有 5 个子女的家庭, 3 个男孩, 2 个女孩. 所有男孩都成为了数学家. Kruskal 于 1954 年在普林斯顿获得了博士学位, 他的导师是 Paul Erdős 和 Roger Lyndon. 他积极从事研究, 其大部分工作都是关于数学和语言学的. 在其一生的大

部分时间内, 他都在贝尔实验室工作. 然而, 在获得博士学位的仅仅两年之后, 他就发表了包含上述算法的论文, 这使得他名声大振.

**Kruskal 算法**: 对于一个连通赋权图 $G$, $G$ 的生成树 $T$ 按下述方法构造: 对于 $T$ 的第一条边 $e_1$, 选择 $G$ 的任一权值最小的边; 对于 $T$ 的第二条边 $e_2$, 在 $G$ 剩下的边中选择权值最小的边; 对于 $T$ 的第三条边 $e_3$, 在 $G$ 剩下的边中选择权值最小的边, 且不与前面所选的边构成圈. 继续这种做法, 直至产生一个生成树.

图 4.8 演示了如何应用 Kruskal 算法构造连通赋权图的一个生成树. 我们现在来证明 Kruskal 算法在任一连通赋权图中都会产生一个最小生成树.

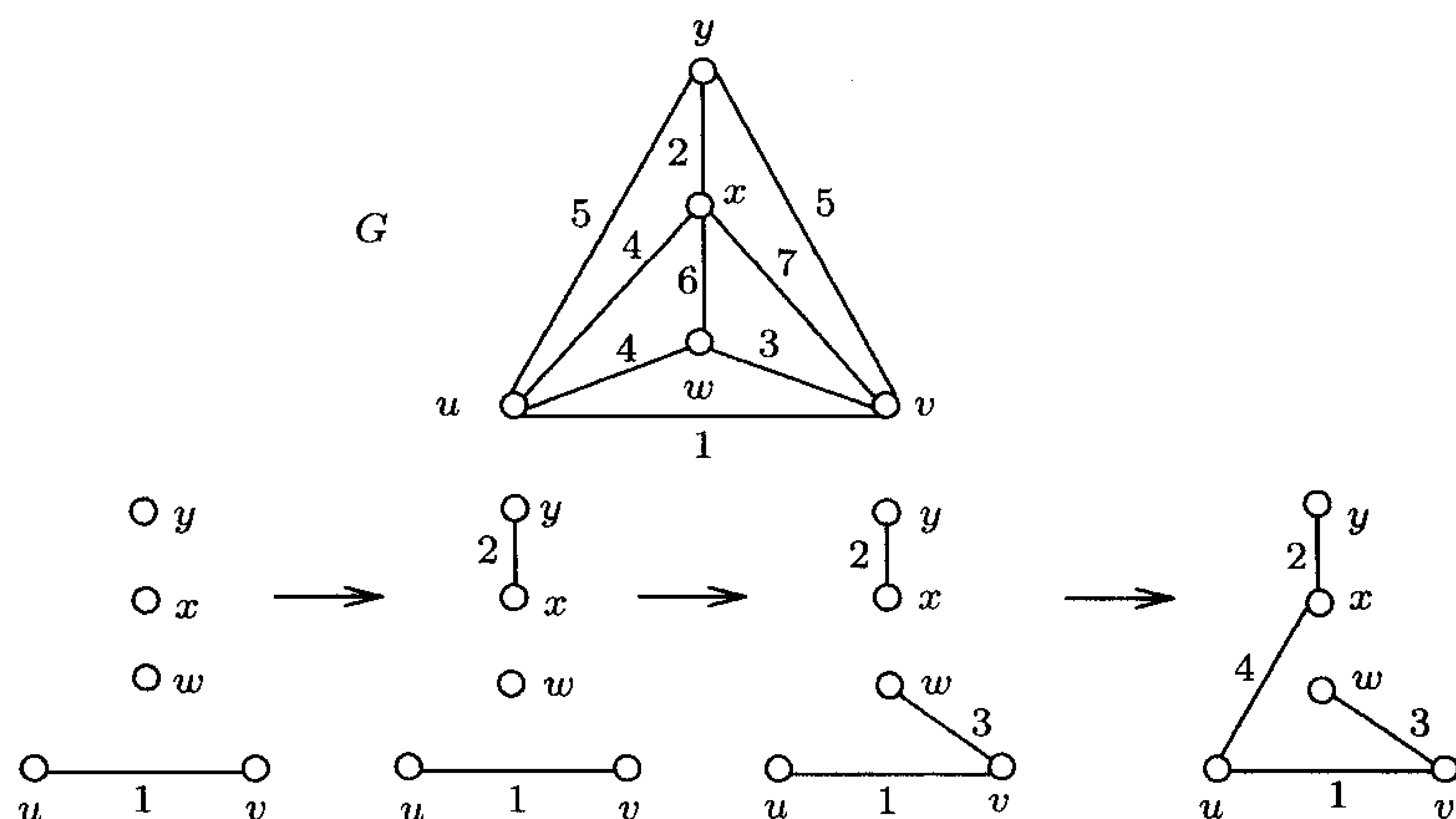



图 4.8 用 Kruskal 算法构造一个最小生成树

**定理 4.11** Kruskal算法在连通赋权图中产生一个最小生成树.

**证** [反证法] 设 $G$ 为 $n$ 阶连通赋权图, $T$ 是通过 Kruskal 算法获得的生成树, $T$ 的边是按照次序 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ 选择. 因此, $w(e_1) \leqslant w(e_2) \leqslant \cdots \leqslant w(e_{n-1})$, 且 $T$ 的权值为

$$w(T) = \sum_{i=1}^{n-1} w(e_i).$$

我们证明 $T$ 是 $G$ 的一个最小生成树. 假设 $T$ 不是最小生成树. 在 $G$ 的所有最小生成树中, 设 $H$ 是与 $T$ 有最多公共边的生成树. 由于 $H$ 与 $T$ 不同, 所以 $T$ 至少有一条不属于 $H$ 的边. 设 $e_i$ 为 $T$ 中第一条不属于 $H$ 的边. 若 $i > 1$, 则边 $e_1$, $e_2, \cdots, e_{i-1}$ 同时属于 $H$ 和 $T$. 定义 $G_0 = H + e_i$, 则 $G_0$ 含有一个圈 $C$. 由于 $T$ 不含圈, 所以 $C$ 上有一条不属于 $T$ 的边 $e_0$. 因此, 图 $T_0 = G_0 - e_0$ 是 $G$ 的生成树, 且

$$w(T_0) = w(H) + w(e_i) - w(e_0).$$

因为 $H$ 是 $G$ 的一个最小生成树, 所以可知 $w(H) \leqslant w(T_0)$. 从而 $w(H) \leqslant w(H) + w(e_i) - w(e_0)$, $w(e_0) \leqslant w(e_i)$. 根据 Kruskal 算法, 显然若 $i = 1$, 则 $w(e_0) = w(e_i)$. 假设 $i > 1$. 由 Kruskal 算法可知, $e_i$ 是 $G$ 除去边 $e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}$ 后的且不与这 $i-1$ 条边构成圈的权值最小的边. 由于 $e_0$ 不属于 $T$, 且把 $e_0$ 添加到边 $e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}$ 后也不会构成圈, 所以 $w(e_i) \leqslant w(e_0)$, 从而当 $i > 1$ 时也有 $w(e_i) = w(e_0)$. 因此 $w(T_0) = w(H)$, 从而 $T_0$ 也是 $G$ 的一个最小生成树. 然而, $T_0$ 与 $T$ 公共边的个数多于 $H$ 与 $T$ 公共边个数, 导致矛盾. ■

在连通赋权图中寻找最小生成树的另一个著名的算法是由 Robert Clay Prim (生于 1921 年) 提出来的. 像 Kruskal 一样, 他也是从普林斯顿 (1949 年) 获得博士学位的. 他是 Sandia 公司负责研究工作的副总裁. 有关算法的论文发表在 1957 年, 他也因此而出名.

**Prim 算法** 对一个连通赋权图 $G$, $G$ 的一个生成树 $T$ 由下述方法构造: 对于 $G$ 的任一顶点 $u$, 选择与 $u$ 关联的且权值最小的边作为 $T$ 的第一条边 $e_1$. 对于接下来的边 $e_2, e_3, \cdots, e_{n-1}$, 在与一条已选边只有一个公共顶点的所有边中, 选择权值最小的边.

图 4.9 演示如何用 Prim 算法构造连通赋权图的一个生成树. 同样, 通过 Prim 算法所获得的树也是最小生成树. 下面我们就来证明这一点.

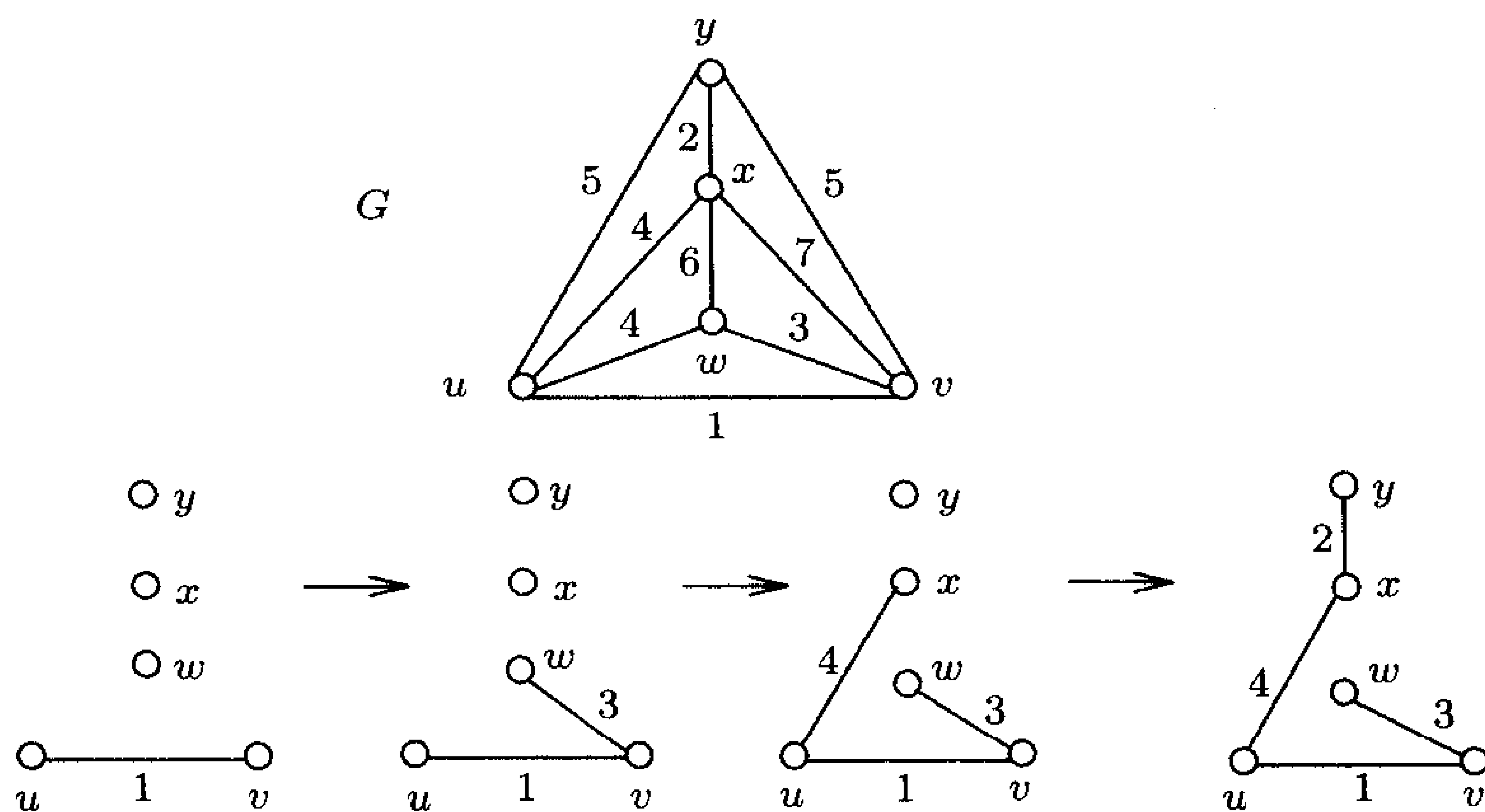



图 4.9 用 Prim 算法构造一个最小生成树

**定理 4.12** Prim算法在连通赋权图中产生一个最小生成树.

**证** [反证法] 设 $G$ 为 $n$ 阶非平凡连通赋权图, $T$ 是通过 Prim 算法所获得的生成树, $T$ 的边是按次序 $e_1$, $e_2$, $\cdots$, $e_{n-1}$ 选择, 并且 $e_1$ 与给定的顶点 $u$ 关联. 因此, $T$

的权值为

$$w(T)=\sum_{i=1}^{n-1}w(e_i).$$

假设 $T$ 不是最小生成树. 设 $\mathcal{H}$ 为与 $T$ 具有最多公共边的 $G$ 的所有最小生成树构成的集合. 根据假设, $T\notin\mathcal{H}$. 若 $\mathcal{H}$ 中的树都不包含 $e_1$, 则设 $H$ 为 $\mathcal{H}$ 中任一个树; 否则设 $H$ 为 $\mathcal{H}$ 中包含边 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 的一个树, 且 $\mathcal{H}$ 中没有同时包含边 $e_1, e_2, \cdots, e_{k+1}$ 的树, 其中 $k$ 为某个整数, $1\leqslant k<n-1$. 因此, $\mathcal{H}$ 中任一个树都不会同时包含边 $e_1, e_2, \cdots, e_{k+1}$, 其中 $0\leqslant k<n-1$. 若 $k=0$, 设 $U=\{u\}$; 若 $k\geqslant 1$, 设 $U$ 为如下 $k+1$ 个顶点构成集合, 其中每个顶点都与边 $e_1,e_2,\cdots,e_k$ 中至少一个关联. 根据 Prim 算法, $e_{k+1}$ 连接 $U$ 中一个顶点和 $V(T)-U$ 中一个顶点.

因此, 子图 $H+e_{k+1}$ 含有圈 $C$, 且 $e_{k+1}$ 属于 $C$. 显然, $C$ 含有一条不同于 $e_{k+1}$ 的边 $e_0$, 使得 $e_0$ 连接 $U$ 中一个顶点和 $V(T)-U$ 中一个顶点. 由 Prim 算法对 $T$ 的构造可知, $w(e_{k+1})\leqslant w(e_0)$. 现在, $T'=H+e_{k+1}-e_0$ 是 $G$ 的一个生成树, 其权值为

$$w(T')=w(H)+w(e_{k+1})-w(e_0).$$

由于 $H$ 是最小生成树, 所以 $w(H)\leqslant w(T')$, 从而 $w(H)\leqslant w(H)+w(e_{k+1})-w(e_0)$, 这意味着 $w(e_0)\leqslant w(e_{k+1})$. 因此, $w(e_0)=w(e_{k+1})$, $w(H)=w(T')$. 所以 $T'$ 也是 $G$ 的一个最小生成树. 若 $e_0$ 不属于 $T$, 则 $T'$ 为一个最小生成树, 且与 $T$ 的公共边个数多于 $H$ 与 $T$ 的公共边个数, 这与 $H\in\mathcal{H}$ 相矛盾. 所以 $e_0$ 属于 $T$, 这意味着 $T'$ 与 $T$ 的公共边个数等于 $H$ 与 $T$ 的公共边个数, 因此 $T'\in\mathcal{H}$. 显然, 对于某个 $j>k+1$, $e_0=e_j$. 因此, $T'$ 包含了 $k+1$ 条边 $e_1, e_2, \cdots, e_{k+1}$, 与 $H$ 的定义矛盾. ■

## 习题

4.25 找出图 4.10 中 $G$ 和 $H$ 的所有生成树. 其中哪些生成树是同构的?

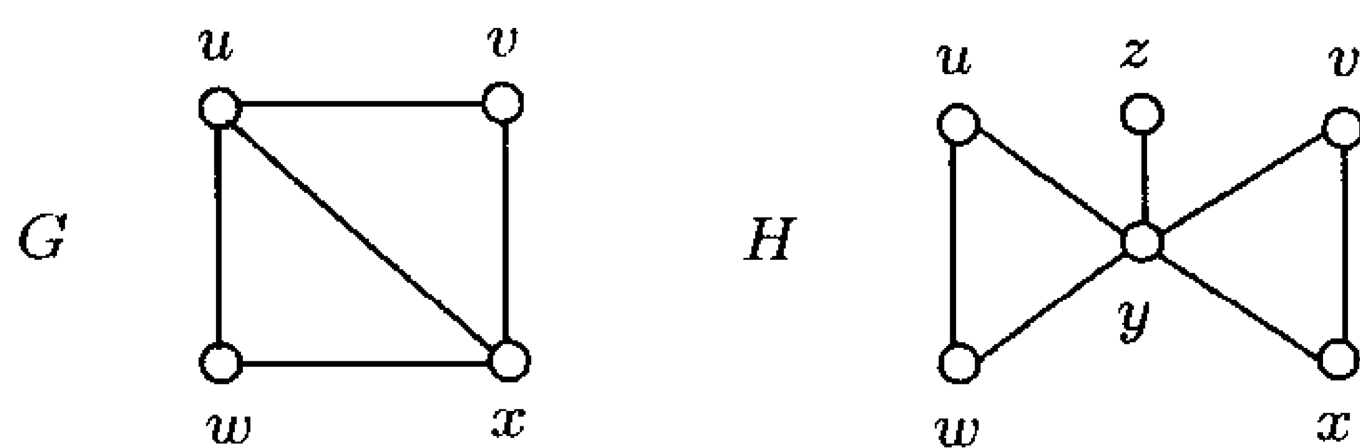



图 4.10 习题 4.25 的图

4.26 证明: 连通图的一条边 $e$ 是割边当且仅当 $e$ 属于 $G$ 的任一生成树.

4.27 分别应用 Kruskal 算法与 Prim 算法寻找图 4.11 中赋权图的一个最小生成树. 在每种情形下, 都要说明该树是如何构造的 (仿照图 4.8 与图 4.9).

4.28 分别应用 Kruskal 算法与 Prim 算法寻找图 4.12 中赋权图的一个最小生成树. 在每种情形下, 都要说明该树是如何构造的 (仿照图 4.8 与图 4.9).

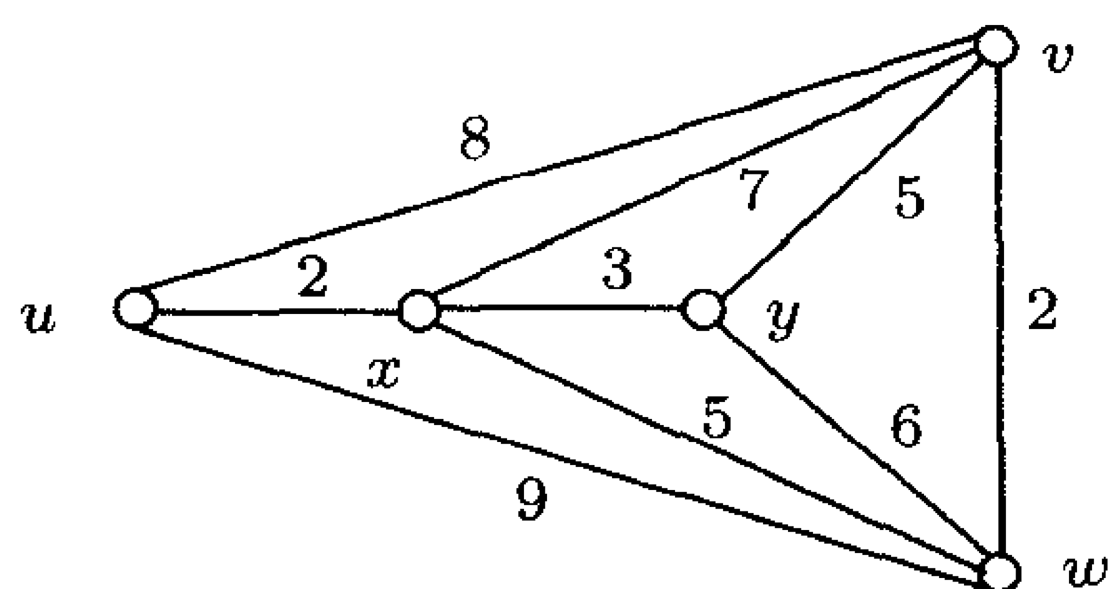



图 4.11 习题 4.27 中的赋权图

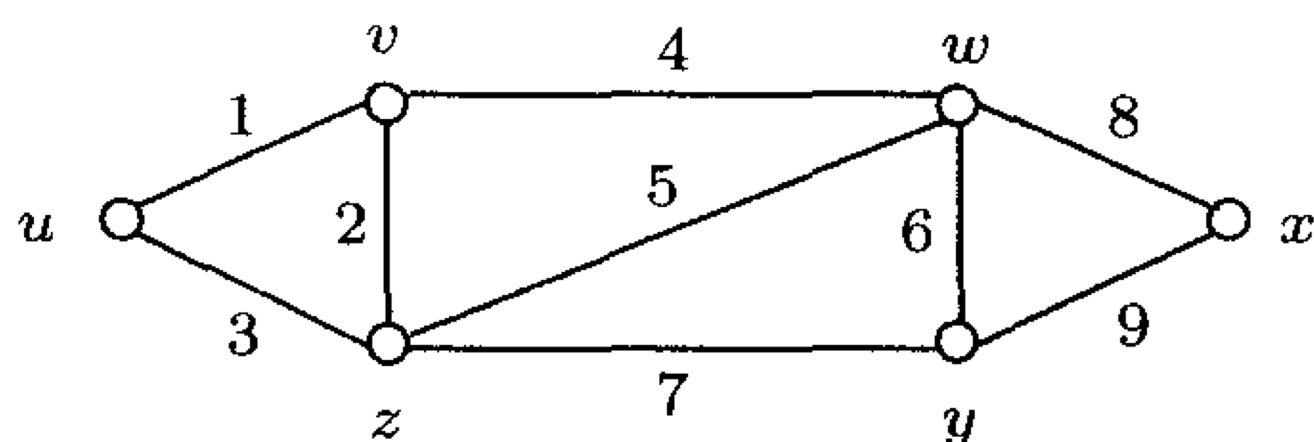



图 4.12 习题 4.28 中的赋权图

4.29 设 $G$ 为连通赋权图, 且 $G$ 的边有不同的权值. 证明: $G$ 有唯一的最小生成树.

4.30 设 $G$ 为连通赋权图, $T$ 为 $G$ 的一个最小生成树. 证明: $T$ 是 $G$ 的唯一的最小生成树当且仅当 $G$ 的不属于 $T$ 的任一边 $e$ 的权值都大于 $T+e$ 的圈上其他边的权值.

4.31 证明: 对于每个整数 $k \geqslant 2$, 都存在一个连通赋权图, 它恰好有 $k$ 个不同的最小生成树.

## 4.4 延伸阅读：生成树的个数

前面我们已经提到, 任一连通图 $G$ 都含有一个生成树. 这个本质原因是 $G$ 连通, 否则 $G$ 不含有生成树. 若 $G$ 本身就是树, 则 $G$ 只含有一个生成树, 即 $G$ 本身. 另一方面, 若 $G$ 为不是树的连通标号图, 则 $G$ 所包含的生成树多于一个; 但是到底是多少个呢? 在这一节中, 我们将关注连通标号图的 (不同的) 生成树的计数. 为了简化对图的个数的讨论, 我们认为图的顶点已经被标号 (即使这些标号没有被明确地指出). 因此, 具有不同边集的生成树是不同的. 我们现在考虑下面两个例子.

**例 4.13** 确定图 4.13 中的图 $G$ 的生成树的个数.

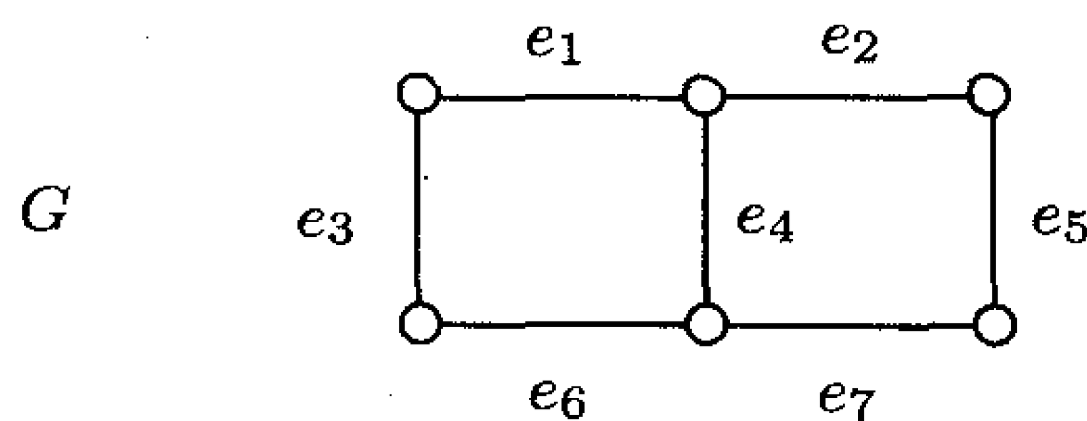



图 4.13 例 4.13 中的图

**解** 可以观察到, 对于 $G$ 的每个生成树, $G$ 的每个圈都至少有一条边不属于该树. 下面我们分两种情形来考虑 $G$ 的生成树的个数. (1) 不包含 $e_4$; (2) 包含 $e_4$. 首先, 任何不包含 $e_4$ 的生成树必包含 6 条边 $e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, e_7$ 中的 5 条. 因此有 6 个不含 $e_4$ 的生成树. 其次, 任何含有 $e_4$ 的生成树都不能只包含 $e_1, e_3, e_6$ 中的一条,

且也不能只包含 $e_2, e_5, e_7$ 中的一条. 所以有 $3 \cdot 3 = 9$ 个包含 $e_4$ 的生成树. 因此 $G$ 有 $6 + 9 = 15$ 个生成树. ◇

**例 4.14** 确定图 4.14 中的图 $G$ 的生成树的个数.

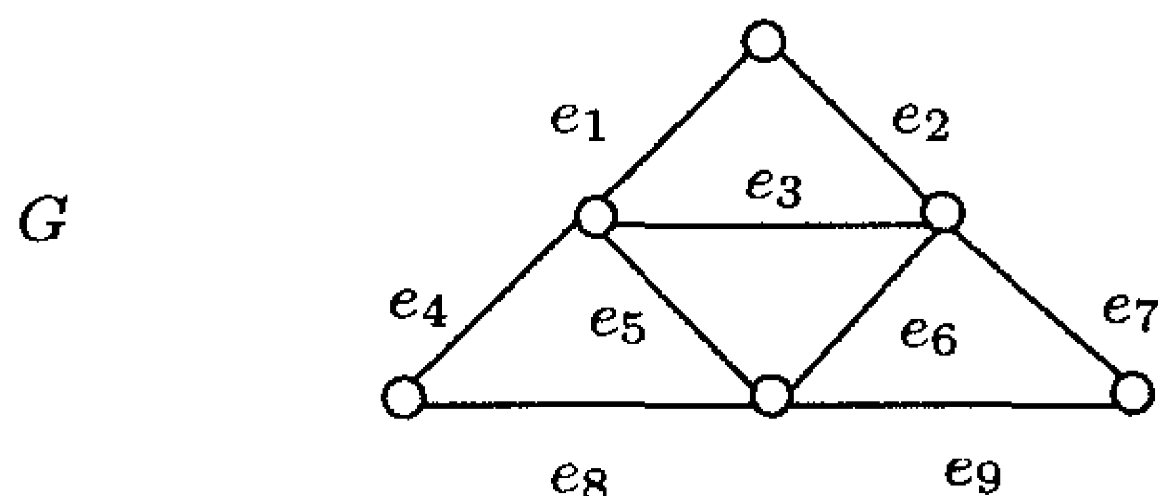



图 4.14 例 4.14 中的图

**解** 对于 $G$ 的每个生成树, 边 $e_3, e_5, e_6$ 之中至少有一条边不属于该树. 这样就可以把 $G$ 的生成树划分为 3 个互不相交的类.

类 1. 不含边 $e_3, e_5, e_6$ 的生成树. 这些生成树可以从剩下的 6 条边 $e_1$, $e_2$, $e_4$, $e_7, e_8, e_9$ 中删除任一条边而获得. 因此有 6 个这样的生成树.

类 2. 恰含有 $e_3, e_5, e_6$ 中一条边的生成树. 首先假设 $e_3$ 属于某个生成树, 但 $e_5$ 和 $e_6$ 不属于该生成树. 则 $e_1$ 或者 $e_2$ 不属于该生成树, 并且 $e_4$, $e_7$, $e_8$, $e_9$ 中的恰好一条边不属于该生成树. 因此, $G$ 的含有 $e_3$ 但不含 $e_5$ 和 $e_6$ 的生成树的个数为 $2 \times 4 = 8$. 根据 $G$ 的对称性, $G$ 的恰含有边 $e_3, e_5, e_6$ 中一条边的生成树的个数为 $3 \times 8 = 24$.

类 3. 恰含有边 $e_3, e_5, e_6$ 中两条边的生成树. 首先假设 $e_3$ 和 $e_5$ 属于某个生成树, 而 $e_6$ 不属于该生成树. 则这样的生成树可以通过删除下面每对边中的一边而获得: (1) $e_1, e_2$; (2) $e_4, e_8$; (3) $e_7, e_9$. 所以, $G$ 的含有 $e_3$ 和 $e_5$ 但不含 $e_6$ 的生成树个数为 $2^3 = 8$. 同样, 根据对称性, $G$ 的只含有边 $e_3, e_5, e_6$ 中两边的生成树个数为 $3 \times 8 = 24$.

所以, $G$ 的生成树的总数为 $6 + 24 + 24 = 54$. ◇

下面我们将讨论转到确定完全图 $K_n$ 的生成树个数的问题上. 当 $n = 1$ 或 $n = 2$, $K_n$ 是树, 所以我们只需要考虑 $n \geqslant 3$ 时的情形. 由于 $K_3$ 是个长度为 3 的圈, 所以每个生成树都是通过删除这 3 条边中的一条边而得到的. 所以, $K_3$ 的生成树的个数是 3 (见图 4.15).

确定 $K_4$ (见图 4.16) 的生成树个数是比较麻烦的, 但有下面的一种计算方法: 注意到 $K_4$ 的任一生成树都属于如下三种情形之一, (1) 不含边 $v_1v_2$, $v_1v_3$, $v_2v_3$; (2) 恰含有边 $v_1v_2$, $v_1v_3$, $v_2v_3$ 中的一条; (3) 恰含有边 $v_1v_2$, $v_1v_3$, $v_2v_3$ 中的两条. 由于三种情形中的生成树个数分别是 1, 6, 9, 所以 $K_4$ 的生成树个数就是 $1+6+9 = 16$.

事实上, 计算图 $G \cong K_n$ (其中 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$) 的生成树的总数与计

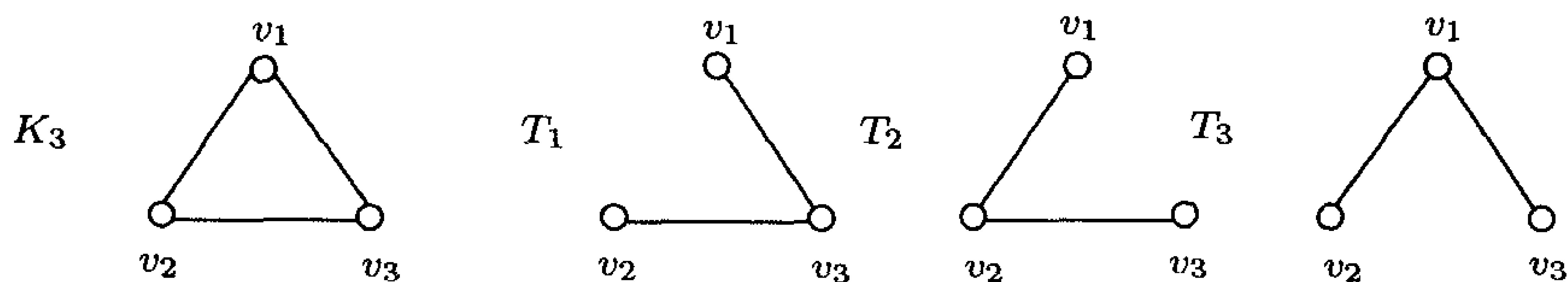



图 4.15　$K_3$ 的生成树

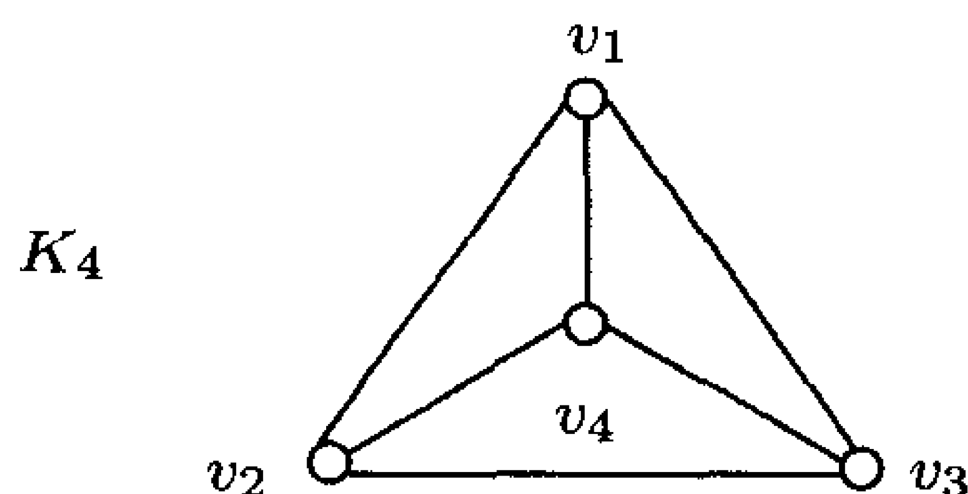



图 4.16　完全图 $K_4$

算具有顶点集 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$的不同树的总数是一样的. 下面的公式是由 Arthur Cayley 于 1889 年建立的, 并被称为**Cayley 树公式 (Cayley Tree Formula)**. 作为该公式的一个推论, 可以很清楚地得到, $K_4$ 共有 16 个生成树.

**定理 4.15**　具有指定顶点集的 $n$ 阶不同树的个数是 $n^{n-2}$.

在前面, 我们已经多次见到 Cayley 这个名字. Cayley 于 1821 年 8 月 16 日出生于英格兰的 Surrey 郡 Richmond. 在年轻的时候, 他就显露出了在数值计算方面的超强能力. 1838 年, 他进入剑桥大学三一学院学习, 在本科生阶段就发表了 3 篇论文. 他于 1842 年毕业, 之后以剑桥 fellow 的身份教书 4 年, 在这段时间里, 他继续发表论文, 而且速度很快. 当任期终止的时候, Cayley 发现自己没有职位了. 然后他学习法律, 于 1849 年成为了一名律师, 之后的 14 年他都从事律师这个职业. 虽然已经成为一名出色的律师, 但 Cayley 认为这只是个谋生的方式, 目的是为了能够做自己所真正喜爱的事业 —— 数学. 在从事律师职业的 14 年中, Cayley 写了 200 多篇数学文章.

1849 年, Cayley 写了一篇有关置换的文章; 该文章把他的想法和 Augustin Louis Cauchy 的想法联系起来. 1854 年, 他写了两篇非常有名的关于抽象群的论文. 在当时, 已经知道的群仅仅是置换群. Cayley 定义了抽象群, 并且给出了一个表以显示群中的乘法运算. 他也认识到矩阵可以形成群.

1863 年, Cayley 被聘为剑桥大学纯粹数学的教授. 虽然他能挣的钱只是他做律师时候的一小部分, 但是他非常高兴, 因为他可以专职地从事数学工作了. 在他的一生中, 他是多产的研究者, 直到 1895 年 1 月 26 日在剑桥去世, 他发表了 900 多篇文章, 仅仅少于 Leonhard Euler, Paul Erdős 和 Cauchy.

我们将不再给出定理 4.15 的证明, 关于此公式证明有几种非常不同的方法.

John W. Moon 在 1967 年写了一篇论文章, 给出了这个著名定理的十种不同的证明方法 (在那之后又出现了更多的证明方法). Moon 是加拿大艾尔伯塔大学的一名教授, 在这所大学里度过了其学术生涯的大部分时间. 他做了大量关于树和一类有向图 (该图类我们将在第 7 章中介绍) 的研究. 正如不少数学家都对音乐感兴趣一样, Moon 对音乐也有一定的兴趣; 毫无疑问, 和大部分数学家一样, Moon 在数学的创造性方面也有自己的哲学认识.

> 当一个人发现了一些新事物, 而且很难对非数学工作者解释该发现时, 他就会有一种满足和喜悦的感觉; 若有机会窥到这些神秘事物背后所隐藏的东西, 那差不多会有一种敬畏的感觉. 当你能够与合作者分享这种体验时, 那感觉又是多么地好.

下面还有一种方法可以确定任意图的生成树的个数. 接下来的定理是 Gustav Kirchhoff 提出的. 1824 年, Kirchhoff 出生在普鲁士的哥尼斯堡. (我们将在第 6 章再次见到这个城市.) Kirchhoff 因其在电流方面的研究而闻名. 他于 1845 年宣布了其研究成果, 这就是 Kirchhoff 规则, 规则的首条就是: 流进一个顶点的电流之和等于流出该顶点的电流之和. 两年后, 即 1847 年, 他从哥尼斯堡大学毕业. 也就是这一年, 他发表了关于生成树计数的文章, 并给出了相应的定理. Kirchhoff 把他一生的大部分时间都花在了实验物理上面. 当他的健康状况开始下降的时候, 他接受了柏林数学物理学会主席的职位, 因为该职位不会像实验工作那样给他虚弱的身体带来问题. 由于该生成树计数定理的证明很复杂, 我们就不再证明了.

我们记 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M} = [m_{ij}]$ 的**余子式 (cofactor)**为 $(-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{M}_{ij})$, 其中 $\det(\boldsymbol{M}_{ij})$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的通过删除其第 $i$ 行和第 $j$ 列而获得 $(n-1)\times(n-1)$ 子矩阵 $\boldsymbol{M}_{ij}$ 的行列式. 下面这个结果常常称为是**矩阵树定理 (Matrix Tree Theorem)**.

**定理 4.16** *设 $G$ 是顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的图, 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 为 $G$ 的邻接矩阵, $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$ 为 $n \times n$ 矩阵, 其中*

$$c_{ij} = \begin{cases} \deg v_i, & 若 i = j; \\ -a_{ij}, & 若 i \neq j. \end{cases}$$

*则 $G$ 的生成树个数为 $\boldsymbol{C}$ 的任一余子式的值.*

我们通过一个简单的例子来演示矩阵树定理. 图 4.17 中的图 $G$ 显然含有 3 个生成树. 邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{C}$ 也在图 4.17 中列出.

把 $\boldsymbol{C}$ 的 (3,3)– 余子式按第三行展开, 得到

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 0\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 0\times 0 - 0\times 0 + 1\times 3 = 3,\end{aligned}$$

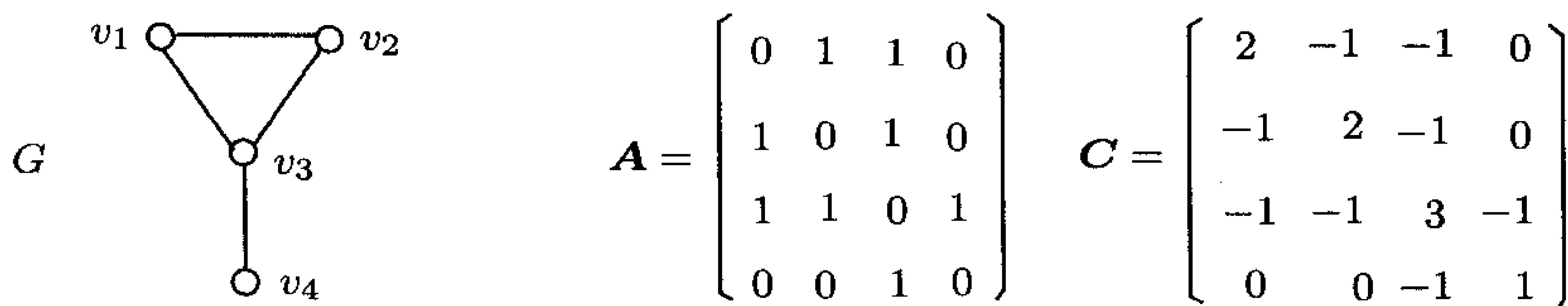



图 4.17 举例说明矩阵树定理

与所期望的一样.

## 习题

4.32 证明：存在唯一的正整数 $k$, 使得任一图都不会恰好含有 $k$ 个生成树.

4.33 设 $F$ 为连通图 $G$ 的一个子图. 证明：$F$ 是 $G$ 的某个生成树的子图当且仅当 $F$ 不包含圈.

4.34 (a) 确定图 4.18 中的图 $G$ 的生成树的个数;

(b) 对于 $k \geqslant 5$, 确定图 4.18 中的图 $G_k$ 的生成树的个数. [注意到 (a) 是 $k=4$ 的情形.]

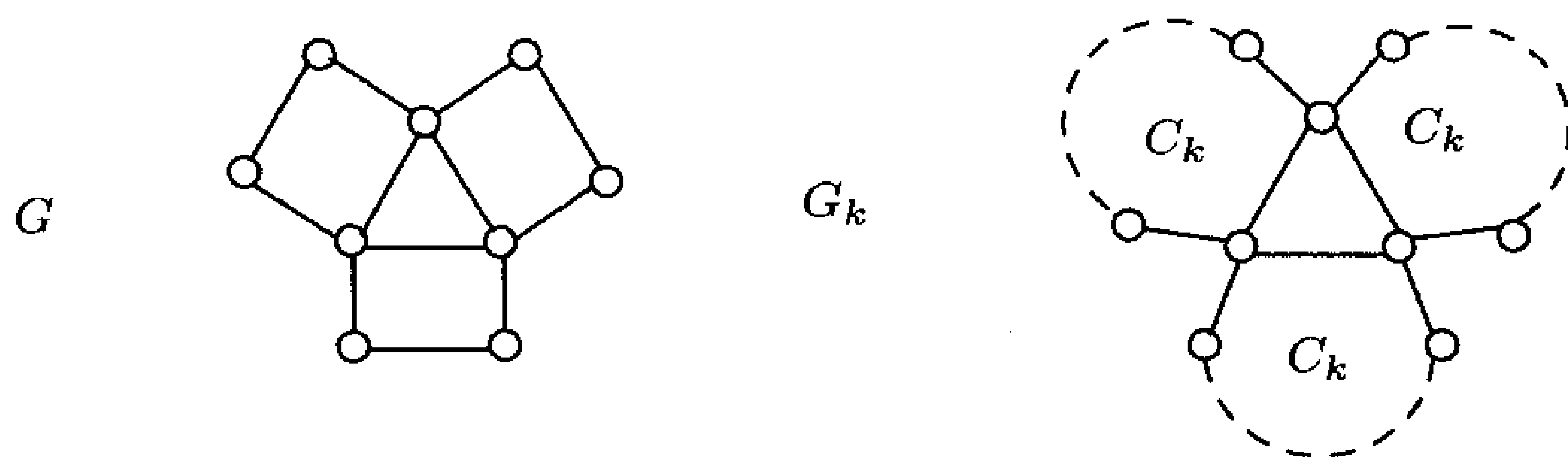



图 4.18 习题 4.34 中的图

4.35 (a) 确定图 4.19 中的图 $G$ 的生成树的个数;

(b) 对于 $k \geqslant 6$, 确定图 4.18 中的图 $G_k$ 的生成树的个数. [注意到 (a) 是 $k=5$ 的情形.]

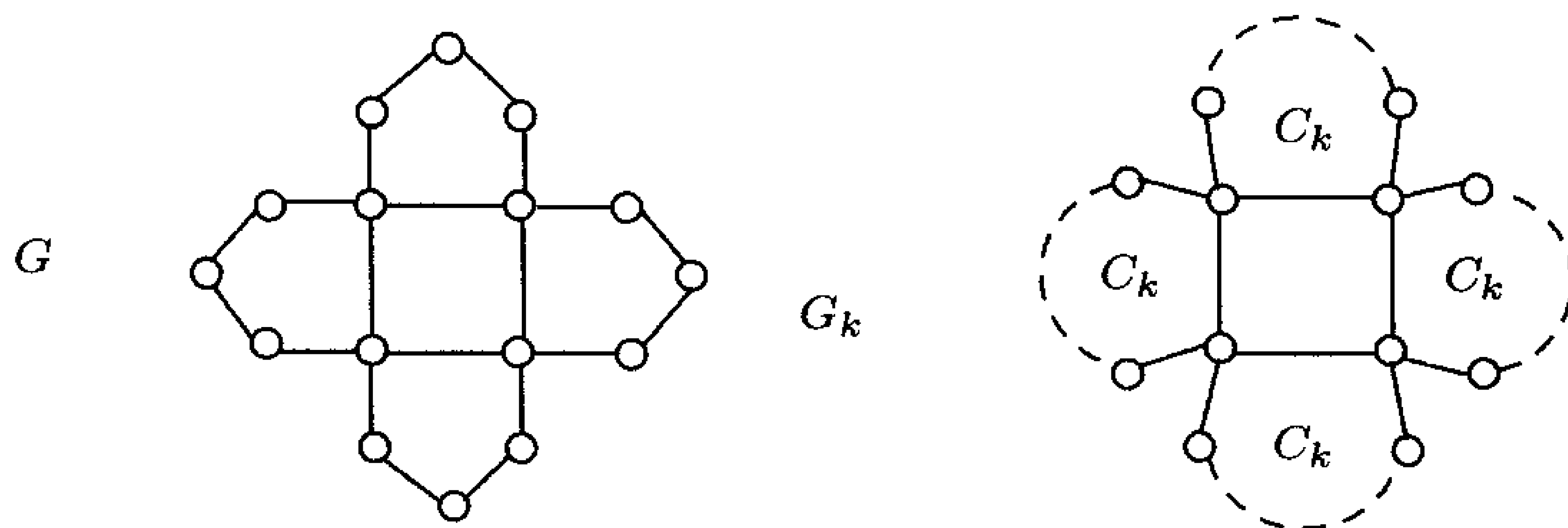



图 4.19 习题 4.35 中的图

4.36 确定图 4.20 中的图 $G$ 的生成树的个数.

4.37 (a) 根据 Cayley 树公式, 问：具有顶点集 $S=\{u,v,w,x,y\}$ 的不同树有多少个?

(b) 把 (a) 中的树分类, 使得两个树在同一类中当且仅当它们是同构的. 考虑用 $S$ 中元素来标号的不同方式数, 以此来确定这些类的个数以及每个类中树的个数.

4.38　用矩阵树定理来证实具有顶点集 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 的不同树的个数.

4.39　(a) 用矩阵树定理来确定图 4.21 中的图的生成树的个数;

(b) 画出图 4.21 中的图 $G$ 的所有生成树.

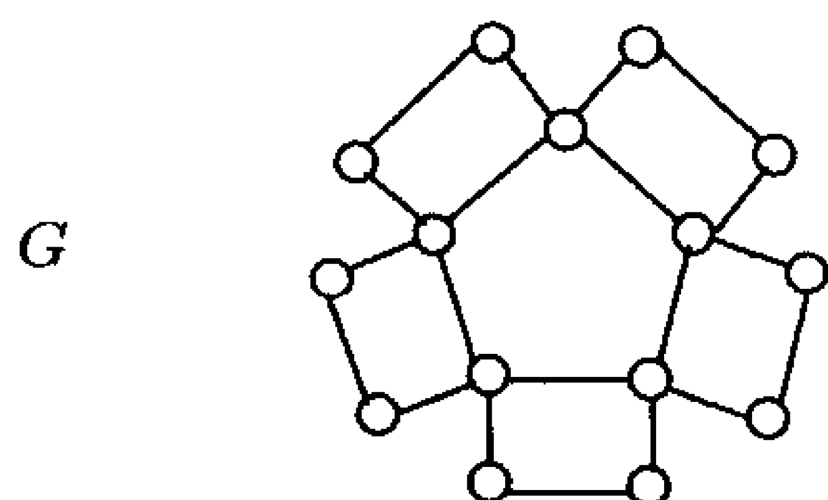



图 4.20　习题 4.36 中的图

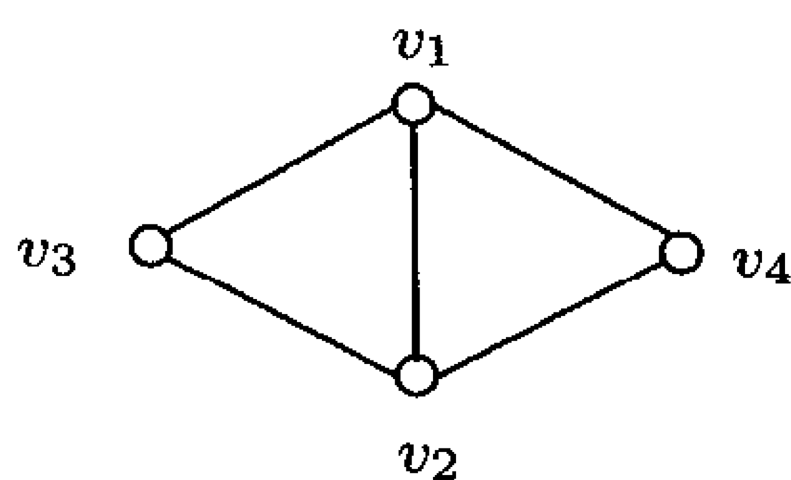



图 4.21　习题 4.39 中的图

4.40　设 $T$ 和 $T'$ 为 $n$ 阶连通图 $G$ 的两个生成树. 证明: 存在 $G$ 的生成树序列 $T = T_0, T_1, \cdots, T_k = T'$, 使得对每个 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$, $T_i$ 与 $T_{i+1}$ 有 $n-2$ 条公共边.

# 第5章 连 通 性

## 5.1 割 点

我们或许已经很清楚, 连通性是图所拥有的最为重要的性质之一. 图 5.1 给出了一些阶为 7 的图, 其中 $G_1$ 是树, $G_4 \cong C_7$, $G_7 \cong K_7$. 显然, 这些图都是连通的. 然而, 某些图看起来比其他图 "更为连通". 这意味着我们有必要引入一个能够反映图连通程度的参数, 这便是本章探讨的主要内容.

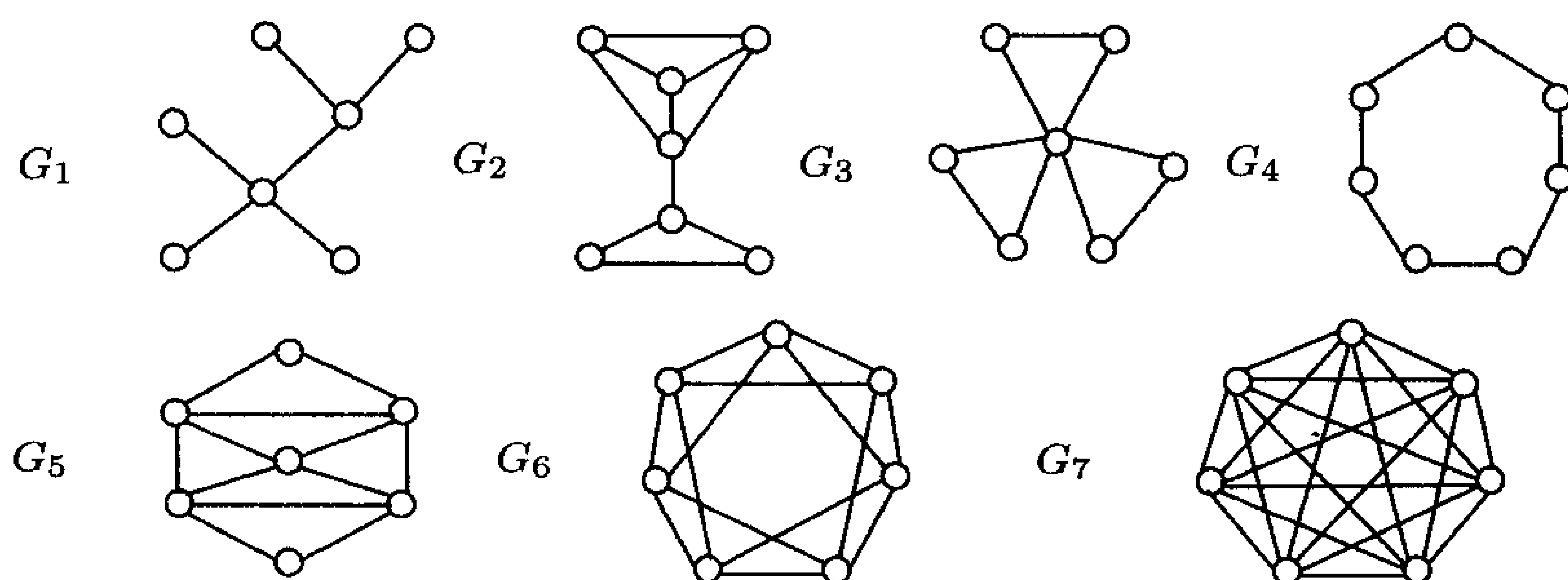



图 5.1 一些连通图

某些图的连通性是如此 "脆弱", 以致于移除一条特定的边就可导致图不连通. 在前面, 我们已经介绍过这种图, 并把具有这种性质的边称为割边. 图 $G_2$ 有一条割边, $G_1$ 也有割边. 事实上, 因为 $G_1$ 是树, 所以 $G_1$ 中的每一条边都是割边.

下面, 我们把目光从包含割边的连通图转向另一类连通图. 该类连通图包含一个点, 去掉该点后可导致图不连通.

回顾前文, 若 $v$ 是非平凡图 $G$ 的一个顶点, 则 $G-v$ 表示 $G$ 的一个 (诱导) 子图, 其顶点集是由除去 $v$ 之外的 $G$ 的所有顶点构成, 其边集是由除去与 $v$ 关联的边之外的 $G$ 的所有边构成. 这一概念在图 5.2 中得到解释. 事实上, 若 $U$ 是 $G$ 的顶点集的真子集, 则 $G-U$ 是 $G$ 的一个 (诱导) 子图, 其顶点集为 $V(G)-U$, 边集是由 $G$ 的顶点均属于 $V(G)-U$ 的边构成. 对于连通图 $G$ 的顶点 $v$, 若 $G-v$ 是不连通的, 则称 $v$ 是 $G$ 的**割点 (cut-vertex)**. 一般地, 若 $v$ 是图 $G$ 某一连通分支的割点, 则 $v$ 也称为是 $G$ 的割点. 对于图 5.2 所示的图 $G$, $v$ 和 $x$ 是 $G$ 仅有的两个割点. 在图 $G-v$ 中, 顶点 $x$ 已不再是割点; 然而 $s$ 却是 $G-v$ 的割点. 因此, 对于 $U=\{s,v\}$,

图 $G-U$ 是不连通的. 图 5.1 中的 $G_1, G_2, G_3$ 包含割点, 但其余几个图不包含割点.

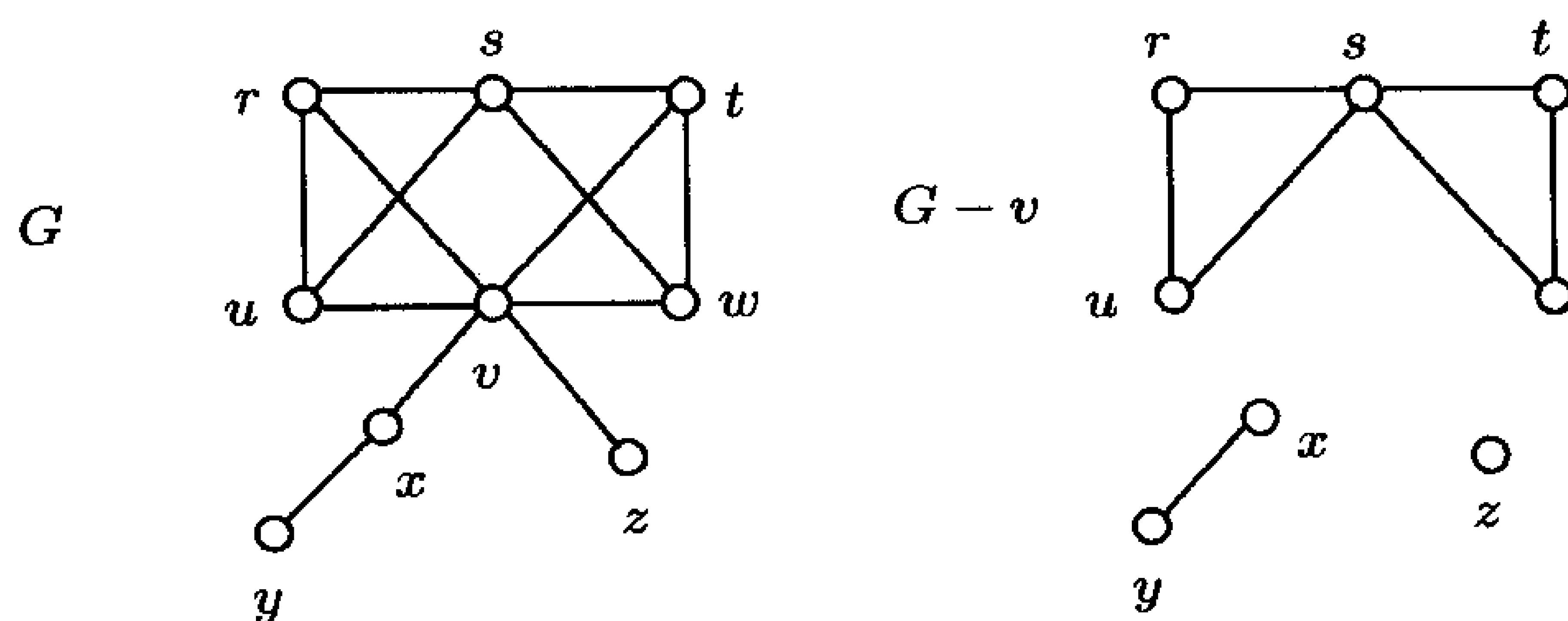



图 5.2 图 $G$ 与 $G-v$

注意到图 5.2 中的图 $G$ 不仅包含割点 $v$, 而且包含 3 条割边, 其中两条与 $v$ 相关联. 我们已经注意到, 图 5.1 中包含割边的两个图, 即 $G_1$ 和 $G_2$, 同样也包含割点 (尽管 $G_3$ 包含割点但并不包含割边). 事实上, 除了 $K_2$, 任何一个包含割边的连通图一定包含割点. 回顾定理 4.1, 图 $G$ 的边 $e$ 是割边当且仅当 $e$ 不在 $G$ 的任一个圈上.

下面我们将给出几个关于割点的结论. 由于图 $G$ 的割点必然是 $G$ 的某个连通分支的割点, 因此我们仅仅考虑连通图.

**定理 5.1** 设 $v$ 是图 $G$ 中与一条割边相关联的顶点. 则 $v$ 是 $G$ 的割点当且仅当 $\deg v \geqslant 2$.

**证** [逆否证法, 反证法] 设 $uv$ 是 $G$ 的一条割边, 则 $\deg v \geqslant 1$. 若 $\deg v = 1$, 则 $v$ 是 $G$ 的一个端点, 从而图 $G-v$ 是连通的, $v$ 不是 $G$ 的一个割点.

反之, 若 $\deg v \geqslant 2$, 则一定存在一个不同于 $u$ 的顶点 $w$, $w$ 邻接于 $v$. 假设 $v$ 不是割点, 则 $G-v$ 是连通的. 因此在 $G-v$ 中存在一条 $u-w$ 路 $P$. 容易发现, $P$ 与顶点 $v$ 以及两条边 $uv$ 和 $vw$ 构成了一个包含割边 $uv$ 的圈. 这与定理 4.1 矛盾. ■

由定理 5.1 我们立即可得, 若非平凡树 $T$ 的顶点 $v$ 不是 $T$ 的端点, 则 $v$ 一定是 $T$ 的割点. 下面将给出另外一个显然的推论.

**推论 5.2** 设 $G$ 是一个阶至少为 3 的连通图. 若 $G$ 包含一条割边, 则 $G$ 一定包含一个割点.

若 $v$ 是连通图 $G$ 的割点, 则 $G-v$ 至少包含两个连通分支. 若 $u$ 和 $w$ 是 $G-v$ 不同连通分支中的两个顶点, 则 $u$ 和 $w$ 在 $G-v$ 中是不连通的. 另一方面, $u$ 和 $w$ 在 $G$ 中必然是连通的. 因此有下面定理.

**定理 5.3** 设 $v$ 是连通图 $G$ 的一个割点, $u$ 和 $w$ 是 $G-v$ 不同连通分支中的两个顶点. 则 $v$ 位于 $G$ 的任意一条 $u-w$ 路上.

现在我们给出连通图 $G$ 的割点的一个刻画.

**推论 5.4** 顶点 $v$ 是连通图 $G$ 的一个割点当且仅当存在与 $v$ 不同的两个顶点 $u$ 和 $w$, 使得 $v$ 位于 $G$ 的任意一条 $u-w$ 路上.

**证** [直接证法] 设 $v$ 是 $G$ 的一个割点, 则 $G-v$ 是不连通的. 设 $u$ 和 $w$ 是 $G-v$ 的不同连通分支中的两个顶点. 由定理 5.3, $G$ 的任意一条 $u-w$ 路均包含 $v$.

另一方面, 若 $G$ 包含两个顶点 $u$ 和 $w$, 使得 $G$ 的任一条 $u-w$ 路均包含 $v$. 则在 $G-v$ 中不存在 $u-w$ 路, 所以 $G-v$ 是不连通的. 因此 $v$ 是 $G$ 的割点. ■

由推论 5.4, 若连通图 $G$ 的顶点 $v$ 不是割点, 则对于 $G$ 中任意不同于 $v$ 的两个顶点 $u$ 和 $w$, 必存在一条不包含 $v$ 的 $u-w$ 路.

虽然割点和割边是两个平行概念而且有一些相似之处, 但它们之间也有一些本质的区别. 我们已经知道连通图 $G$ 的任意一条边都可能是割边 (当然 $G$ 必然是树). 然而, 任一非平凡的连通图一定包含不是割点的顶点.

**定理 5.5** 设 $G$ 是非平凡的连通图, $u \in V(G)$.若 $v$ 是 $G$ 中距离 $u$ 最远的顶点, 则 $v$ 不是 $G$ 的割点.

**证** [反证法] 假设 $v$ 是 $G$ 的割点, $w$ 是 $G-v$ 的不包含 $u$ 的连通分支中的任一顶点. 由于任意一条 $u-w$ 路均包含 $v$, 则 $d(u,w) > d(u,v)$, 导致矛盾. ■

由上述定理直接可以得到：任意非平凡的连通图至少包含两个非割点的顶点.

**推论 5.6** 任意非平凡的连通图至少包含两个非割点的顶点.

**证** [直接证法] 设 $u$ 和 $v$ 是非平凡图 $G$ 的两个顶点, 使得 $d(u,v) = \text{diam}(G)$. 因为 $u, v$ 彼此都是距离最远的顶点. 由定理 5.5, $u$ 和 $v$ 都不是 $G$ 的割点. ■

## 习题

5.1 列举满足下列条件的图：
 (a) 割边数多于割点数.
 (b) 割点数多于割边数.

5.2 (a) 对于任意整数 $k$ ($k \geqslant 2$), 列举一个包含 $v$ 的连通图 $G$, 使得 $G-v$ 有 $k$ 个连通分支.
 (b) 列举一个阶至少为 3 的连通图 $G$, 它包含顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $G-u-v$ 的连通分支数少于 $G-u$ 的连通分支数.

5.3 证明或反驳：
 (a) 若图 $G$ 的顶点 $v$ 位于 $G$ 的一个圈上, 则 $v$ 不是割点.
 (b) 若图 $G$ 的顶点 $v$ 不位于 $G$ 的任一个圈上, 则 $v$ 是割点.
 (c) 阶至少为 3 的树所含的割点数多于端点数.
 (d) 阶至少为 3 的树所含的割点数多于割边数.

5.4 证明：若 $v$ 是图 $G$ 的割点, 则 $v$ 一定不是 $\overline{G}$ 的割点.

5.5 对于下面每个命题, 给出反例.

(a) 若 $G$ 是阶为 13 的连通图,$v$ 是 $G$ 的割点. 则 $G-v$ 有一个至少包含 7 个顶点的连通分支.

(b) 若 $G$ 是具有偶数个顶点的连通图, 则 $G$ 不包含割点.

(c) 若 $G$ 是具有割点的连通图, 则 $G$ 一定包含割边.

(d) 若 $G$ 是具有割边的连通图, 则 $G$ 一定包含割点.

5.6 证明: 3 正则图 $G$ 含有一个割点当且仅当 $G$ 含有一条割边.

5.7 证明: 若 $T$ 是一个阶至少为 3 的树, 则 $T$ 包含一个割点 $v$, 使得在与 $v$ 邻接的顶点中, 至多有一个不是端点.

5.8 (a) 设 $G$ 是非平凡的连通图. 证明: 若 $v$ 是 $G$ 的生成树的一个端点, 则 $v$ 不是 $G$ 的割点.

(b) 利用 (a) 的结论给出下面事实的另一种证明: 任意一个非平凡的连通图至少包含两个不是割点的顶点.

(c) 设 $v$ 是非平凡连通图 $G$ 的一个顶点. 证明: 存在 $G$ 的一个生成树, 它包含 $G$ 中所有与 $v$ 相关联的边.

(d) 证明: 若连通图 $G$ 恰有两个非割点的顶点, 则 $G$ 是一条路. [提示: 若树 $T$ 包含一个度大于 2 的顶点, 则 $T$ 包含两个以上的端点.]

## 5.2 块

现在, 我们将目光从含有割点的连通图转向不含割点的连通图. 不含割点的非平凡连通图称为是**不可分图 (nonseparable graph)**. 例如, 图 5.1 中的 $G_4$, $G_5$, $G_6$ 和 $G_7$ 都是不可分图. 另外, $K_2$ 是一个不可分图, 而且是仅有的 2 阶不可分图. 由于阶至少为 3 的不可分图不包含割点, 故它们一定不包含割边, 即每一条边都位于一个圈上. 事实上, 关于不可分图还有很多值得我们讨论的地方.

**定理 5.7** 阶至少为 3 的图是不可分的当且仅当任意两个顶点都位于某个圈上.

**证** [反证法] 首先, 设 $G$ 是一个阶至少为 3 的图, 而且其任意两个顶点都位于某一个圈上. 由于 $G$ 的任意两个顶点位于某一个圈上, 显然, 任意两个顶点是连通的, 因而 $G$ 是连通的. 假设 $G$ 不是不可分的, 则 $G$ 一定含有一个割点, 记为 $v$. 设 $u$ 和 $w$ 是属于 $G-v$ 不同连通分支中的两个顶点. 由条件知, 在 $G$ 中 $u$ 和 $w$ 位于同一个圈 $C$ 上, 从而 $C$ 确定了 $G$ 中两条不同的 $u-w$ 路, 其中至少一条不包含 $v$, 导致矛盾. 因此,$G$ 不包含割点, 是不可分的.

下面我们来证明必要性. 设 $G$ 是一个阶至少为 3 的不可分图. 假设 $G$ 中存在一些顶点对, 使得它们并不位于同一个圈上. 在所有这样的顶点对中, 设 $u, v$ 是使得 $d(u,v)$ 最小的一对顶点. 若 $d(u,v)=1$, 则 $uv \in E(G)$. 通过观察不难发现 $uv$ 必须位于一个圈上. 因而 $d(u,v)=k \geqslant 2$.

设 $P: u = v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}, v_k = v$ 是 $G$ 中一个长度为 $k$ 的 $u-v$ 路. 由于 $d(u, v_{k-1}) = k-1 < k$, 则存在一个包含 $u$ 和 $v_{k-1}$ 的圈 $C$. 由假设, $v$ 不在 $C$ 上. 由于 $v_{k-1}$ 不是 $G$ 的割点, 且 $u$ 和 $v$ 是与 $v_{k-1}$ 不同的两个顶点, 由定理 5.4, 则存在一条不包含 $v_{k-1}$ 的 $v-u$ 路 $Q$. 由于 $u$ 位于 $C$ 上, 因此考虑 $Q$ 中第一个位于 $C$ 上的顶点是有意义的, 记该顶点为 $x$. 设 $Q'$ 为 $Q$ 的 $v-x$ 子路 (如图 5.3 所示), $P'$ 为 $C$ 上包含 $u$ 的 $v_{k-1}-x$ 路.(若 $x \neq u$, 则 $P'$ 是唯一的.) 然而, 由 $v$ 到其邻点 $v_{k-1}$, 再沿 $P'$ 到 $x$, 最后沿 $Q'$ 到 $v$ 所构成的圈 $C'$ 包含 $u$ 和 $v$, 从而导致矛盾. ■

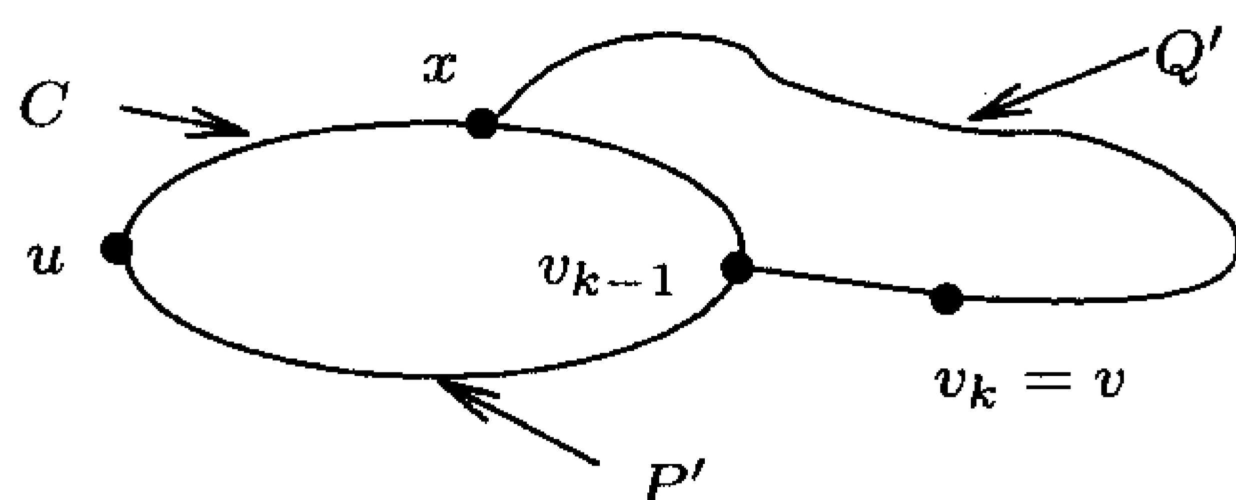



图 5.3　定理 5.7 证明中的圈 $C$, 路 $P'$ 和 $Q'$

若非平凡连通图不是不可分的, 则它必然包含割点和一些令我们特别感兴趣的不可分子图. 若图 $G$ 的一个不可分子图不是其他任一不可分子图的真子图, 则称该子图是 $G$ 的一个**块 (block)**. 不难发现, $G$ 的任一个块都是 $G$ 的诱导子图. 若 $G$ 是不可分的, 则 $G$ 仅有一个块, 即 $G$ 本身. 另一方面, 若 $G$ 为含有割点的连通图, 则 $G$ 至少有两个块. 如图 5.4 所示, 连通图 $G$ 含有两个割点 $u$ 和 $v$, 四个块 $B_1$, $B_2$, $B_3$ 和 $B_4$. 正如不连通图包含一些称为连通分支的连通子图一样, 具有割点的连通图包含一些称为块的不可分子图.

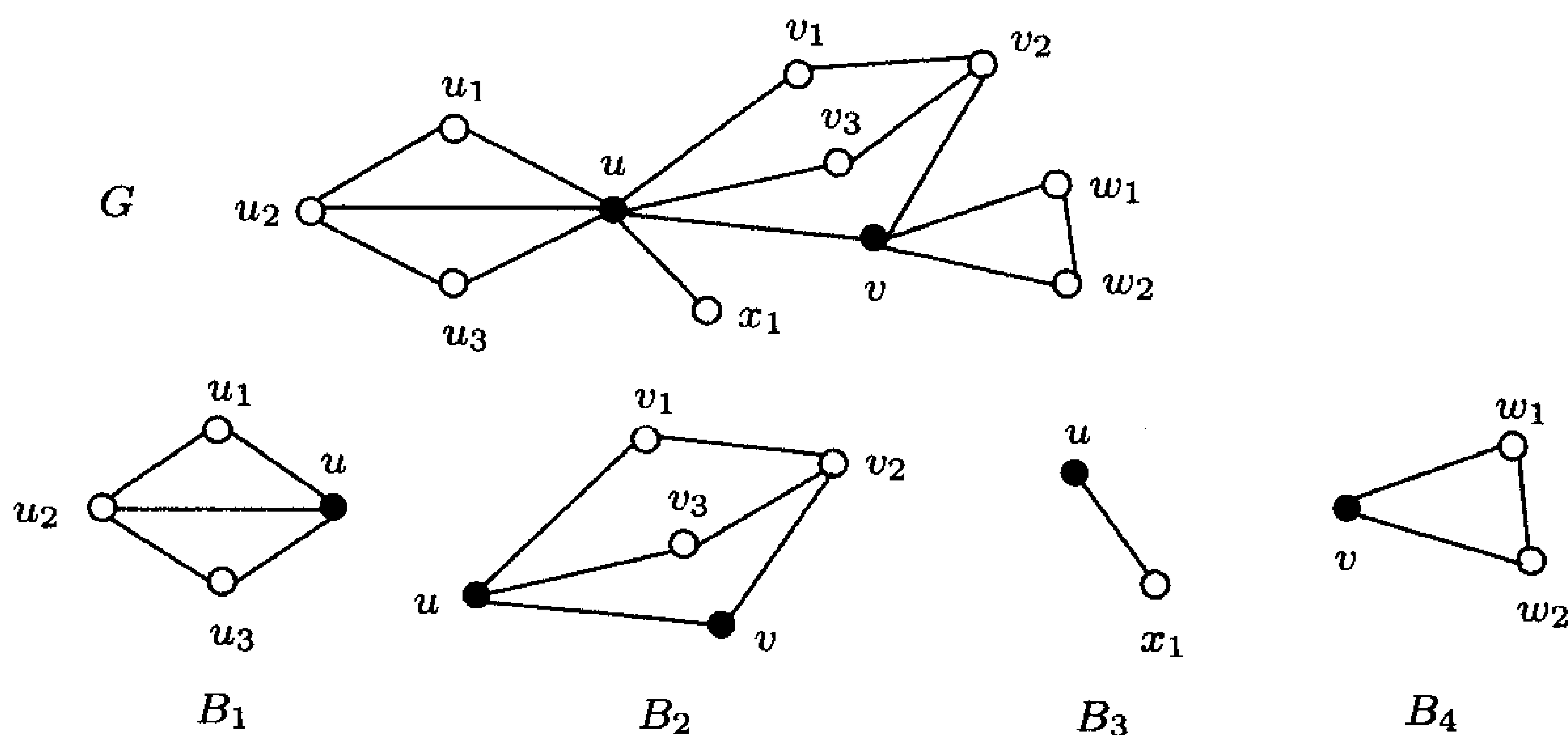



图 5.4　连通图和它的块

我们还可以从另外一个角度考察块. 首先, 我们给出一个定义在非平凡连通图

边集上的等价关系. (关于等价关系的定义及相关结论见附录 2.)

**定理 5.8** 设 $R$ 是定义在非平凡连通图 $G$ 的边集上的如下关系：对于 $e, f \in E(G)$, 若 $e = f$ 或 $e, f$ 位于 $G$ 的同一个圈上, 则 $e, f$ 有关系 $R$, 记为 $e\,R\,f$. 则 $R$ 是等价关系.

**证** [直接证法] 易见, $R$ 是自反的和对称的. 因此我们只需证明 $R$ 是传递的. 设 $e, f, g \in E(G)$, 满足 $e\,R\,f$ 和 $f\,R\,g$. 若 $e = f$ 或 $f = g$, 则 $e\,R\,g$ 必然成立. 因此, 我们假设 $e$ 和 $f$ 位于圈 $C$ 上,$f$ 和 $g$ 位于圈 $C'$ 上. 若 $e$ 位于 $C'$ 上或 $g$ 位于 $C$ 上, 立即可得 $e\,R\,g$. 因而, 我们可假设上述两种情形均不发生.

设 $e = uv$, $P$ 是 $C$ 上不含 $e$ 的一条 $u - v$ 路, $x$ 是 $P$ 上第一个属于 $C'$ 的顶点, $y$ 是 $P$ 上最后一个属于 $C'$ 的顶点. 此外, 设 $P'$ 是 $C'$ 上包含 $g$ 的一条 $x - y$ 路, $P''$ 是 $C$ 上包含 $e$ 的一条 $x - y$ 路. 则 $P'$ 和 $P''$ 构成了一个包含 $e$ 和 $g$ 的圈 $C''$, 因此 $e\,R\,g$. ■

定理 5.8 所描述的等价关系把任意非平凡连通图 $G$ 的边集划分成等价类. 事实上, 由每个等价类中的边所诱导的 $G$ 的子图都是 $G$ 的一个块. 下面结果作为定理 5.8 的推论, 给出了非平凡连通图中块的性质.

**推论 5.9** 非平凡连通图 $G$ 的任意两个不同的块 $B_1$ 和 $B_2$ 具有下面性质：

(a) $B_1$ 和 $B_2$ 是边不相交的.

(b) $B_1$ 和 $B_2$ 至多有一个公共顶点.

(c) 若 $B_1$ 和 $B_2$ 有一个公共顶点 $v$, 则 $v$ 是 $G$ 的割点.

**证** [直接证法, 反证法] 由定理 5.8, 我们立即可以得到, 任意两个不同的块是边不相交的. 下面证明 (b). 假设 $B_1$ 和 $B_2$ 有两个不同的公共顶点 $u$ 和 $v$. 因为 $B_1$ 和 $B_2$ 均是 $G$ 的连通子图, 所以在 $B_1$ 中存在一条 $u - v$ 路 $P'$, 在 $B_2$ 中存在一条 $u - v$ 路 $P''$. 此外, 由于 $B_1$ 和 $B_2$ 是边不相交的, 则 $P'$ 和 $P''$ 也是边不相交的. 设 $w$ 是 $P'$ 和 $P''$ 的在 $u$ 之后的第一个公共顶点 (可能 $w$ 就是 $v$). $P'$ 的 $u - w$ 子路 $Q'$ 和 $P''$ 的 $u - w$ 子路 $Q''$ 构成了 $G$ 的一个圈, 该圈包含了 $B_1$ 的边 $e_1$ 和 $B_2$ 的边 $e_2$. 因此,$e_1$ 和 $e_2$ 在 $G$ 的同一个块中, 这显然不成立. 故 (b) 得证.

最后我们来证明 (c). 设 $G$ 的两个块 $B_1$ 和 $B_2$ 有一个公共顶点 $v$, 则 $v$ 关联 $B_1$ 中的边 $e_1 = vv_1$ 和 $B_2$ 中的边 $e_2 = vv_2$. 假设 $v$ 不是 $G$ 的割点, 由推论 5.4, $G$ 存在一条不包含 $v$ 的 $v_1 - v_2$ 路. 因此, $P$ 与 $v$, $e_1$, $e_2$ 构成了一个包含 $e_1$ 和 $e_2$ 的圈. 由于 $e_1$ 和 $e_2$ 属于不同的块, 这显然不成立. ■

我们已经给出了块的两种不同的描述, 习题 5.15 要求你证明这两种描述是等价的.

## 习题

5.9 对于图 5.5 中的图 $G$, 确定 $G$ 的割点、割边和块.

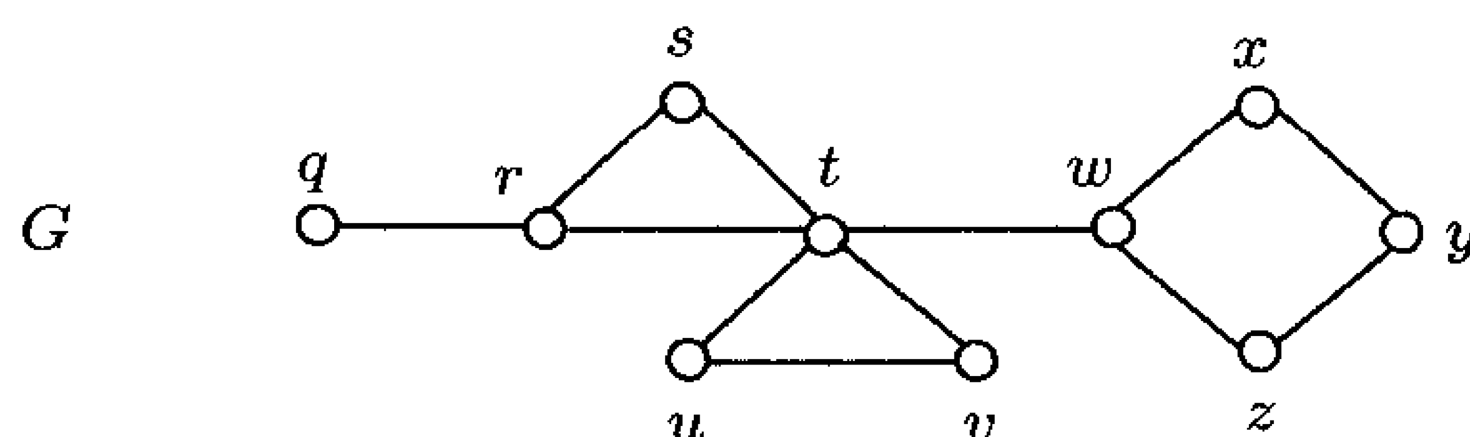



图 5.5 习题 5.9 中的 $G$

5.10 证明：边数至少为 2 的连通图 $G$ 是不可分的当且仅当 $G$ 的任意两条不邻接的边都位于 $G$ 的某一个圈上.

5.11 证明：对于阶为 $n \geqslant 3$ 的图 $G$, 若 $G$ 的任一顶点 $v$ 都满足 $\deg v \geqslant n/2$, 则 $G$ 是不可分的.

5.12 若连通图 $G$ 包含三个块和 $k$ 个割点, 则 $k$ 的可能值是多少? 并给予解释.

5.13 证明或反驳：若 $G$ 是含有割点的连通图,$u$ 和 $v$ 是 $G$ 的两个顶点且满足 $d(u,v) = \text{diam}(G)$, 则 $G$ 没有包含 $u$ 和 $v$ 的块.

5.14 设 $G$ 是一个包含割点 $v$ 的连通图,$G_1$ 是 $G - v$ 的某个连通分支.

(a) 证明：$G$ 的诱导子图 $\langle V(G_1) \cup \{v\} \rangle$ 是连通的.

(b) 证明：$G$ 的诱导子图 $\langle V(G_1) \cup \{v\} \rangle$ 未必是 $G$ 的块.

5.15 对于非平凡的连通图 $G$, $G$ 的块可被描述成：(1) $G$ 的一个不可分子图, 且不是其他任意不可分子图的真子图; 也可被描述成：(2) $G$ 的由等价类中的边所诱导的子图, 该等价类是由定理 5.8 中所定义的等价关系形成的. 证明：这两种描述是等价的.

5.16 列举满足下面条件的图 $G$.

(a) 任意两个不邻接顶点都位于某一个圈上.

(b) 存在两条不邻接的边, 它们不位于同一个圈上.

# 5.3 连 通 度

如前文所述, 一个含有割点的连通图 $G$ 在删除割点后导致不连通; 不可分图不含割点. 由此可见, 不可分图比含有割点的连通图具有更好的连通性. 下面我们将给出一种度量图连通性的方法. 设 $U$ 是由图 $G$ 的若干顶点构成的集合, 若 $G - U$ 是不连通的, 则称 $U$ 为图 $G$ 的一个**顶点割 (vertex-cut)**. 具有最小基数的顶点割称为是**最小顶点割 (minimum vertex-cut)**. 如果 $G$ 不是完全图, 那么 $G$ 包含两个不邻接的顶点, 删除 $G$ 的除这两个顶点外的所有顶点即可得到一个不连通图. 换

句话说, 任意一个非完全图都存在顶点割. 由于完全图删除顶点集的任意真子集后还是一个完全图, 所以连通图存在顶点割当且仅当 $G$ 不是完全图.

若 $U$ 为非完全的连通图 $G$ 的最小顶点割, 则 $G-U$ 是不连通的, 且包含连通分支 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ ($k \geqslant 2$). 对每个 $i$ ($1 \leqslant i \leqslant k$), 任一个顶点 $u \in U$ 都至少与 $G_i$ 的一个顶点邻接, 否则,$U-\{u\}$ 是比 $U$ 更小的顶点割, 这显然是不可能的. 图 5.6 给出了图 $G$ 的结构, 其中 $G-U$ 的任意两个连通分支之间没有边.

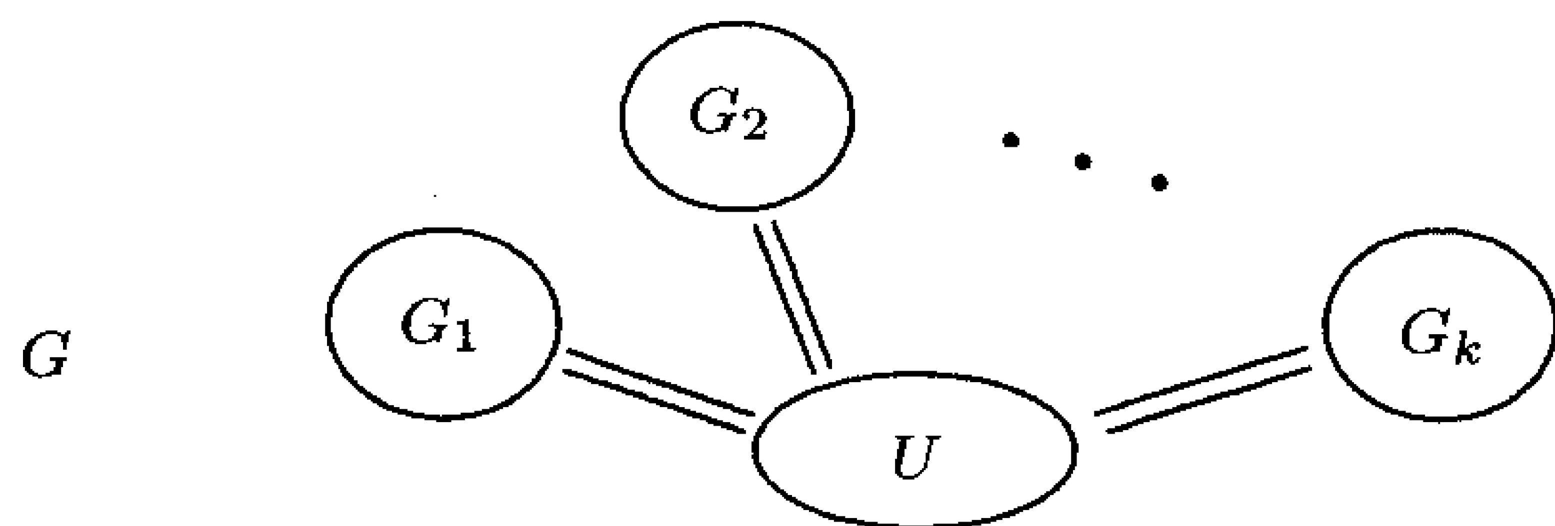



图 5.6　图的最小顶点割

对于非完全图 $G$, $G$ 的最小顶点割的基数称为是 $G$ 的**点连通度** (**vertex-connectivity**), 或简称为 $G$ 的**连通度** (**connectivity**), 记为 $\kappa(G)$; 若 $G \cong K_n$, 则定义 $\kappa(G)$ 为 $n-1$. (记号 $\kappa$ 取自希腊字母 *kappa*.) 一般地, 图 $G$ 的连通度 $\kappa(G)$ 是指满足下述条件的所有子集 $U \subseteq V(G)$ 的最小基数, 使得 $G-U$ 为不连通图或平凡图. 故对于 $n$ 阶图 $G$, 有

$$0 \leqslant \kappa(G) \leqslant n-1.$$

因此, 非平凡图 $G$ 的连通度为 0 当且仅当 $G$ 是不连通的;$G$ 的连通度为 1 当且仅当 $G$ 是含有割点的连通图或 $G \cong K_2$; $G$ 的连通度至少为 2 当且仅当 $G$ 是阶至少为 3 的不可分图. 如图 5.1 所示的, $\kappa(G_1)=\kappa(G_2)=\kappa(G_3)=1$, $\kappa(G_4)=\kappa(G_5)=2$, $\kappa(G_6)=4$, $\kappa(G_7)=6$.

正如下面要说明的, 对于那些删除指定数目的顶点后仍然连通的图, 我们将更加感兴趣. 对于非负整数 $k$, 图 $G$ 称为是**$k$ 连通的** (**$k$-connected**), 若 $\kappa(G) \geqslant k$. 因此, 对于任一满足 $0 \leqslant \ell \leqslant k$ 的整数 $\ell$, $k$ 连通图一定是 $\ell$ 连通的. 例如, 图 5.1 中的 $G_4, G_5, G_6$, $G_7$ 都是 2 连通的; $G_4$ 和 $G_5$ 不是 3 连通的, $G_6$ 和 $G_7$ 是 3 连通的. 因而,$G$ 是 1 连通的当且仅当 $G$ 是平凡图或连通图;$G$ 是 2 连通的当且仅当 $G$ 是阶至少为 3 的不可分图. 一般地, 图 $G$ 是 $k$ 连通的当且仅当任意少于 $k$ 个的顶点的删除都不会导致不连通或平凡的图.

图 $G$ 的连通度提供了 $G$ 连通程度的一种度量. 当然, 还存在其他的度量, 下面将介绍用 $G$ 的边来度量连通程度. 设 $X$ 是非平凡图 $G$ 的若干边构成的集合. 若 $G-X$ 是不连通的, 则称 $X$ 为 $G$ 的一个**边割** (**edge-cut**). 连通图 $G$ 的边割 $X$ 称为是**极小的** (**minimal**), 若 $X$ 的任一真子集都不是 $G$ 的边割. 若 $X$ 是连通图 $G$

的极小边割, 则 $G-X$ 恰好包含两个连通分支 $G_1$ 和 $G_2$. 进一步地,$X$ 是由连接 $G_1$ 和 $G_2$ 的边构成.

若 $X$ 是连通图 $G$ 的边割, 但不是极小的, 则存在 $X$ 的真子集 $Y$, $Y$ 是极小边割. 具有最小基数的边割称为是**最小边割 (minimum edge-cut)**. 虽然最小边割是极小边割, 但该命题的逆并不正确. 例如, 对于图 5.7 中的图 $H$, 考虑边的集合 $X_1=\{e_3,e_4,e_5\}$, $X_2=\{e_1,e_2,e_6\}$, $X_3=\{e_1,e_6\}$. 由于 $H-X_1$, $H-X_2$, $H-X_3$ 均为不连通, 故上述三个集合都是边割. 易见, $X_1$ 和 $X_3$ 是极小边割; 由于 $X_3$ 是 $X_2$ 的真子集, 故 $X_2$ 不是极小边割;$X_3$ 是最小边割, 但 $X_1$, $X_2$ 均不是.

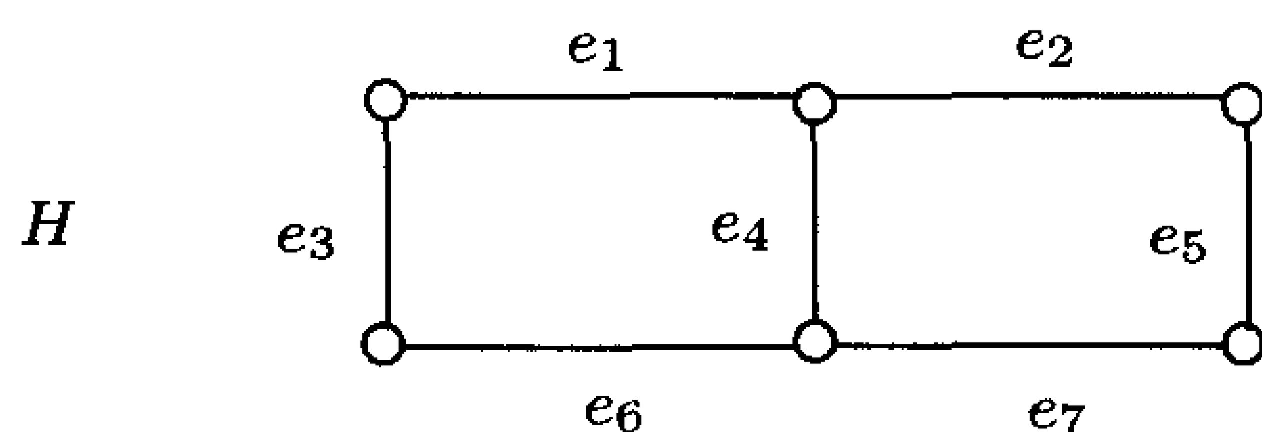



图 5.7 图的边割

非平凡图 $G$ 的**边连通度 (edge-connectivity)** $\lambda(G)$ 定义为 $G$ 的一个最小边割的基数, 并约定 $\lambda(K_1)=0$. 因此,$\lambda(G)$ 是指满足下述条件的所有子集 $X\subseteq E(G)$ 的最小基数, 使得 $G-X$ 为不连通图或平凡图. 对于 $n$ 阶图 $G$, 有

$$0\leqslant\lambda(G)\leqslant n-1.$$

注意到, $\lambda(G)=0$ 当且仅当 $G$ 是不连通的或平凡的; $\lambda(G)=1$ 当且仅当 $G$ 是连通的且包含割边. 对于图 5.7 中的图 $H$, 由于 $X_3=\{e_1,e_6\}$ 是 $H$ 的最小边割, 故 $\lambda(G)=2$.

对于非负整数 $k$, 图 $G$ 称为是**$k$ 边连通的 ($k$-edge-connected)**, 若 $\lambda(G)\geqslant k$. 从而, 对于每个满足 $0\leqslant\ell\leqslant k$ 的整数 $\ell$, $k$ 边连通图一定是 $\ell$ 边连通的. 因此, 每个 1 边连通图是非平凡的连通图; 每个 2 边连通图是不包含割边且阶至少为 3 的连通图. 例如, 图 5.1 中的图 $G_3$, $G_4$, $G_5$ 是 2 边连通的, 但不是 3 边连通的.

**例 5.10** 证明: $\lambda(K_n)=n-1$.

**解** 由定义,$\lambda(K_1)=0$. 下面设 $G\cong K_n$ $(n\geqslant 2)$. 由于 $G$ 中任意顶点的度均为 $n-1$, 故移除与任一顶点相关联的 $n-1$ 条边后, 可导致 $G$ 不连通. 因此,$\lambda(G)\leqslant n-1$. 设 $X$ 为图 $G$ 的最小边割, 则 $|X|=\lambda(G)$. 因而,$G-X$ 恰好包含两个连通分支 $G_1$ 和 $G_2$. 不妨设 $G_1$ 的阶为 $k$, $G_2$ 的阶为 $n-k$. 由于 $X$ 是由连接 $G_1$ 和 $G_2$ 的所有边构成, 且 $G$ 是完全图, 故 $|X|=k(n-k)$. 因为 $k\geqslant 1$, $n-k\geqslant 1$, 所以 $(k-1)(n-k-1)\geqslant 0$. 因此

$$(k-1)(n-k-1)=k(n-k)-n+1\geqslant 0.$$

从而,$\lambda(G)=|X|=k(n-k)\geqslant n-1$. 故 $\lambda(K_n)=n-1$. ◇

根据前面的讨论, 完全图没有顶点割. 对于非完全图 $G$, 我们将证明, 最小顶点割的基数不超过任意边割的基数. 下面定理建立了连通度, 边连通度, 最小度之间的不等式关系. 定理的部分证明类似于例 5.10 中 $\lambda(K_n)=n-1$ 的证明.

**定理 5.11** 对于任意图 $G$,

$$\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G).$$

**证** [直接证法] 若图 $G$ 为不连通的或平凡的, 则 $\kappa(G)=\lambda(G)=0$; 若 $G\cong K_n$ ($n\geqslant 2$), 则 $\kappa(G)=\lambda(G)=\delta(G)=n-1$. 对于上述两种情形, 不等式显然成立. 因此我们假设 $G$ 是阶至少为 3 的非完全的连通图, 从而 $\delta(G)\leqslant n-2$.

首先, 我们证明 $\lambda(G)\leqslant\delta(G)$. 设 $v$ 是 $G$ 的某个顶点, 且满足 $\deg v=\delta(G)$. 因为与 $v$ 关联的 $\delta(G)$ 条边构成了 $G$ 的一个边割, 所以

$$\lambda(G)\leqslant\delta(G)\leqslant n-2.$$

下面证明 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)$. 设 $X$ 是 $G$ 的最小边割, 因而 $|X|=\lambda(G)\leqslant n-2$, $G-X$ 恰好包含两个连通分支 $G_1$ 和 $G_2$. 不妨设 $G_1$ 的阶为 $k$, $G_2$ 的阶为 $n-k$, 且 $k\geqslant 1, n-k\geqslant 1$. 则 $X$ 中每一条边都连接着 $G_1$ 的某个顶点和 $G_2$ 的某个顶点. 我们分下面两种情形讨论.

**情形 1** $G_1$ 的每个顶点都邻接于 $G_2$ 的每个顶点. 因此, $|X|=k(n-k)$. 由于 $(k-1)(n-k-1)\geqslant 0$, 则

$$(k-1)(n-k-1)=k(n-k)-n+1\geqslant 0,$$

从而 $\lambda(G)=|X|=k(n-k)\geqslant n-1$. 然而,$\lambda(G)\leqslant n-2$; 故该情形不可能发生.

**情形 2** 存在 $G_1$ 的顶点 $u$ 和 $G_2$ 的顶点 $v$, 使得 $u$ 和 $v$ 在 $G$ 中不邻接. 现在, 我们定义 $G$ 顶点集的一个子集 $U$. 对于任一条边 $e\in X$, 我们按照下面方法选择顶点来构造 $U$: 若 $u$ 与 $e$ 关联, 则选择 $G_2$ 中与 $e$ 关联的顶点作为 $U$ 的一个元素; 否则, 选择 $G_1$ 中与 $e$ 关联的顶点作为 $U$ 的一个元素. 显然,$|U|\leqslant|X|$. 由于 $u,v\notin U$, 且 $G-U$ 不含 $u-v$ 路, 故 $G-U$ 是不连通的. 故 $U$ 是顶点割. 因此

$$\kappa(G)\leqslant|U|\leqslant|X|=\lambda(G),$$

定理得证. ■

定理 5.11 要归功于 Hassler Whitney. 尽管这位数学家在图论方面做了大量重要的贡献, 但他最初的研究兴趣却在拓扑学上. Whitney 于 1907 年 3 月 23 日出生在纽约, 1932 年, 他在 George David Birkhoff 指导下获得哈佛大学的博士学位. Whitney 的博士论文是关于图论方面的工作. 此后他一直在哈佛大学, 直到 1952 年他接受了普

林斯顿高级研究院的邀请, 并在此工作直至 1977 年退休. Whitney 一生获得过许多数学奖, 如: 美国国家科学奖 (1976 年), Wolf 奖 (1983 年), Steel 奖 (1985 年).

Whitney 把毕生大部分精力放在了科学研究上, 他以多种方式对数学作出了贡献. 在 1944~1949 年期间, 他担任美国数学杂志 (*American Journal of Mathematics*) 的编委. 在 1949~1954 年期间, 他担任美国数学评论 (*Mathematical Reviews*) 的编委. 在 1953~1956 年期间, 他担任了美国国家科学基金数学组的主任. 在业余生活方面, Whitney 是一位狂热的登山爱好者. 位于美国新罕布什尔州 Franconia 地区的 Cannon 崖上的 Whitney-Gilman 山脊就是以他和他的兄弟 Gilman 命名的, 因为他们于 1939 年 8 月 3 日首次登上它. Whitney 于 1989 年 5 月 10 日去世.

对于图 5.8 中的图 $G$, $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$, $\delta(G) = 3$. 由此可以看出, 定理 5.11 中的不等式是可以严格成立的. 然而, 对于任意立方图, 连通度和边连通度总是相等的.

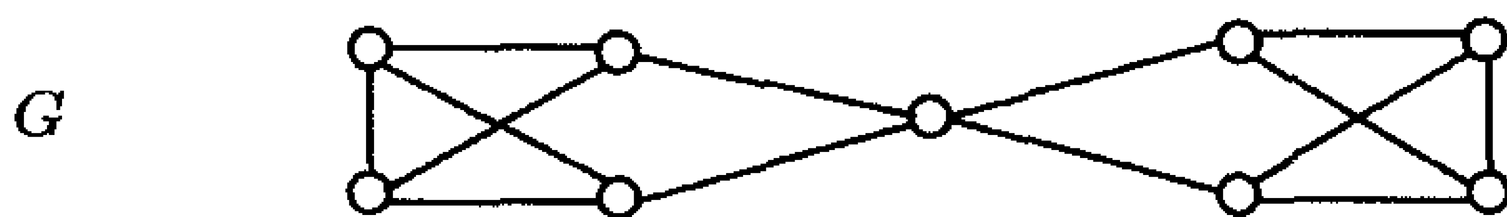



图 5.8 图 $G$, 满足 $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$, $\delta(G) = 3$

**定理 5.12** 若 $G$ 为一个立方图, 则 $\kappa(G) = \lambda(G)$.

**证** [直接证法] 对于立方图 $G$, 显然 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 当且仅当 $G$ 是不连通的. 由定理 5.11, 不难发现, 若 $\kappa(G) = 3$, 则 $\lambda(G) = 3$. 因此, 仅需要讨论下面两种情形, 即 $\kappa(G) = 1$ 和 $\kappa(G) = 2$. 设 $U$ 是 $G$ 的最小顶点割, 则 $|U| = 1$ 或 $|U| = 2$. $G - U$ 是不连通的, 设 $G_1$ 和 $G_2$ 是 $G - U$ 的两个连通分支. 因为 $G$ 是立方图, 所以对于任意 $u \in U$, 在 $G_1$ 和 $G_2$ 中至少有一个恰好包含 $u$ 的一个邻点.

*情形* 1. $\kappa(G) = |U| = 1$. 即 $U$ 由 $G$ 的一个割点 $u$ 构成. 由于 $G - U$ 的某个连通分支恰好包含 $u$ 的一个邻点 $w$, 则边 $uw$ 是 $G$ 的一条割边, 故 $\lambda(G) = \kappa(G) = 1$.

*情形* 2. $\kappa(G) = |U| = 2$. 即 $U = \{u, v\}$. 假设 $u$ 和 $v$ 在 $G - U$ 的同一个连通分支内都有唯一邻点, 分别记为 $u'$ 和 $v'$. (当 $uv \in E(G)$ 时, 这种假设必然成立; 当 $u$ 和 $v$ 不邻接时, 如图 5.9(a) 所示.) 此时, $X = \{uu', vv'\}$ 是 $G$ 的边割, 故 $\lambda(G) = \kappa(G) = 2$.

因此我们可以假设 $u$ 在 $G_1$ 中有一个邻点, 在 $G_2$ 中有两个邻点; $v$ 在 $G_1$ 中有两个邻点, 在 $G_2$ 中有一个邻点 (如图 5.9(b) 所示). 此时,$uv \notin E(G)$ 且 $X = \{uu', vv'\}$ 是 $G$ 的边割, 故 $\lambda(G) = \kappa(G) = 2$. ■

对于阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图, 其连通度不可能任意地大. 例如, 若 $m < n-1$, 由定理 4.7, $G$ 是不连通的, 即 $\kappa(G) = 0$. 正如下面我们将要介绍的定理, 若 $m \geqslant n-1$, 则 $\kappa(G)$ 存在紧的上界. (下面出现的函数 $\lfloor \cdot \rfloor$ 与 $\lceil \cdot \rceil$ 见附录 1.)

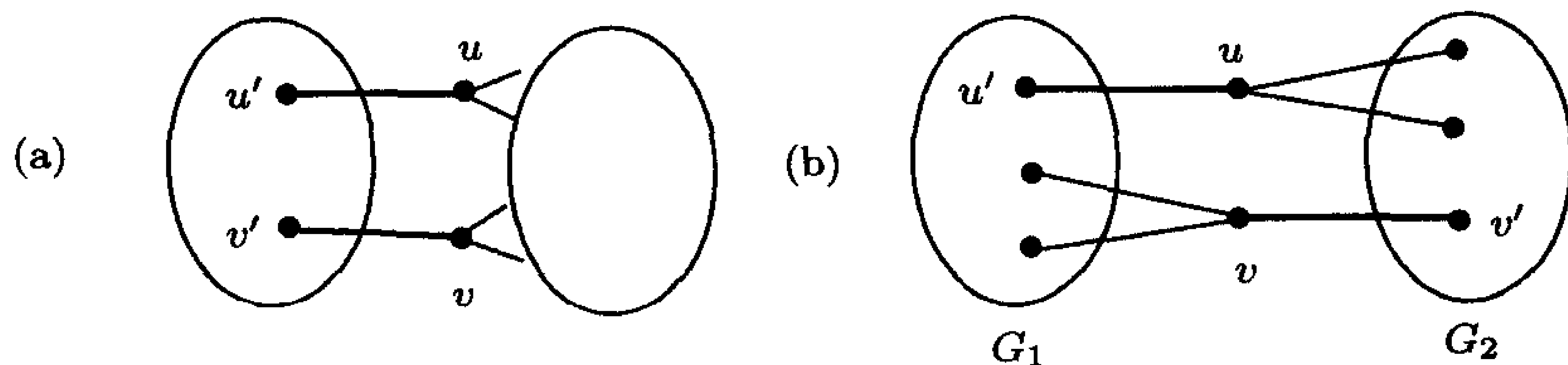



图 5.9 情形 2

**定理 5.13** 若 $G$ 是一个阶为 $n$ 且边数为 $m\ (m \geqslant n-1)$ 的图, 则

$$\kappa(G) \leqslant \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor.$$

**证** [直接证法] $G$ 所有顶点的度和为 $2m$, 故 $G$ 的平均度为 $2m/n$. 因而,$\delta(G) \leqslant 2m/n$. 由于 $\delta(G)$ 是整数, 故 $\delta(G) \leqslant \lfloor 2m/n \rfloor$. 由定理 5.11, $\kappa(G) \leqslant \lfloor 2m/n \rfloor$. ■

我们断言: 定理 5.13 所给出的上界是紧的, 即, 对于任意满足 $1 \leqslant n-1 \leqslant m \leqslant \binom{n}{2}$ 的 $n$ 和 $m$, 存在阶为 $n$, 边数为 $m$ 的图 $G$, 使得 $\kappa(G) = \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$. 下面, 我们将要说明上述断言是正确的. 若 $m = n-1$, 则任一个阶为 $n$ 的树都满足

$$\kappa(T) = \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n-2}{n} \right\rfloor = 1.$$

因此, 我们可以假设 $3 \leqslant n \leqslant m \leqslant \binom{n}{2}$.

对于满足 $2 \leqslant r < n$ 的整数 $r$ 和 $n$, 由阶为 $n$ 且 $\kappa(H_{r,n}) = r$ 的图 $H_{r,n}$ 所构成的图类对我们的讨论非常有意义. 设 $V(H_{r,n}) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 首先, 假设 $r = 2k$ 是一个偶数. 对于任一整数 $i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$, 顶点 $v_i$ 与顶点 $v_{i+1}, v_{i+2}, \cdots, v_{i+k}$ 和 $v_{i-1}, v_{i-2}, \cdots, v_{i-k}$ 都邻接. 在此情形下, $H_{r,n}$ 是阶为 $n$ 的 $r$ 正则图.

接下来, 假设 $r = 2k+1$ 是一个奇数, $n = 2\ell$ 是一个偶数. 对于任一整数 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 连接顶点 $v_i$ 到上述的 $2k$ 个顶点, 同时连接 $v_i$ 到顶点 $v_{i+\ell}$. 在此情形下,$H_{r,n}$ 同样是阶为 $n$ 的 $r$ 正则图. (图 $H_{r,n}$ 在定理 2.6 的证明中已被提及.) 最后, 假设 $r\ (r = 2k+1)$ 和 $n\ (n = 2\ell+1)$ 都是奇数. 在此情形下,$H_{r,n}$ 是由 $H_{r-1,n}$ 添加边 $v_i v_{i+\ell+1}\ (i = 1, 2, \cdots, \ell)$ 和边 $v_1 v_{\ell+1}$ 所得. 因而, 当 $r$ 和 $n$ 都是奇数时,$H_{r,n}$ 包含一个度为 $r+1$ 的顶点和 $n-1$ 个度为 $r$ 的顶点. 综上所述, 若 $r$ 或 $n$ 为偶数,$H_{r,n}$ 的边数为 $\frac{rn}{2}$; 若 $r$ 和 $n$ 都为奇数,$H_{r,n}$ 的边数为 $\frac{rn+1}{2}$. 一般地,$H_{r,n}$ 的边数为 $\lceil \frac{rn}{2} \rceil$. (图 5.10 给出了图 $H_{4,8}, H_{5,8}, H_{5,9}$.) 事实上, 在定理 2.6 中, 我们已经介绍过 $r$ 或 $n$ 是偶数情形下的 $H_{r,n}$. 图 $H_{r,n}$ 称为是**Harary 图**, 以 Frank Harary 命名. 在第 6 章中, 我们将再次见到它. 本节我们介绍 Harary 图的目的是源于下面定理.

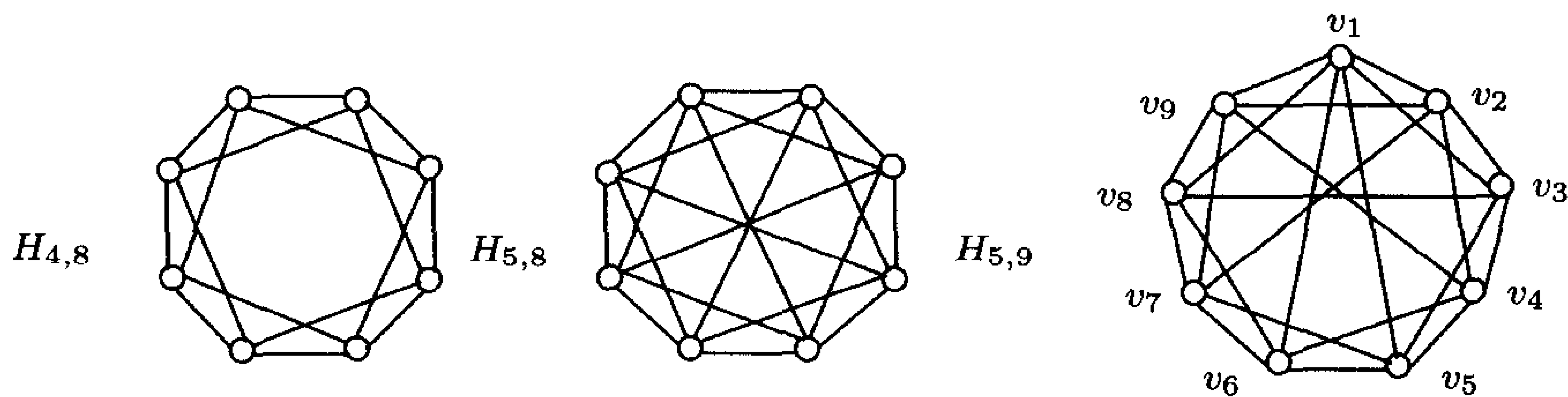



图 5.10 Harary 图: $H_{4,8}, H_{5,8}, H_{5,9}$

**定理 5.14** 对于任意两个整数 $r$ 和 $n\,(2 \leqslant r < n)$,

$$\kappa(H_{r,n}) = r.$$

尽管验证定理 5.14 的一般情形非常乏味, 但当 $r$ 很小, 我们还是可以去讨论它. 由于 $H_{2,n} = C_n$, 故 $\kappa(H_{2,n}) = 2$. 下面我们将验证定理 5.14 当 $r = 3$ 时的情形.

**例 5.15** 证明: $\kappa(H_{3,n}) = 3$.

**解** 首先假设 $n = 2\ell \geqslant 4$ 是一个偶数. 由于 $H_{3,n}$ 是 3 正则的, 且包含生成 $n$ 圈 $C: v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1$, 故

$$2 \leqslant \kappa(H_{3,n}) \leqslant 3.$$

设 $U = \{u, v\}$ 是由 $H_{3,n}$ 的任意两个顶点构成的集合. 我们将证明 $H_{3,n} - U$ 是连通的.$C$ 中存在一条长至多为 $\ell$ 的 $u-v$ 路 $P$. 不失一般性, 我们可以假设 $u = v_1$, $v = v_j$, 其中 $2 \leqslant j \leqslant \ell + 1$. 若 $v = v_2$, 则 $H_{3,n} - U$ 包含生成路 $v_3, v_4, \cdots, v_n$, 故 $H_{3,n} - U$ 是连通的. 因而, 仅需考虑 $3 \leqslant j \leqslant \ell + 1$ 即可. 但是在此情形下, $H_{3,n} - U$ 包含路

$$P': v_2, v_3, \cdots, v_{j-1},$$
$$P'': v_{j+1}, v_{j+2}, \cdots, v_n$$

和边 $v_2v_{\ell+2}$. 由于 $v_{\ell+2}$ 属于 $P''$, 故 $H_{3,n} - U$ 是连通的. 因此, 当 $n$ 是偶数时,$H_{3,n}$ 不存在由两个顶点构成的顶点割.

下面假设 $n = 2\ell + 1 \geqslant 5$ 是一个奇数. 设 $U$ 是由 $H_{3,n}$ 中任意两个顶点构成的集合, 记为 $U = \{v_i, v_j\}$, 其中 $1 \leqslant i < j \leqslant n$. 若 $j = i + 1$, 则 $H_{3,n} - U$ 包含生成路 $v_{j+1}, v_{j+2}, \cdots, v_{i-1}$ (下标实施模 $n$ 的运算), 故 $H_{3,n} - U$ 是连通的. 因而, 我们可以假设 $j \neq i + 1$.

易见, 路 $P: v_i, v_{i+1}, \cdots, v_j$ 和路 $Q: v_j, v_{j+1}, \cdots, v_i$ 至少有一条长度不超过 $\ell$. 若 $P$ 的长度不超过 $\ell$, 则 $H_{3,n} - U$ 包含路

$$P': v_{i+1}, v_{i+2}, \cdots, v_{j-1},\ Q': v_{j+1}, v_{j+2}, \cdots, v_{i-1}$$

和边 $v_{i+1}v_{i+\ell+1}$, 其中 $v_{i+\ell+1}$ 属于 $Q'$, 故 $H_{3,n}-U$ 是连通的. 若 $Q$ 的长不超过 $\ell$, 类似可得,$H_{3,n}-U$ 同样包含路 $P'$, $Q'$ 和边 $v_{j+2}v_{j+\ell+2}$, 其中 $v_{j+\ell+2}$ 属于 $P'$, 故 $H_{3,n}-U$ 是连通的. 因此,$U$ 不是顶点割, 故 $\kappa(H_{3,n})=3$. ◇

再回到定理 5.13, 若 $G$ 是阶为 $n$ 且边数为 $m$ $(m \geqslant n-1)$ 的图, 则

$$\kappa(G) \leqslant \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor.$$

对于任意两个整数 $m$ 和 $n$, 满足 $1 \leqslant n-1 \leqslant m \leqslant \binom{n}{2}$, 都存在唯一的正整数 $r$, 使得 $r \leqslant \frac{2m}{n} < r+1$. 因而,

$$\frac{rn}{2} \leqslant \left\lceil \frac{rn}{2} \right\rceil \leqslant m < \frac{n(r+1)}{2}.$$

故阶为 $n$ 且 $\kappa(G)=r$ 的图 $G$ 的最小边数为 $\lceil \frac{rn}{2} \rceil$. 正如我们前面看到的, $\lceil \frac{rn}{2} \rceil$ 恰好为 Harary 图 $H_{r,n}$ 的边数. 由于 $\lceil \frac{rn}{2} \rceil \leqslant m < \frac{n(r+1)}{2}$, 故可设 $m=\lceil \frac{rn}{2} \rceil + t$, 其中当 $n$ 为偶数时,$0 \leqslant t < n/2$; 当 $r$ 为偶数,$n$ 为奇数时, $0 \leqslant t < (n-1)/2$; 当 $r$ 和 $n$ 均为奇数时,$0 \leqslant t < (n-3)/2$. 由图 $H_{r,n}$ 添加 $t$ 条边构成一个边数为 $m$ 的图 $H'$. 由于 $H_{r,n}$ 是 $H'$ 的生成子图, 故

$$r = \kappa(H_{r,n}) \leqslant \kappa(H').$$

当然,$H'$ 至少包含一个度为 $r$ 的顶点, 故 $\delta(H')=r$. 由定理 5.11, $\kappa(H') \leqslant r$, 因此,$\kappa(H')=r$. 正如前文的断言, 定理 5.13 中的界是紧的.

## 习题

5.17 对于图, 定义极小顶点割有意义吗? 若有意义, 它是怎样定义的? 由此可以提出什么问题? 若没有意义, 为什么?

5.18 设 PG 是 Petersen 图, 按下面要求给出例子:
(a) PG 的一个最小顶点割.
(b) PG 的一个顶点割 $U$, $U$ 不是最小顶点割, 且 $U$ 的任一真子集都不是 PG 的顶点割.

5.19 证明或反驳: 设 $G$ 为非平凡图, 对于 $G$ 中任一顶点 $v$, $\kappa(G-v)=\kappa(G)$ 或 $\kappa(G-v)=\kappa(G)-1$.

5.20 设 $G$ 为 $n$ $(n \geqslant 4)$ 阶连通图, $k$ 为一个整数, 且满足 $2 \leqslant k \leqslant n-2$.
(a) 证明: 若 $G$ 不是 $k$ 连通的, 则 $G$ 包含顶点割 $U$, 使得 $|U|=k-1$.
(b) 证明: 若 $G$ 不是 $k$ 边连通的, 则 $G$ 包含边割 $X$, 使得 $|X|=k-1$.

5.21 列举满足下列性质的图或说明为什么不存在这样的图.
(a) 一个是 2 连通但不是 3 连通的图.
(b) 一个是 3 连通但不是 2 连通的图.
(c) 一个是 2 边连通但不是 3 边连通的图.

(d) 一个是 3 边连通但不是 2 边连通的图.

5.22 (a) 证明：若 $G$ 为一个 $k$ 连通图,$e$ 是 $G$ 的一条边, 则 $G-e$ 是 $(k-1)$ 连通图.

(b) 证明：若 $G$ 为一个 $k$ 边连通图,$e$ 是 $G$ 的一条边则 $G-e$ 是 $(k-1)$ 边连通图.

5.23 (a) 证明：若 $G$ 为一个 $k$ 连通图, 则 $G+K_1$ 是 $(k+1)$ 连通图.

(b) 证明：若 $G$ 为一个 $k$ 边连通图, 则 $G+K_1$ 是 $(k+1)$ 边连通图.

5.24 设 $G$ 为 $n$ 阶图,$k$ 为一个整数, 且满足 $1 \leqslant k \leqslant n-1$. 证明：若 $\delta(G) \geqslant (n+k-2)/2$, 则 $G$ 是 $k$ 连通的.

5.25 列举满足下列性质的图 $G$ 或说明为什么不存在这样的图 $G$.

(a) $\kappa(G)=2$, $\lambda(G)=3$, $\delta(G)=4$;

(b) $\kappa(G)=3$, $\lambda(G)=2$, $\delta(G)=4$;

(c) $\kappa(G)=3$, $\lambda(G)=3$, $\delta(G)=2$;

(d) $\kappa(G)=2$, $\lambda(G)=2$, $\delta(G)=3$.

5.26 证明：若 $G$ 是 $n$ 阶图, 且满足 $\delta(G) \geqslant (n-1)/2$, 则 $\lambda(G)=\delta(G)$.

5.27 证明或反驳：

(a) 若图 $G$ 满足 $\kappa(G)=k \geqslant 1$, 则对于 $G$ 的任意 $k$ 个顶点构成的集合 $U$, $G-U$ 是不连通的.

(b) 若图 $G$ 满足 $\lambda(G)=k \geqslant 1$, 则对于 $G$ 的任意 $k$ 条边构成的集合 $X$, $G-X$ 是不连通的.

(c) 若 $G$ 是连通图,$U$ 是最小顶点割, 则 $G-U$ 恰好包含两个连通分支.

(d) 若 $G$ 为 $n$ 阶的非完全图, 且包含一个度为 $n-1$ 的顶点 $v$, 则 $v$ 属于 $G$ 的任一顶点割.

(e) 若 $G$ 为 $n$ 阶图, 且包含一个度为 $n-1$ 的顶点 $v$, 则 $G$ 的任一边割都包含一条与 $v$ 关联的边.

5.28 (a) 证明：若 $G$ 为 0 正则图, 则 $\kappa(G)=\lambda(G)$.

(b) 证明：若 $G$ 为 1 正则图, 则 $\kappa(G)=\lambda(G)$.

(c) 证明：若 $G$ 为 2 正则图, 则 $\kappa(G)=\lambda(G)$.

(d) 由 (a) − (c) 和定理 5.12 得到：若 $G$ 为 $r$ 正则图 $(0 \leqslant r \leqslant 3)$, 则 $\kappa(G)=\lambda(G)$. 找出最小正整数 $r$, 使得存在一个 $r$ 正则图 $G$, 满足 $\kappa(G) \neq \lambda(G)$, 并给予验证.

(e) 找出最小正整数 $r$, 使得存在一个 $r$ 正则图 $G$, 满足 $\lambda(G) \geqslant \kappa(G)+2$.

(f) (e) 中的问题可以使你联想起另外一个问题, 提出这个问题并给予回答.

5.29 列举满足下列条件的图.

(a) 连通图 $G$, 使得 $G$ 的任一顶点都属于某个最小顶点割, 但包含一条不属于任一最小边割的边.

(b) 连通图 $H$, 使得 $H$ 的任一边都属于某个最小边割, 但包含一个不属于任一最小顶点割的顶点.

5.30 对于图 $G$, 定义 $\overline{\kappa}(G)=\max\{\kappa(H)\}$ 和 $\overline{\lambda}(G)=\max\{\lambda(H)\}$, 其中 max 是对 $G$ 的所有子图 $H$ 求最大值.$\overline{\kappa}(G)$ 和 $\overline{\lambda}(G)$ 分别与 $\kappa(G)$ 和 $\lambda(G)$ 之间有什么关系?$\overline{\kappa}(G)$ 和 $\overline{\lambda}(G)$ 之间又有什么关系?

5.31 对于图 5.11 的图 $G$, 顶点表示十字路口, 边表示道路.

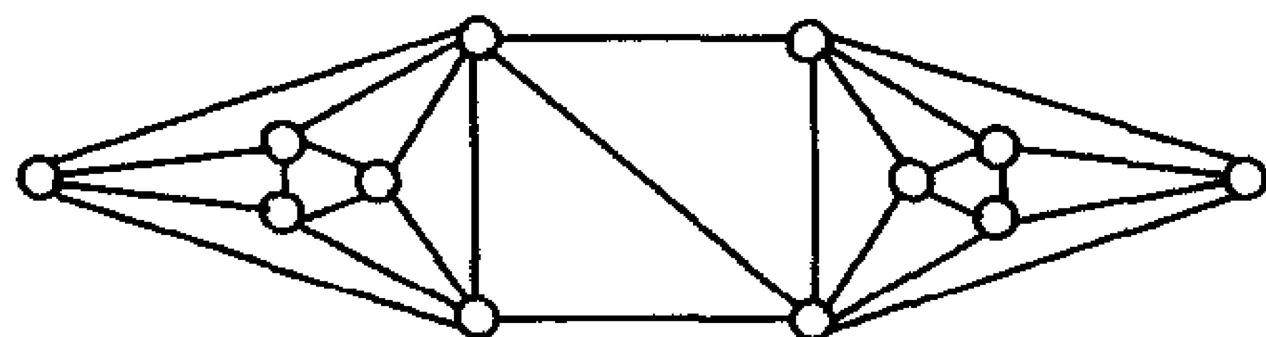


图 5.11 习题 5.31 中的图

(a) 在同一时间内维修 $k$ 条道路 (此时, 这些道路不能被使用), 同时保证任意两个十字路口之间仍然是通畅的. 求满足上述条件的最大 $k$ 值?

(b) 在同一时间内维修 $k$ 个十字路口 (此时, 这些十字路口不能被使用), 同时保证任意两个十字路口之间仍然是通畅的. 求满足上述条件的最大 $k$ 值?

5.32 验证定理 5.14 中 $r = 4$ 的情形, 即证明: 对于任意 $n$ ($n \geqslant 5$), Harary 图 $H_{4,n}$ 的连通度为 4.

## 5.4 Menger 定理

我们已经知道: 点连通度是图连通性的一种度量, 它依赖于满足下述条件的顶点的最小个数, 即删除这些顶点后可导致图平凡或不连通. 下面我们将从其他角度重新考虑连通度.

设 $S$ 是图 $G$ 的顶点集的一个子集,$u$ 和 $v$ 是 $G$ 的两个顶点. 若 $G-S$ 是不连通的, 且 $u$ 和 $v$ 属于 $G-S$ 不同的连通分支, 则称 $S$ **分离** (**separate**) $u$ 和 $v$. 显然, 若 $S$ 分离 $u$ 和 $v$, 则 $u$, $v$ 不邻接, 且 $S$ 是 $G$ 的顶点割. 当然,$S$ 的阶至少为 $\kappa(G)$. 此时, 集合 $S$ 称为是一个 **$u-v$ 分离集** (**$u-v$ separating set**). 具有最小基数的 $u-v$ 分离集称为是**最小 $u-v$ 分离集** (**minimum $u-v$ separating set**). 一条 $u-v$ 路 $P$ 的**内点** (**internal vertex**)是指 $P$ 上除 $u$ 和 $v$ 外的顶点. 由 $u-v$ 路构成的集合 $\{P_1, P_2, \cdots, P_k\}$ 称为是**内部不相交的** (**internally disjoint**), 若它们除 $u$ 和 $v$ 外没有其他公共顶点.

数学上有许多定理, 它们陈述某个集合中元素的最小个数等于另一个集合中元素的最大个数. 下面将要介绍的就是这样一个 "最小 - 最大" 定理, 称之为**Menger 定理**.

**定理 5.16** (**Menger 定理**) 设 $u$ 和 $v$ 是图 $G$ 的不邻接的两个顶点, 则 $u-v$ 分离集中顶点的最小个数等于 $G$ 中内部不相交 $u-v$ 路的最大个数.

**证** [归纳证法] 我们对图的边数进行归纳. 结论对于空图显然成立. 下面假设结论对所有边数小于 $m$ 的图都成立 ($m$ 为正整数). 设 $G$ 是边数为 $m$ 的图,$u$ 和 $v$ 是 $G$ 中不邻接的两个顶点. 假设最小 $u-v$ 分离集中有 $k$ 个顶点. 当然,$G$ 中内部

不相交的 $u-v$ 路个数不可能多于 $k$. 事实上, 我们只需证明 $G$ 包含 $k$ 条内部不相交 $u-v$ 路即可. 考虑下面三种情形.

**情形 1** $G$ 有一个最小 $u-v$ 分离集 $U$, $U$ 包含一个与 $u$ 和 $v$ 都邻接的顶点 $x$. 在此情形下, 子图 $G-x$ 的边数小于 $m$, 且由 $k-1$ 个顶点构成的集合 $U-\{x\}$ 是 $G-x$ 中的最小 $u-v$ 分离集. 由归纳假设, $G-x$ 有 $k-1$ 条内部不相交 $u-v$ 路. 再加上路 $u,x,v$, $G$ 恰好包含 $k$ 条内部不相交 $u-v$ 路.

**情形 2** $G$ 有一个最小 $u-v$ 分离集 $W$, $W$ 包含一个与 $u$ 不邻接的顶点和一个与 $v$ 不邻接的顶点. 设 $W=\{w_1,w_2,\cdots,w_k\}$; $G_u$ 是由 $G$ 中所有 $u-w_i$ 路构成的子图, 其中 $w_i\in W$ $(1\leqslant i\leqslant k)$; $G'_u$ 是由 $G_u$ 上添加一个新的顶点 $v'$, 并连接 $v'$ 到所有的 $w_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 构成的图. 类似地, 我们可以定义 $G_v$ 和 $G'_v$. 图 $G_u$, $G'_u$, $G_v$, $G'_v$ 可如图 5.12 所示.

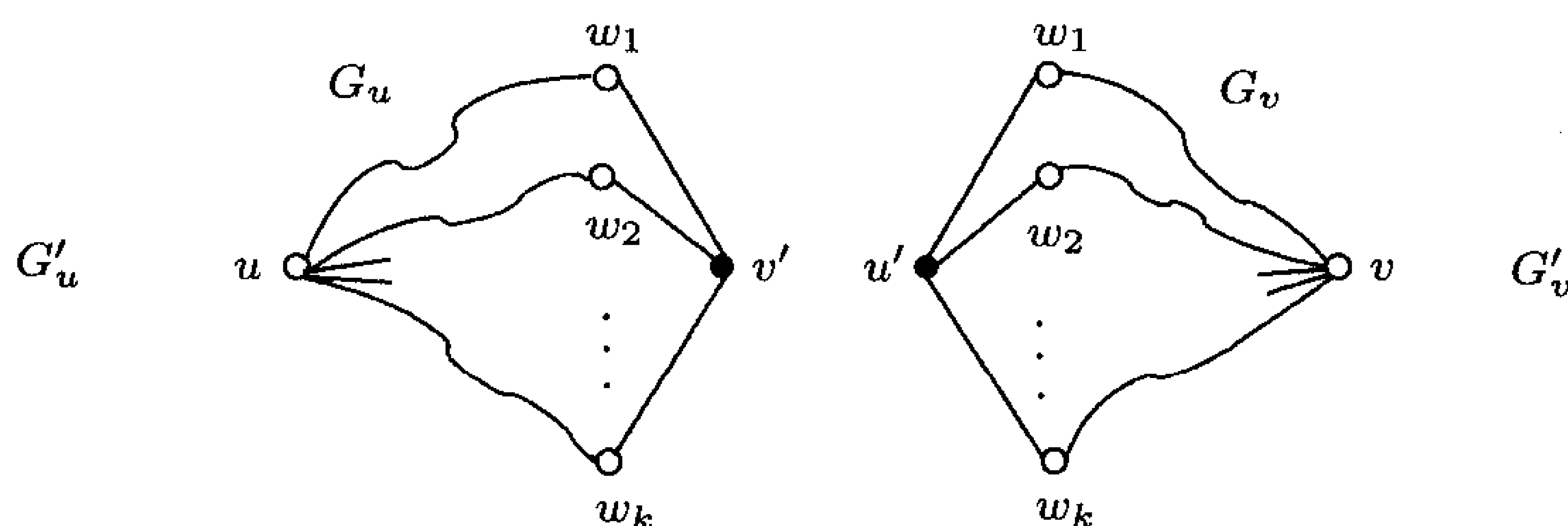



图 5.12 情形 2 中的图 $G_u$, $G'_u$, $G_v$, $G'_v$

因为 $W$ 包含一个与 $u$ 不邻接的顶点和一个与 $v$ 不邻接的顶点, 所以图 $G'_u$ 和 $G'_v$ 的边数均小于 $m$. 不难看出,$W$ 是 $G'_u$ 的最小 $u-v'$ 分离集. 由归纳假设,$G'_u$ 包含 $k$ 条内部不相交的 $u-v'$ 路, 其中每一条都是由 $u-w_i$ 路 $P_i$ 再连接边 $w_iv'$ 构成. 类似地,$G'_v$ 包含 $k$ 条内部不相交的 $u'-v$ 路, 其中每一条都是由 $w_i-v$ 路 $Q_i$ 再连接边 $u'w_i$ 构成. 由于 $W$ 是 $G$ 的 $u-v$ 分离集, 则 $W$ 的顶点是 $G_u$ 和 $G_v$ 仅有的公共顶点. 因此, 由 $P_i$ 连接到 $Q_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 构成的 $k$ 条路是 $G$ 中内部不相交的 $u-v$ 路.

**情形 3** $G$ 的每个最小 $u-v$ 分离集 $S$ 的所有顶点或者均邻接 $u$, 不邻接 $v$; 或者均邻接 $v$, 不邻接 $u$. 设 $P: u,x,y,\cdots,v$ 为 $G$ 的一条 $u-v$ 测地线, 记 $e=xy$. 考虑 $G$ 的子图 $G-e$. 显然,$G-e$ 的任一最小 $u-v$ 分离集均至少包含 $k-1$ 个顶点 (当然, 不可能超过 $k$ 个). 我们断言: $G-e$ 的最小 $u-v$ 分离集恰有 $k$ 个顶点. 反证, 假设断言不成立,$G-e$ 包含一个由 $k-1$ 个顶点构成的最小 $u-v$ 分离集 $Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_{k-1}\}$. 则 $Z\cup\{x\}$ 必定为 $G$ 的最小 $u-v$ 分离集. 由于 $x$ 邻接 $u$, 由该情形的假设, 任一 $z_i$ $(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 均邻接 $u$, 不邻接 $v$. 另一方面, $Z\cup\{y\}$ 也为 $G$ 的最小 $u-v$ 分离集. 这就意味着 $y$ 同样邻接 $u$, 这显然与 $P$ 是 $u-v$ 测地线

相矛盾. 由前面断言,$G-e$ 的最小 $u-v$ 分离集包含 $k$ 个顶点. 由归纳假设,$G-e$ 包含 $k$ 条内部不相交的 $u-v$ 路. 因而,$G$ 包含 $k$ 条内部不相交的 $u-v$ 路. ■

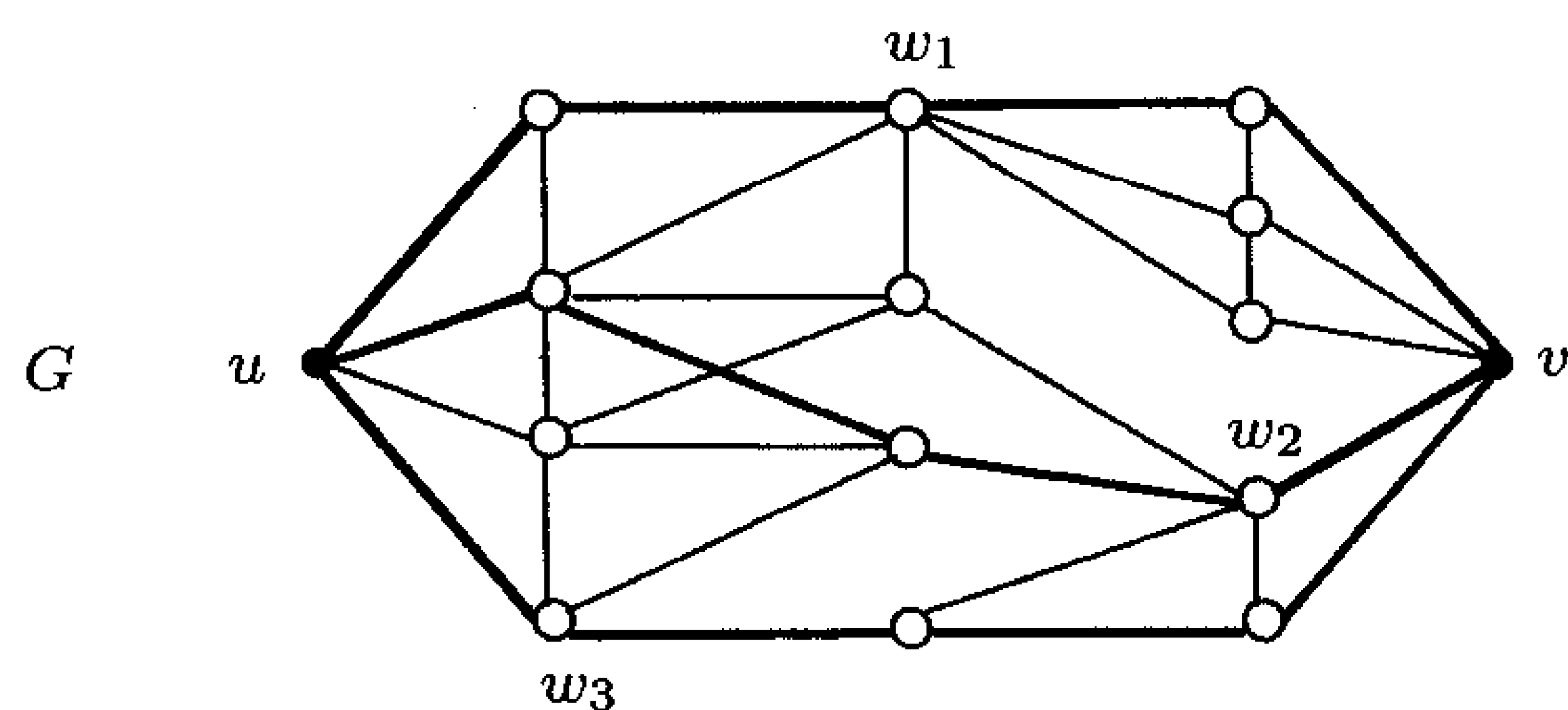



图 5.13　Menger 定理的图例

在图 5.13 所示的图 $G$ 中,$U=\{w_1,w_2,w_3\}$ 是一个 $u-v$ 分离集. 由于不存在少于三个顶点的 $u-v$ 分离集, 则 $U$ 为最小 $u-v$ 分离集. 由定理 5.16, $G$ 有三条内部不相交的 $u-v$ 路 (图 5.13 中已用粗线标明).

正如前面提到的, 定理 5.16 被称为 Menger 定理, 是以 Karl Menger 命名的. Menger 于 1902 年 1 月 13 日出生于奥地利维也纳. 他在早年就显示出在数学和物理学上的天赋, 并于 1920 年进入维也纳大学学习物理学. 次年, 他参加了德国物理学家 Hans Hahn 关于*Neueres über den Kurvenbegriff* (曲线概念的新意) 的讲座. 从此, Menger 把兴趣转向了数学. Hahn 在讲座中提到,(在当时) 还没有令人满意的曲线定义. 尽管一些知名的数学家, 包括 Georg Cantor, Camille Jordan, Giuseppe Peano, 做过一些尝试, 但都不成功. 还有少数数学家, 包括 Felix Hausdorff 和 Ludwig Bieberbach, 甚至认为这个问题不可能被彻底解决. 尽管作为一名数学背景十分有限的本科生, Menger 最终还是解决了该问题, 并把他的解决方案提交给 Hahn. 由此,Menger 的工作便转入到曲线和维数理论领域.

上学期间, Menger 病的很重, 他的研究工作也受到了干扰; 在此期间他的父母双双去世. 但最终 Menger 还是重新回到了大学, 并于 1924 年在 Hahn 的指导下完成了研究工作. 次年, Menger 到阿姆斯特丹与 Luitzen Brouwer 一起工作并且拓宽了自己的数学兴趣. 1927 年, Menger 再次回到维也纳大学, 接受了几何学首席教授的职位. 这一年, 他完成了论文 “Zur allgemeinen Kurventheorie” (Menger 定理). Menger 称该定理为 “$n-$ 弧定理”, 并把它作为曲线理论中的一个引理.

1930 年春, Menger 来到布达佩斯, 在那里他认识了许多匈牙利数学家, 其中包括 Dénes König. Menger 曾经读过 König 的一些文章. 在访问期间, Menger 得知 König 正在编写一本书, 该书将囊括当时图论上所有的知名定理. Menger 很高兴地向 König 提及自己的定理, 该定理作为一篇曲线理论论文的引理, 仅仅发表在三年前. König 对 Menger 的工作不以为然, 事实上, 他根本不相信这个定理是正确

的. 在他们会面的当天晚上, König 试图构造出该定理的反例. 当他们第二天会面时, König 一见面就说 "一个不眠之夜!" 于是,König 要求 Menger 给出定理的证明, Menger 欣然同意. 随后,König 声称他将在书的最后加上一节, 以补充这个定理; 他确实这么做了. 这就是为什么 Menger 定理在图论爱好者中如此知名的主要原因.

1938 年, 鉴于奥地利的政治局势, Menger 前往美国圣母大学任职. 在这里, 他仍然致力于几何学的研究, 但没有取得如他早期工作所产生的影响力, 因为几何学并不再是人们十分感兴趣的课题, 特别是在美国. 1948 年, Menger 前往芝加哥的伊利诺伊理工学院, 在此度过余生. Menger 被认为是 20 世纪最为杰出的数学家之一, 他于 1985 年 10 月 5 日去世.

借助于 Menger 定理, Hassler Whitney 给出了 $k$ 连通图的刻画.

**定理 5.17** *一个非平凡图 $G$ 是 $k$ 连通的 ($k \geqslant 2$) 当且仅当对于 $G$ 的任意两个顶点 $u, v$, $G$ 至少有 $k$ 条内部不相交的 $u-v$ 路.*

**证** [直接证法] 设 $G$ 为 $k$ 连通图 ($k \geqslant 2$), $u$ 和 $v$ 为 $G$ 的两个顶点. 首先假设 $u$ 和 $v$ 是不邻接的, $U$ 为 $G$ 的最小 $u-v$ 分离集. 显然,$|U| \geqslant \kappa(G) \geqslant k$. 由定理 5.16, $G$ 至少包含 $k$ 条内部不相交的 $u-v$ 路. 下面假设 $u$ 和 $v$ 是邻接的, 其中 $e = uv$. 不难发现,$G-e$ 是 $(k-1)$ 连通的 (参见习题 5.22). 设 $W$ 为 $G-e$ 的最小 $u-v$ 分离集. 因而,

$$|W| \geqslant \kappa(G-e) \geqslant k-1.$$

由定理 5.16, $G-e$ 至少包含 $k-1$ 条内部不相交的 $u-v$ 路. 故 $G$ 至少包含 $k$ 条内部不相交的 $u-v$ 路.

反之, 设 $G$ 为一个满足如下条件的图: 对于 $G$ 中任意两个不同顶点 $u, v$, $G$ 至少有 $k$ 条内部不相交的 $u-v$ 路. 设 $U$ 为 $G$ 的最小顶点割, 则 $|U| = \kappa(G)$. 令 $x$ 和 $y$ 为 $G-U$ 中位于不同连通分支中的顶点. 因而,$U$ 是 $G$ 的 $x-y$ 分离集. 由于 $G$ 中至少有 $k$ 条内部不相交的 $x-y$ 路, 由定理 5.16, $\kappa(G) = |U| \geqslant k$. 因此,$G$ 是 $k$ 连通的. ∎

Whitney 定理 (定理 5.17) 是 Menger 定理很有价值的一个推论. 下面的结果 (推论 5.18) 是 Whitney 定理的推论, 而推论 5.19 又是推论 5.18 的一个推论. 这两个推论的证明将留作习题.

**推论 5.18** *设 $G$ 为 $k$ 连通图, $S$ 是由 $G$ 中任意 $k$ 个顶点构成的集合. 若图 $H$ 是由 $G$ 通过添加一个新的顶点 $w$ 以及连接 $w$ 到 $S$ 中所有的顶点所得, 则 $H$ 也是 $k$ 连通的.*

前面已经提到, 由 $u-v$ 路构成的集合 $\{P_1, P_2, \cdots, P_k\}$ 称为是内部不相交的, 若该集合中任意两条路仅有 $u$, $v$ 两个公共顶点, 即, 在该集合内, 每条路的内点不可能位于其他路上. 更为一般地, 对于 $k+1$ 个不同顶点 $u, v_1, v_2, \cdots, v_k$, $k$ 条路的集合 $\{P_1, P_2, \cdots, P_k\}$ , 其中 $P_i$ 为一条 $u-v_i$ 路 ($1 \leqslant i \leqslant k$), 称为是**内部不相交的**

**(internally disjoint)**, 如果该集合中任意两条路仅有一个公共顶点 $u$. 对于 $2k$ 个不同顶点 $u_1, u_2, \cdots, u_k, v_1, v_2, \cdots, v_k$, $k$ 条路的集合 $\{P_1, P_2, \cdots, P_k\}$, 其中 $P_i$ 为一条 $u_i - v_i$ 路 $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 称为是**不相交的 (disjoint)**, 如果该集合中任意两条路没有公共顶点.

**推论 5.19** *若 $G$ 为 $k$ 连通图, $u, v_1, v_2, \cdots, v_k$ 为 $G$ 中 $k+1$ 个不同顶点, 则 $G$ 有内部不相交的 $u - v_i$ 路 $(1 \leqslant i \leqslant k)$.*

根据定理 5.7, 我们知道: 若图 $G$ 是 2 连通的 (即阶至少为 3 的不可分图), 则 $G$ 中任意两个顶点均位于某一个圈上. 对于 $k$ 连通图, Gabriel Dirac 将这一结果推广到一般情形.

**定理 5.20** *若 $G$ 为 $k$ 连通图 $(k \geqslant 2)$, 则 $G$ 中任意 $k$ 个顶点均位于某一个圈上.*

**证** [反证法] 设 $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ 为 $G$ 中 $k$ 个顶点构成的集合. 我们只需证明 $G$ 中存在包含 $S$ 中所有顶点的一个圈即可. 在 $G$ 的所有圈中, 设 $C$ 为包含 $S$ 中顶点个数 ($\ell$ 个) 最多的一个. 我们断言: $\ell = k$. 假设断言不成立, 即 $\ell < k$. 因为 $G$ 是 $k$ 连通的 $(k \geqslant 2)$, 显然是 2 连通的. 由定理 5.7, 易知 $2 \leqslant \ell < k$. 不失一般性, 我们可以假设 $S$ 中被 $C$ 包含的 $\ell$ 个顶点恰为 $v_1, v_2, \cdots, v_\ell$; 这 $\ell$ 个顶点在 $C$ 上的循环出现的次序为 $v_1, v_2, \cdots, v_\ell$.

由于 $\ell < k$, 故 $S$ 中存在一个不属于 $C$ 的顶点 $u$. 此外, 由于 $2 \leqslant \ell < k$, 故 $G$ 是 $\ell$ 连通的. 假设 $C$ 的阶数为 $\ell$, 对于顶点 $u, v_1, v_2, \cdots, v_\ell$, 利用推论 5.19, 我们发现 $G$ 包含 $\ell$ 条内部不相交的 $u - v_i$ 路 $P_i$, 其中 $1 \leqslant i \leqslant \ell$. 用 $P_1$ 和 $P_2$ 替换边 $v_1v_2$ 得到包含顶点 $u, v_1, v_2, \cdots, v_\ell$ 的圈 $C'$, 从而导致矛盾. 因此, 我们可以假设 $C$ 有一个不属于 $S$ 的顶点 $v_0$. 由于 $2 \leqslant \ell + 1 \leqslant k$, 则 $G$ 是 $(\ell+1)$ 连通的. 对于顶点 $u, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_\ell$ 利用推论 5.19, 我们同样发现 $G$ 包含 $\ell+1$ 条内部不相交的 $u - v_i$ 路 $P_i$, 其中 $0 \leqslant i \leqslant \ell$. $P_i$ 中可能有许多顶点同时位于 $C$ 上, 记 $v_i'$ 为 $P_i$ 上从 $u$ 开始的第一个属于 $C$ 的顶点 (当然,$v_i'$ 可能就是 $v_i$). 设 $P_i'$ 为 $P_i$ 的 $u - v_i'$ 子路. 由于存在 $\ell+1$ 条路 $P_i'$, 而 $C$ 中仅有 $\ell$ 个顶点属于 $S$, 则存在两个顶点 $v_r'$ 和 $v_t' (0 \leqslant r, t \leqslant l)$, 使得 $C$ 上存在一条 $v_r' - v_t'$ 路 $P'$, 路 $P'$ 的所有内点都不属于 $S$. 在 $C$ 中移除 $P'$ 的内点并添加路 $P_r', P_t'$, 即可得到包含 $u, v_1, v_2, \cdots, v_\ell$ 的圈, 从而导致矛盾. ■

本节所有的结论均涉及到连通度. 关于边连通度有类似于定理 5.16 和 5.17 的结论. 下面将介绍它们.

**定理 5.21** *对于图 $G$ 两个不同的顶点 $u$ 和 $v$, $G$ 中分离 $u, v$ 的边的最小个数等于 $G$ 中边不相交 $u - v$ 路的最大个数.*

**定理 5.22** *一个非平凡图 $G$ 是 $k$ 边连通的当且仅当对于 $G$ 中任意两个不同的顶点 $u, v$, $G$ 包含 $k$ 条边不相交的 $u - v$ 路.*

## 习题

5.33 设 $G$ 为 5 连通图, $u, v, w$ 为 $G$ 中三个不同的顶点. 证明: $G$ 包含两个圈 $C$ 和 $C'$, 使得 $u$ 和 $v$ 是它们仅有的公共顶点, 但这两个圈均不包含 $w$.

5.34 证明推论 5.18: 设 $G$ 为 $k$ 连通图, $S$ 是由 $G$ 中任意 $k$ 个顶点构成的集合. 若图 $H$ 是由 $G$ 添加一个新的顶点 $w$ 以及连接 $w$ 到 $S$ 中所有的顶点所得, 则 $H$ 也是 $k$ 连通的.

5.35 证明推论 5.19: 若 $G$ 为 $k$ 连通图, $u, v_1, v_2, \cdots, v_k$ 为 $G$ 中 $k+1$ 个不同顶点, 则 $G$ 存在内部不相交的 $u - v_i$ 路 $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

5.36 设 $G$ 是阶为 $n$ $(n \geqslant 2k)$ 的 $k$ 连通图, $U$ 和 $W$ 为两个由 $G$ 中 $k$ 个顶点构成的集合. 证明: 存在 $k$ 条不相交的连接 $U$ 和 $W$ 的路.

5.37 确定 $n$ 方体 $Q_n$ 的连通度和边连通度.

## 5.5 专题探索: 测地集

由定理 5.17, 图 $G$ 是 $k$ 连通的当且仅当对于 $G$ 的任意两个不同顶点 $u, v$, $G$ 中至少存在 $k$ 条内部不相交的 $u - v$ 路. 因此, 图 $G$ 的连通度可以用 $G$ 中任意两个不同顶点 $u, v$ 间的内部不相交 $u - v$ 路的个数来度量. 对于这些 $u - v$ 路的长度并没有什么限制, 当然, 它们至少等于 $d(u, v)$.

回顾前文, 一条长为 $d(u, v)$ 的 $u - v$ 路称为是一条 $u - v$ 测地线. 本节不再强调不邻接顶点 $u$, $v$ 间的内部不相交 $u - v$ 路的最大个数, 而是把讨论重点从内部不相交的 $u - v$ 路转移到 $u - v$ 测地线, 其中 $u$, $v$ 为不同的顶点, 但不要求是不邻接的. 对于连通图 $G$ 的两个顶点 $u$ 和 $v$, $u$ 和 $v$ 的**闭区间 (closed interval)** $I[u, v]$ 是指所有 $u - v$ 测地线上的顶点构成的集合. 显然, 对于任意两个不同的顶点 $u$ 和 $v$, $u, v \in I[u, v]$; 若 $uv \in E(G)$, 则 $I[u, v] = \{u, v\}$. 对于连通图的顶点集的子集 $S$, $S$ 的**闭区间 (closed interval)** 是指集合

$$I[S] = \bigcup_{u,v \in S} I[u, v].$$

例如, 对于图 5.14 中的图 $G$, $d(u_1, w_3) = 3$, $I[u_1, w_3] = V(G) - \{w_1, v_2, u_3\}$, 即 $G$ 中除 $w_1$, $v_2$, $u_3$ 外的所有顶点都位于某条 $u_1 - w_3$ 测地线上. 另一方面,$d(w_1, u_3) = 4$, $I[w_1, u_3] = V(G) - \{v_2\}$. 可以发现, 不存在顶点 $x$ 和 $y$, 使得 $I[x, y] = V(G)$. 这就提出一个问题: 寻找 $V(G)$ 的子集, 使得 $I[S] = V(G)$.

设 $G$ 为连通图. $G$ 的顶点集的子集 $S$ 称为是 $G$ 的**测地集 (geodetic set)**, 若 $I[S] = V(G)$. $G$ 中具有最小基数的测地集称为是 $G$ 的**最小测地集 (minimum geodetic set)**, 并称该基数为 $G$ 的**测地数 (geodetic number)**, 记为 $g(G)$. 对于

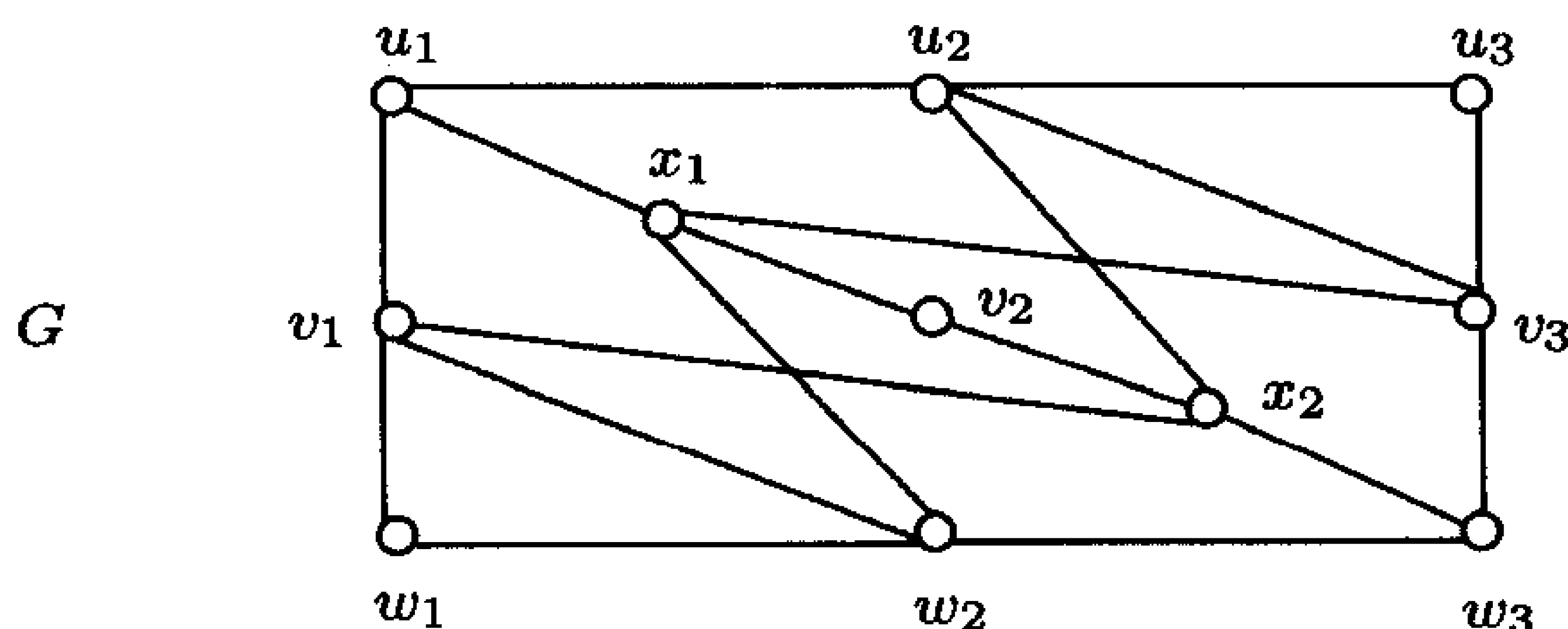



图 5.14　图的闭区间

图 5.14 中的图 $G$, 集合 $S=\{w_1,v_2,u_3\}$ 是测地集, 是因为 $I[S]=V(G)$. 由于 $G$ 不含由两个顶点构成的测地集, 故 $S$ 是最小测地集, $g(G)=|S|=3$.

图 $G$ 的一个点 $v$ 称为是**极点 (extreme vertex)** (或**完备点 (complete vertex)**, 或**单纯点 (simplicial vertex)**), 若 $G$ 中由顶点 $v$ 及 $v$ 的邻点所诱导的子图是完全图. 例如, 对于图 5.14 中图 $G$, 顶点 $w_1$ 和 $u_3$ 都是 $G$ 的极点. 特别的, 图的任一个端点都是极点.

**定理 5.23**　连通图 $G$ 的任一测地集都包含了 $G$ 的所有极点. 特别地, 若由极点构成的集合 $S$ 是 $G$ 的测地集, 则 $S$ 是 $G$ 的唯一最小测地集.

**证**　[反证法] 设 $x$ 是连通图 $G$ 的一个极点. 可设 $x$ 位于一条 $u-v$ 测地线 $P$ 上, 我们断言: $x=v$ 或 $x=u$. 假设断言不成立, 则 $x$ 是 $P$ 的一个内点. 因此 $x$ 邻接于 $P$ 上两个不邻接的顶点, 这显然与 $x$ 是极点相矛盾. 因此, $G$ 的任一测地集都包含了 $G$ 的所有极点. 从而, 若由极点构成的集合 $S$ 是 $G$ 的测地集, 则 $S$ 是 $G$ 的唯一最小测地集. ■

## 习题

5.38　确定 $K_n$ $(n\geqslant 2)$ 的测地数.

5.39　确定 $C_n$ $(n\geqslant 3)$ 的测地数.

5.40　确定 $K_{s,t}$ $(1\leqslant s\leqslant t)$ 的测地数.

5.41　确定 $Q_n$ $(n\geqslant 1)$ 的测地数.

5.42　(a) 设 $T$ 为有 $k$ 个端点的树, 证明: $g(T)=k$.
(b) 对于任一对正整数 $k,n$, $2\leqslant k\leqslant n$, 找出一个阶为 $n$ 的连通图 $G$, 满足 $g(G)=k$.

5.43　设 $S$ 为非平凡图 $G$ 的最小测地集, 证明: $G$ 的割点不属于 $S$.

5.44　前面提到, $S=\{w_1,v_2,u_3\}$ 为图 5.14 中图 $G$ 的最小测地集. 该图还有其他的最小测地集吗?

5.45　是否存在一个连通图 $G$, 它至少有两个最小测地集, 且有一个顶点 $v$, 满足: $v$ 不是 $G$ 的极点, 但 $v$ 属于 $G$ 的每个最小测地集?

5.46 是否存在一个连通图 $G$, 它有唯一的最小测地集 $S$, 且 $S$ 的顶点均不是 $G$ 的极点? 若存在, 列举一个满足上述条件且具有较大测地数的图.

5.47 (a) 给出一个连通图 $G$, 它包含两个不相交的测地集且 $g(G) = 3$.

(b) (a) 中的问题应该会让你联想起另一个问题. 提出这个问题并解决它.

5.48 对于连通图 $G$ 的顶点集的子集 $S$, 定义 $S$ 的**总距离 (total distance)** $td(S)$ 为

$$\mathrm{td}(S) = \sum_{u,v \in S} d(u,v).$$

(a) 是否存在连通图 $G$, 它包含两个不同的最小测地集 $S_1$ 和 $S_2$, 使得 $\mathrm{td}(S_1) \neq \mathrm{td}(S_2)$?

(b) 对于每个整数 $k$ $(k \geqslant 2)$, 列举一个满足下述条件的连通图 $G$: $g(G) = k$, $G$ 包含一个最小测地集 $S$, 使得对于 $S$ 的任意两个不同顶点 $u$ 和 $v$, $d(u,v) = k$.

(c) (b) 中的问题是否让你联想起另一个问题?

# 第6章 可遍历性

## 6.1 Euler 图

图 6.1(a) 所示的是一个社区规划图, 每个街道的旁边放置一个邮箱 (在图中用双线标出). 一位邮递员能否恰好经过每个邮箱一次就可对该社区进行一次环游? 图 6.1(b) 给出了这个问题的肯定回答.

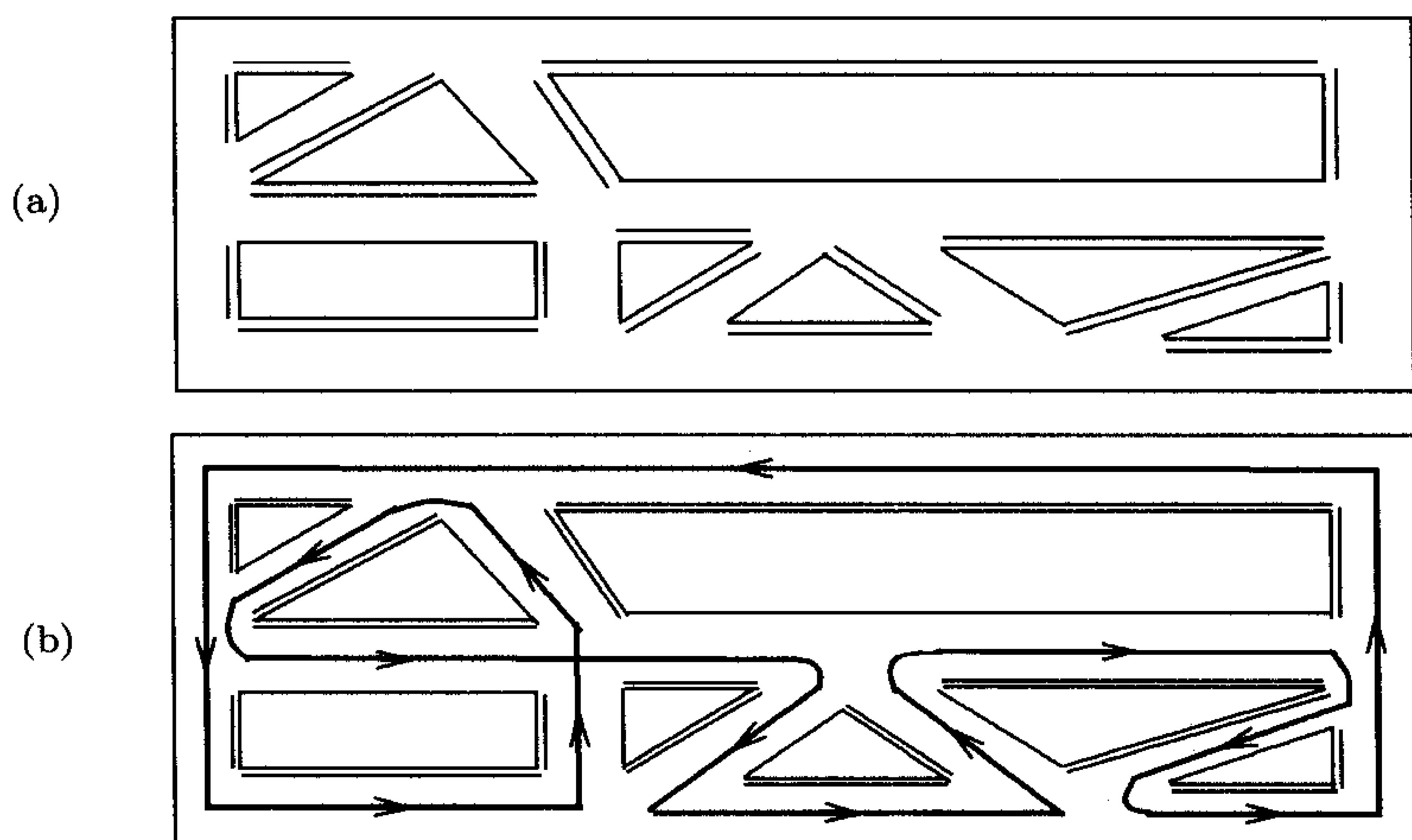



图 6.1 社区规划图和邮递员行程路线

我们自然地想到, 可用图 6.2 中的图 $G$ 去表示此社区的规划, 其中顶点表示街道的十字路口, 边表示街道. 用图论语言, 上述的邮递员问题可以重述为: 图 6.2 中的图 $G$ 是否有一条包含 $G$ 的每条边的回路? 图 6.1(b) 所示的邮递员的行程路线说明, 图 6.2 中图 $G$ 的回路

$$C: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_2, v_4, v_7, v_8, v_6, v_9, v_8, v_{11}, v_9, v_{10}, v_{11}, v_1$$

具备所需的性质.

上面的例子引入了本章的主要研究内容. 图 $G$ 的一条回路 $C$ 称为是**Euler 回路 (Eulerian circuit)**, 如果 $C$ 包含 $G$ 的每一条边. 因为在回路中不存在重边, 所以在一条 Euler 回路中, 每一条边恰好出现一次. 当然, 只有仅含一个非平凡分支的

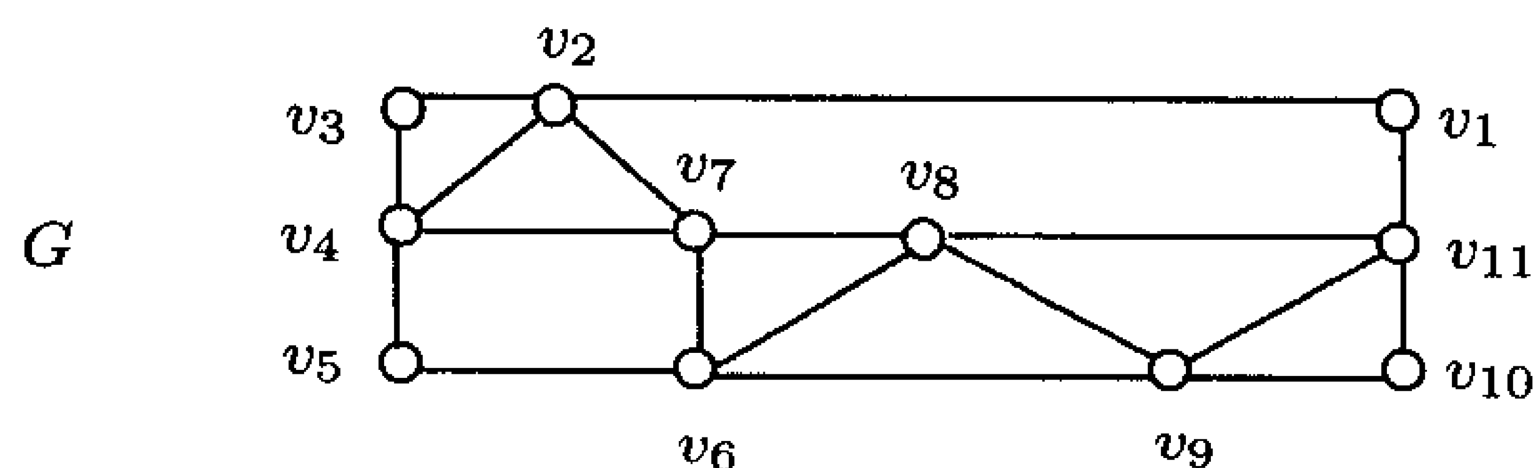



图 6.2 社区规划设计的图模型

图才可能具有这样的回路. 正是由于这个缘故, 我们总是针对连通图研究其是否含有 Euler 回路. 含有 Euler 回路的连通图称为是**Euler 图 (Eulerian graph)**. 特别地, 图 6.2 所示的图 $G$ 是一个 Euler 图.

因此, 连通图 $G$ 的一条 Euler 回路是一条含有 $G$ 的每条边的闭迹. 有时, 我们也对包含图的每条边的开迹感兴趣. 对于一个连通图 $G$, 含有 $G$ 的每条边的开迹称为是**Euler 迹 (Eulerian trail)**. 例如, 图 6.3 中的图 $G$ 含有 Euler 迹

$$T : u, s, t, u, v, w, y, u, w, x, z, w.$$

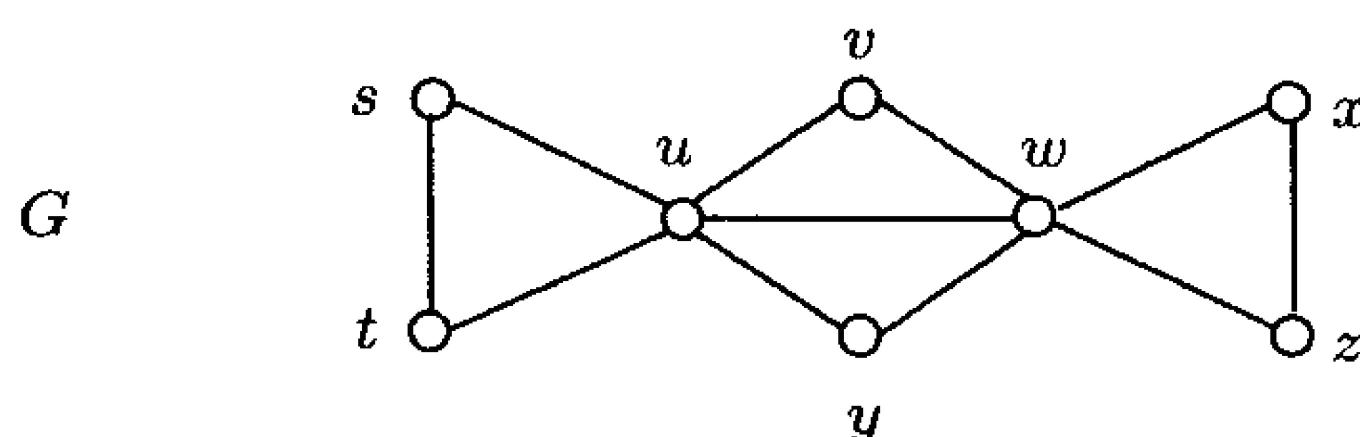



图 6.3 一个含有 Euler 迹的图

为解释此处使用形容词 "Euler 的" 的原因, 让我们回到若干年前, 准确地说是几百年前, 到 17 和 18 世纪的瑞士, 当时赫赫有名的 Bernoulli 家族中 13 位成员都是著名的数学家, 其中 Jaques 和 Jean 两兄弟最出名. 后者也常被人们称为 John 或 Johann. 尽管 Johann 和其他 Bernoulli 成员都有大量的成果, 但是 Johann 的最主要成就之一应该是: 使 Euler 的父亲深信让他年轻的儿子中断神学研究而去研究数学是很有价值的. 后来,Johann 成为 Euler 的数学导师. 当一个人给别人作学术上的指导时, 指导者 (通常是博导) 常被誉为学生的**学术之父**(或**学术之母**). 从某种意义上说, 这便组成了教师和学生的 "家庭". 因此,Johann 可以称为是 Euler 的学术之父.

1707 年 4 月 15 日 Euler 出生于瑞士的巴塞尔. 在 Euler 二十多岁的时候, 一场疾病使他一只眼睛失明. 后来, 另一只眼又发展成为白内障, 在人生的最后几年里他双目完全失明. 然而, 正如在双耳失聪的情形下完成大量杰作的伟大作曲家贝多芬一样,Euler 在双目失明的情形下完成了大量数学研究. Euler 于 1783 年 9 月

18 日因中风去世. 他生前出版了有 500 多篇 (本) 研究论文与专著, 去世后又有 400 多篇 (本) 研究论文与专著被出版. 在当时以及之后的很长一段时间内, Euler 的论文和专著数量超过任何一位数学家. 直到 20 世纪, 这个记录才被他的一位学术后裔 Paul Erdős 打破. 我们将在后面介绍 Paul Erdős.

在 Euler 所生活的那个年代, 他在数学的每个领域都有重要贡献, 正是他创立一个新的数学领域 —— 图论, 这正是我们现在最感兴趣的.

哥尼斯堡城 (位于德国北部) 在 Euler 的生活以及图论的历史中扮演着非常重要的角色. 普雷格尔河流经哥尼斯堡城, 把哥尼斯堡城分成四个城区. 人们在河上架设七座桥以方便市民在这些城区之间穿行. 图 6.4 给出了哥尼斯堡城的一个地图, 图中标出了四个城区 (分别标号为 A, B, C, D), 河以及当时七座桥的位置.

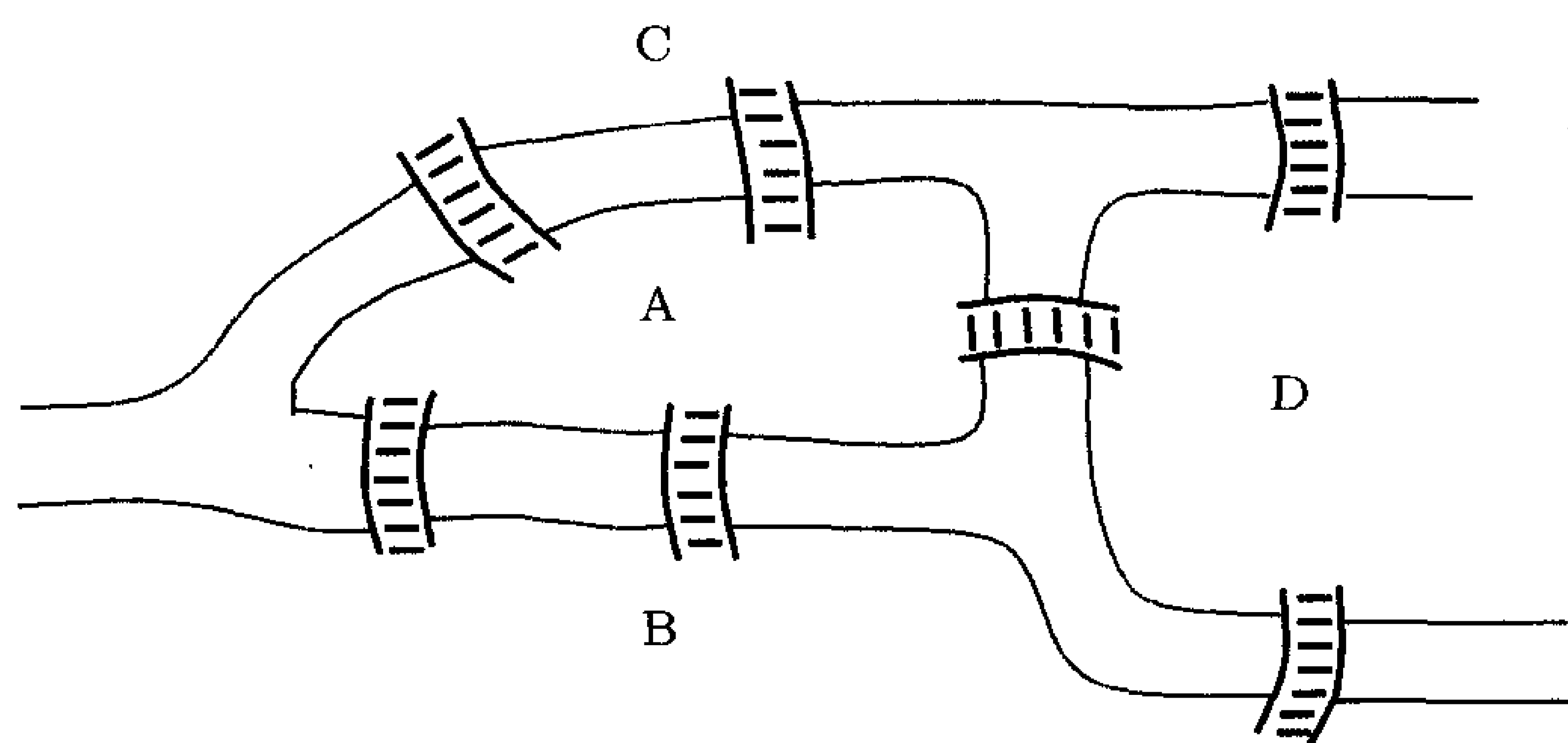



图 6.4　18 世纪初期的哥尼斯堡城

哥尼斯堡城中的居民沿河散步, 在欣赏景色之余, 有些居民提出一个问题：能否从一点出发, 走遍 7 座桥, 且通过每座桥恰好一次, 最后仍回到起始地点. 这就是有名的**哥尼斯堡七桥问题 ( Königsberg Bridge Problem)**. 这个问题在一段时间内没有得到解决, 并成了该地区家喻户晓的一个疑难问题. 后来, 这个问题吸引了 Euler 的注意力 (后人认为他当时在圣彼得堡). Euler 注意到哥尼斯堡七桥问题可以用图 6.5 所示的图 (事实上是多重图) 来表述, 其中顶点表示陆地, 边表示桥.(图论这门学科在这之前并不存在, 但它即将诞生.)

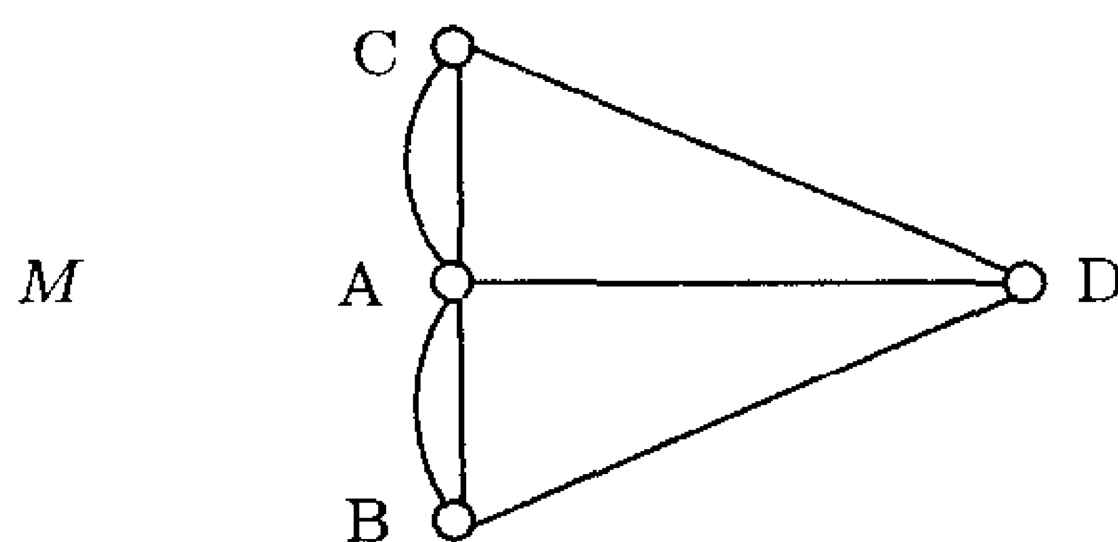



图 6.5　哥尼斯堡多重图

在考虑某个多重图 $M$ 的一条路 $W$ 时, 仅仅把路 $W$ 简单地表示成一个顶点序列是不够的. 例如, 假如 $u, v$ 是路 $W$ 中相继出现的顶点, 而在 $M$ 中顶点 $u$ 和 $v$ 之间有平行边, 因此我们必须具体指明是哪一条边在路 $W$ 上, 比如 $u, e, v$.

用图论语言, 哥尼斯堡七桥问题可以叙述为: 图 6.5 中的多重图 $M$ 是否含有回路或 Euler 迹? (当然,Euler 当时并没有使用这些术语.) 假如可以按照上面条件穿行哥尼斯堡七座桥, 那么该穿行必须起始于某一陆地而终止于某一陆地 (可能是同一块). 因此, 这样的旅行必须是一条长为 7 的迹 (每条边表示一座桥), 并且经过 8 个顶点 (包括重复的). 即

$$T : v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8.$$

其中, 每一个顶点 $v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ 代表一块陆地 (A, B, C 或 D). 当然, 每一块陆地都必须出现在 $T$ 中. 注意到, 在多重图 $M$ 中有四个度为奇数的顶点. 因为 $M$ 至少有两个这样的顶点, 它们在 $T$ 中既不能作为始点也不能作为终点, 所以它们只能在 $T$ 的中间出现, 即是过渡点, 从而该二顶点的度是偶数, 而这是不可能的. 这就导出: 恰好经过哥尼斯堡每座桥一次的路是不存在的.

哥尼斯堡城始建于 1255 年, 是德国东普鲁士首都. 普鲁士皇家城堡便位于哥尼斯堡城, 但如同其他的许多城市一样, 城堡在二战中被毁. 因为战争的缘故, 在 1945 年的波茨坦会议上决定把包括哥尼斯堡城在内的波兰和立陶宛之间一带土地划归为俄罗斯. 加里宁是 1919-1946 年期间苏联领导人之一. 1946 年, 哥尼斯堡城因为加里宁而改名为加里宁格勒. 苏联解体后, 立陶宛和其他前苏联共和国纷纷独立, 加里宁格勒已不再是俄罗斯的一部分. 然而, 没有人试图把哥尼斯堡城改回原名.

重新回到图 6.5 所示的多重图 $M$ 上, 我们想知道, 是什么原因导致 $M$ 不含 Euler 回路或 Euler 迹. 我们已经提到 $M$ 拥有四个度为奇数的顶点. 事实已经证明, 这是一个很关键的发现. 因为一个连通图 $G$ 是 Euler 图的充要条件是 $G$ 的每个顶点度都为偶数.

**定理 6.1** 一个非平凡连通图 $G$ 是Euler的当且仅当 $G$ 的每个顶点的度都为偶数.

**证** [直接证法, 反证法] 首先假设 $G$ 是 Euler 的, 则 $G$ 含有一条 Euler 回路 $C$. 假设 $C$ 从顶点 $u$ 出发 (因此终止于 $u$), 我们来证明 $G$ 的每个顶点度是偶数. 设 $v$ 是 $G$ 中不同于 $u$ 的顶点. 因为 $C$ 既不出发于顶点 $v$, 也不终止于顶点 $v$, 因此在 $C$ 中每次遇到 $v$, 都有两条边被计数 (一条是入边, 另一条是出边). 因此 $v$ 的度是偶数. 现在来看 $u$, 因为 $C$ 开始于 $u$, 这样有一条边被计数, 另外还有一条边被计数是因为 $C$ 终止于 $u$. 如果 $u$ 在其他时候被遇到, 则每相遇一次均有两条边被计数. 因此 $u$ 的度也是偶数.

反过来, 假设 $G$ 是一个每个顶点度均为偶数的非平凡连通图. 我们来证明 $G$

含有一条 Euler 回路. 在 $G$ 的所有迹中, 设 $T$ 是最长的一条. 假设 $T$ 是一条 $u-v$ 迹. 我们可断言 $u=v$. 假如情形相反,$T$ 终止于 $v \neq u$. 当然, 在 $T$ 中 $v$ 可能在前面已经出现, 并且每出现一次都要涉及 $G$ 的两条边, 一条边进入 $v$, 另一条边离开 $v$. 因为 $T$ 终止于 $v$, 这样就有奇数条边在 $v$ 处相遇. 但是, $v$ 的度是偶数. 这就是说,$v$ 至少还邻接一条边, 比方说 $vw$, 且该边在 $T$ 中没有出现. 此时,$T$ 可以延伸到 $w$, 这与 $T$ 是最长的迹矛盾. 因此,$T$ 是一条 $u-u$ 迹, 也就是说,$C=T$ 是一条 $u-u$ 回路. 如果 $C$ 包含 $G$ 的所有边, 则 $C$ 是一条 Euler 回路, 从而证明完毕.

假设 $C$ 并非包含 $G$ 的所有边, 也就是说,$G$ 的某些边并没有在 $C$ 中出现. 因为 $G$ 是连通的, 所以一定存在某条不在 $C$ 上的边 $e=xy$, 该边与 $C$ 上的顶点 $x$ 相关联. 设 $H=G-E(C)$, 也即,$H$ 是由 $G$ 通过删除 $C$ 的边所得到的 ($G$ 的) 生成子图. 因为 $C$ 的每个顶点均关联于 $C$ 的偶数条边, 以及 $G$ 的每个顶点的度均为偶数, 所以, $H$ 的每个顶点度也为偶数. 当然,$H$ 可能是不连通的. 另一方面,$H$ 至少有一个非平凡连通分支, 不妨设为 $H_1$, 它包含边 $xy$. 也即,$H_1$ 是连通的并且每个顶点都有偶数的度. 考虑 $H_1$ 中始于 $x$ 的一条最长迹. 前面已经证明, 这条迹也必须终止于 $x$, 是 $H_1$ 的一条 $x-x$ 回路 $C'$.

现在, 在回路 $C$ 到达 $x$ 时, 把 $C'$ 粘到 $C$ 上, 由此我们获得 $G$ 中一个比 $C$ 长的回路 $C''$, 导致矛盾. 因此, $C$ 包含 $G$ 的所有边, 从而 $C$ 是一条 Euler 回路. ■

尽管定理 6.1 确信是由 Euler 获得的, 但是我们的确看到 Euler 的证明是不完全的. Euler 没有证明：如果一个连通图 $G$ 的每个顶点度均为偶数, 则 $G$ 也是 Euler 的. 当然, 在那个年代, 科学家们在讨论一个证明时并不像我们今天这样叙述那么细致和准确, 或许是 Euler 认为结论 (没有写上的这部分结论) 是很显然的. 直到 1873 年, 证明的缺少部分才发表出来. 证明是由 Carl Hierholzer 完成的. 实际上 Hierholzer 那时已经去世了, 只是之前他把这个结论告诉给了他的一位同事. 这位同事出于善意, 为 Hierholzer 撰写了这篇文章, 并把 Hierholzer 作为该文的唯一作者.

在定理 6.1 的帮助下, 我们现在可以轻松地刻画含有 Euler 迹的图.

**推论 6.2** 一个连通图 $G$ 含有一条Euler迹当且仅当 $G$ 恰有两个度为奇数的顶点. 而且, $G$ 的每一条Euler迹始于一个度为奇数的顶点而终止于另一个度为奇数的顶点.

**证** [直接证法] 首先假设 $G$ 含有一条 Euler 迹 $T$. 因此, $T$ 是某两个互异顶点 $u$ 和 $v$ 之间的一条 $u-v$ 迹. 现在由 $G$ 通过添加一个新的度为 2 的顶点 $x$ 且分别连接 $x$ 到 $u$ 和 $v$, 从而构造成一个新的连通图 $H$. 则 $C: T, x, u$ 是 $H$ 的一条 Euler 回路. 根据定理 6.1,$H$ 中每个顶点的度均为偶数, 所以在 $G=H-x$ 中只有 $u$ 和 $v$ 的度为奇数.

我们用类似的方法讨论充分性. 设连通图 $G$ 恰好含有两个度为奇数的顶点 $u$

和 $v$. 我们来证明 $G$ 含有一条 Euler 迹 $T$, 其中 $T$ 或者是一条 $u-v$ 迹或者是一条 $v-u$ 迹. 添加一个新的度为 2 的顶点 $x$ 到 $G$ 上, 并分别连接 $x$ 到 $u$ 和 $v$, 记所得到的新图为 $H$. 因此,$H$ 是一个每个顶点度均为偶数的连通图. 根据定理 6.1, $H$ 是一个含有 Euler 回路 $C$ 的 Euler 图. 因为这与 $C$ 中起点 (和终点) 的选择无关, 所以我们假定 $C$ 是一条 $x-x$ 回路. 因为 $x$ 仅与两条边 $ux$ 和 $vx$ 关联, 其中一条是 $C$ 的第一条边, 另一条是 $C$ 的最后一条边. 则从 $C$ 中删除顶点 $x$, 得到一条从 $u$(或 $v$) 出发而终止于另一个顶点 $v$(或 $u$) 的 Euler 迹 $T$. ■

作为定理 6.1 和推论 6.2 的一个应用, 我们可以相当容易地判断一个图是否含有 Euler 回路或 Euler 迹. 更进一步地可证得, 在定理 6.1 和推论 6.2 中用 "多重图" 代替 "图", 结论仍成立.

显然,$C_n$ $(n \geqslant 3)$ 是 Euler 的; $P_n$ $(n \geqslant 2)$ 含有一条 Euler 迹. 一个完全图是 Euler 的当且仅当 $n \geqslant 3$ 且 $n$ 是奇数; $K_{s,t}$ 是 Euler 的当且仅当 $s$ 和 $t$ 都是偶数; 图 $K_{2,t}$ 含有一条 Euler 迹当且仅当 $t$ 是奇数; $n$- 方体 $Q_n$ 是 Euler 的当且仅当 $n \geqslant 2$ 且 $n$ 是偶数. 我们注意到 $n$ 方体 $Q_n$ $(n \geqslant 2)$ 可以由 $(n-1)$ 方体 $Q_{n-1}$ 与 $K_2$ 作笛卡儿积而得. 这就引出了下面的一个问题.

**例 6.3** 寻找一个充分必要条件, 使得两个非平凡连通图 $G$ 和 $H$ 的笛卡儿积 $G \times H$ 是Euler的.

**解** 我们可认为 $G \times H$ 是通过用 $H$ 的一个拷贝 $H_v$ 代替 $G$ 的每个顶点 $v$ 所得到的图. 设 $x$ 是 $G \times H$ 的一个顶点. 则对于 $G$ 的某个顶点 $v$, 有 $x$ 属于 $H_v$. 所以 $x$ 不仅邻接于它在 $H_v$ 中的邻点, 而且对于 $v$ 在 $G$ 中的每个邻点 $u$, $x$ 也与 $H_u$ 中的一个顶点邻接. 则

$$\deg_{G \times H} x = \deg_{H_v} x + \deg_G v.$$

因此,$\deg_{G \times H} x$ 是偶数当且仅当 $\deg_{H_v} x$ 和 $\deg_G v$ 都是偶数或者都是奇数 (也就是说, 它们有相同的奇偶性).

如果 $\deg_{H_v} x$ 是偶数, 则对于 $G$ 的每个顶点 $v$, $\deg_G v$ 均为偶数. 同样地, 如果 $\deg_{H_v} x$ 是奇数, 则对于 $G$ 的每个顶点 $v$, $\deg_G v$ 均为奇数. 因此, 我们得到下面的结论:

> 设 $G$ 和 $H$ 是两个非平凡的连通图. 则 $G \times H$ 是 Euler 的当且仅当 $G$ 和 $H$ 都是 Euler 的或者 $G$ 和 $H$ 的每个顶点度均为奇数. ◇

## 习题

6.1 图 6.6 所示的是某大房子二楼的九间小屋子布局, 其中屋门是两间屋子共有的. 问能否从某间屋子开始作一次散步, 使得经过每个屋门恰好一次? 这个问题与图论有何联系? 并给予解释.

R1 R2 R3
R4 R5 R6
R7 R8 R9

图 6.6 习题 6.1 的图

6.2 设 $G_1$ 和 $G_2$ 是两个没有公共顶点的 Euler 图, 并且 $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$. 设 $G$ 是由图 $G_1 \cup G_2$ 通过添加边 $v_1v_2$ 而得到的图. 那么 $G$ 有什么性质?

6.3 设 $G_1$, $G_2$ 和 $G_3$ 是两两不相交的连通正则图, $G = G_1 + (G_2 + G_3)$ 是由 $G_1$, $G_2$ 和 $G_3$ 通过在 $G_1$, $G_2$ 和 $G_3$ 两两之间的每两顶点添加边而得到的图. 证明: 如果 $G_1$ 和 $\overline{G}_1$ 是 Euler 的, 而 $G_2$ 和 $G_3$ 不是 Euler 的, 则 $G$ 是 Euler 的.

6.4 列举一个图 $G$, 使得

(a) $G$ 和 $\overline{G}$ 都是 Euler 的.

(b) $G$ 是 Euler 的, 但 $\overline{G}$ 不是 Euler 的.

(c) $G$ 和 $\overline{G}$ 都不是 Euler 的, 但 $G$ 和 $\overline{G}$ 都含有 Euler 迹.

(d) $G$ 和 $\overline{G}$ 都不是 Euler 的, 但 $G$ 含有 Euler 迹, 而 $\overline{G}$ 不含 Euler 迹.

(e) $G$ 含有 Euler 迹, 且含有一条边 $e$ 使得 $G - e$ 是 Euler 的.

6.5 仅有一个阶为 5 的图具有性质: 添加任意一条边便成为 Euler 图; 这个图是什么?

6.6 设 $G$ 是一个非 Euler 的连通正则图. 证明: 如果 $\overline{G}$ 是连通的, 则 $\overline{G}$ 是 Euler 的.

6.7 设 $G$ 是一个阶为奇数 $n$ 的 $r$ 正则图, 并且 $F \cong \overline{G}$, 其中 $F$ 和 $G$ 的顶点集不相交. 在 $G \cup F$ 中添加两个新的顶点 $u$ 和 $v$, 连接 $u$ 和 $v$, 且连接 $u$, $v$ 到 $G$ 和 $F$ 的每个顶点, 由此得到的图记为 $H$. 下面的结论是否正确? 并给予解释.

(a) $H$ 是 Euler 的.

(b) $H$ 有一条 Euler 迹.

(c) $H$ 既没有 Euler 回路也没有 Euler 迹.

6.8 (a) 证明: 每一个非平凡连通图 $G$ 均含有一个闭生成路, 使得 $G$ 的每条边在这条路上恰好出现两次.

(b) 哪些非平凡连通图 $G$ 有一个闭生成路, 使得 $G$ 的每条边在这条路上恰好出现三次?

## 6.2 Hamilton 图

图 6.7 给出了一个现代艺术博物馆的示意图, 该博物馆被分成 15 个展室. 在每天下班之前, 一个安保人员从前门进入接待室, 然后检查每一间展室看一切是否状

况良好. 如果工作人员能够浏览每个房间仅一次, 然后返回到接待室, 这将会是最有效率的走法. 这种走法可以实现吗?

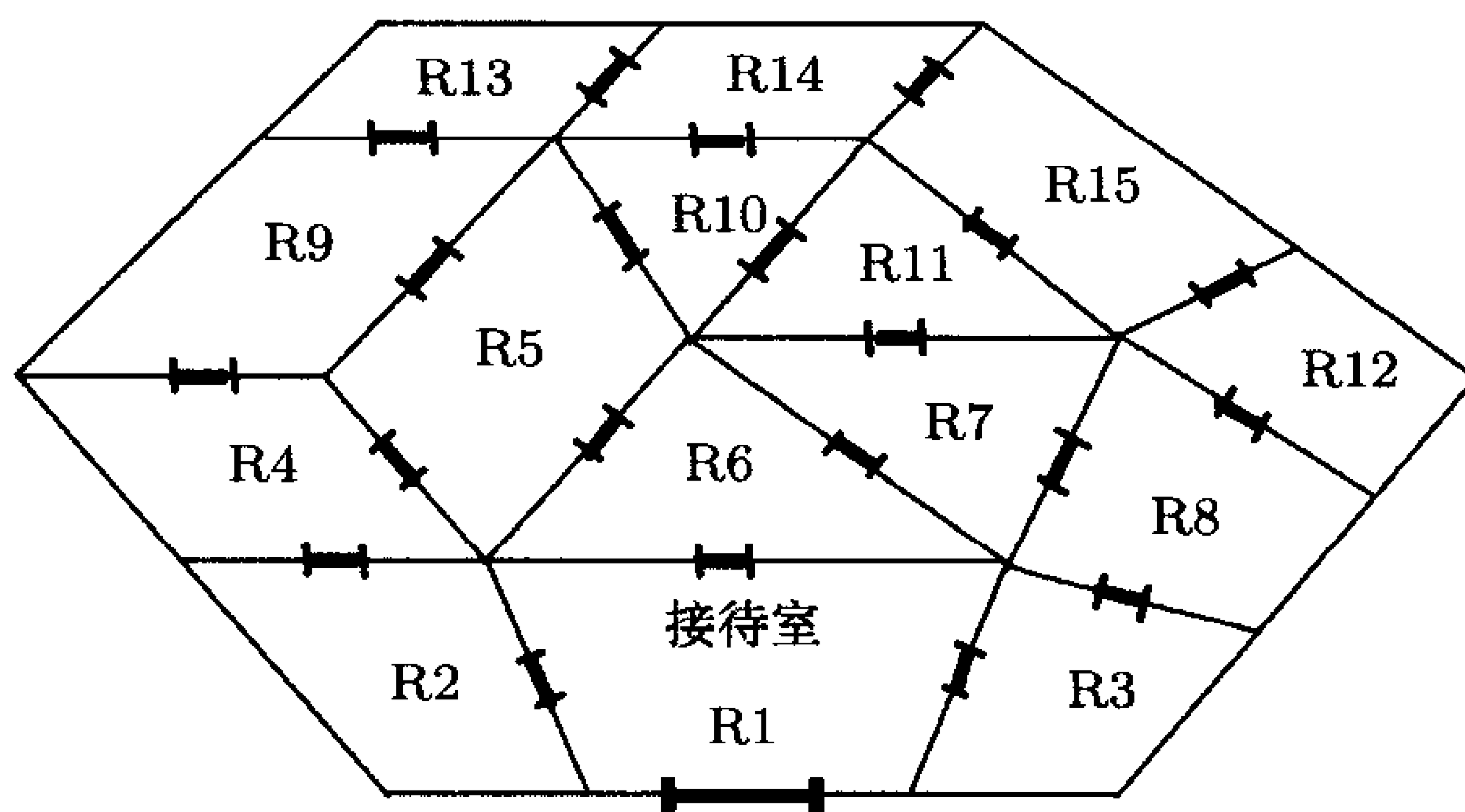



图 6.7　博物馆展室的示意图

上述问题可以用图的术语重新描述. 我们可以把该博物馆与一个图 $G$ 关联, 其中 $G$ 的顶点代表展室, 如果这两个展室之间有一个门, 则在它们所对应的两顶点之间连一条边. 这样的图 $G$ 在图 6.8 中给出. 因此上述问题便转化为: 图 6.8 中的图 $G$ 是否有一个含 $G$ 每个顶点的圈? 这个问题的答案是肯定的. 事实上,

$C$ : R1, R2, R4, R9, R13, R14, R10, R5, R6, R7, R11, R15, R12, R8, R3, R1

便是这样的一个圈. 这就引入了本节的主题.

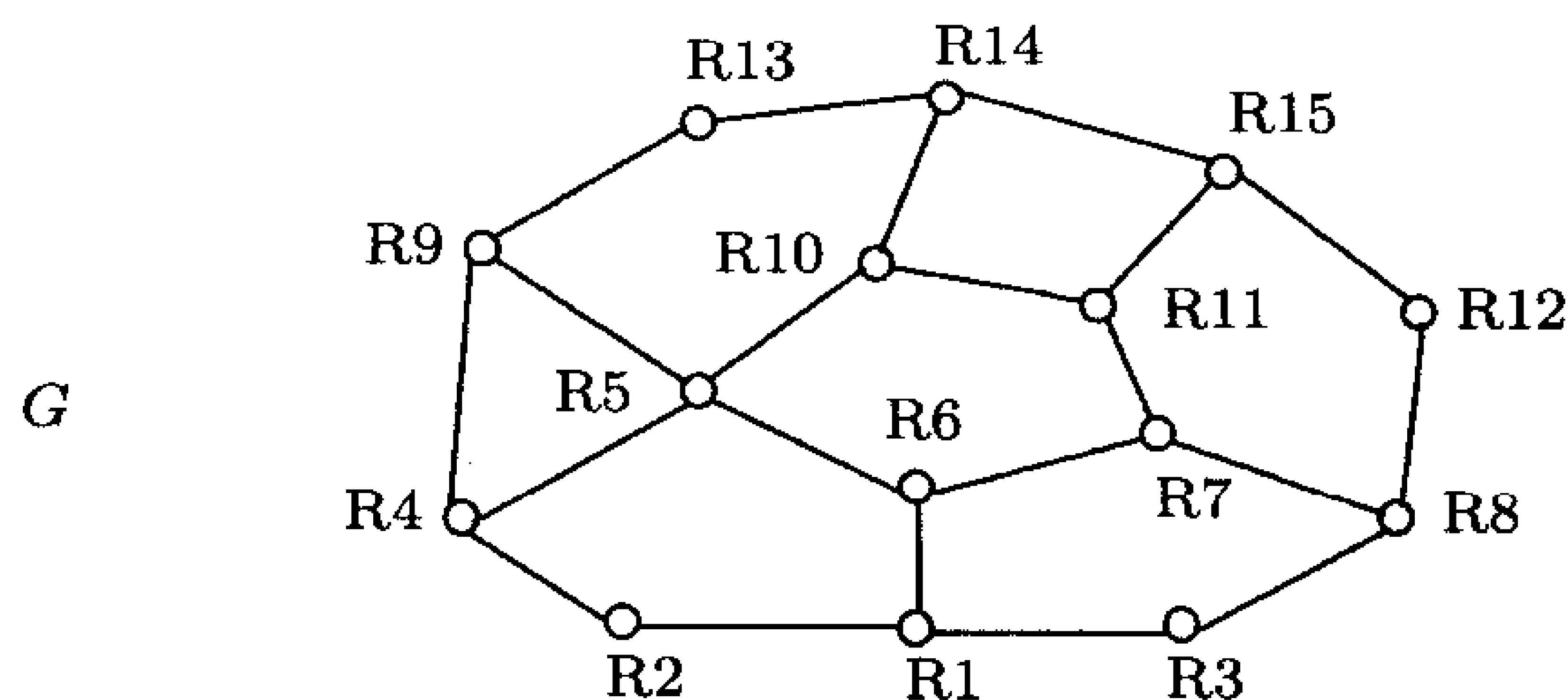



图 6.8　图 6.7 所示博物馆的展室和门的图模型

一个含图 $G$ 的每个顶点的圈称为是 $G$ 的一个**Hamilton 圈 (Hamiltonian cycle)**. 因此, $G$ 的一个 Hamilton 圈是 $G$ 的一个生成圈. 一个含有 Hamilton 圈的图称为是一个**Hamilton 图 (Hamiltonian graph)**. 故图 6.8 中的图 $G$ 是 Hamilton 的. 当然,$C_n$ $(n \geqslant 3)$ 是 Hamilton 的. 此外, 当 $n \geqslant 3$ 时, 完全图 $K_n$ 也是 Hamilton 的.

一条含图 $G$ 的每个顶点的路称为是 $G$ 的一条**Hamilton 路 (Hamiltonian path)**. 如果一个图含 Hamilton 圈, 则它必然含有 Hamilton 路. 事实上, 删除一个

Hamilton 圈中的任意一条边就可产生一条 Hamilton 路. 但是, 一个含有 Hamilton 路的图并不一定含有 Hamilton 圈. 例如, $P_n$ 显然含有一条 Hamilton 路, 但 $P_n$ 根本就不含圈.

图 6.9 中的图 $G \cong K_{3,3}$ 是一个 Hamilton 图. 例如, $C: u, x, v, y, w, z, u$ 是 $G$ 的一个 Hamilton 圈. 因为 $G$ 是 3 正则的, 并且对 $G$ 的每个顶点, 每个 Hamilton 圈都含有与其关联的两条边, 故, 对 $G$ 的每个顶点, 图 6.9 中的图 $G$ 的每个 Hamilton 圈不可能恰好含有与其关联的三条边中的一条边. 重新画出图 6.9 中的图 $G$, 我们可以更清楚地看出 $G$ 是一个 Hamilton 图. 事实上, 一个阶为 $n$ 的 Hamilton 图是由一个长为 $n$ 的圈 $C$, 以及连接 $C$ 的一些不连续顶点的边构成. 因为 $n \geqslant 3$ 阶图的一个 Hamilton 圈 $C$ 是 $n$ 阶的连通 2 正则子图, 所以 $C$ 的每个真子图是一条路或一些 (不相交) 路的并. 特别地, $C$ 不含有阶小于 $n$ 的圈作为子图; 当然 $C$ 也不含有这样的子图, 该子图有度为 3 或更多的顶点. 进一步地, 因为 $G$ 的每一个 Hamilton 圈 $C$ 是一个 2 正则子图, 因此, 如果 $G$ 含有度为 2 的顶点 $v$, 则与 $v$ 关联的 ($G$ 的) 两条边一定位于 $C$ 上.

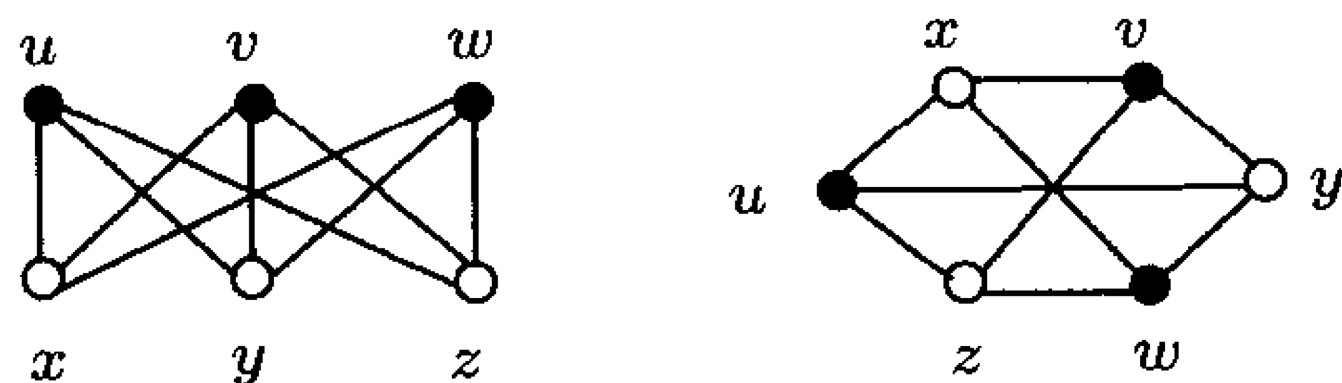



图 6.9 Hamilton 图 $K_{3,3}$

图 6.10 中的图 $G$ 不是 Hamilton 图. 为了看清这一点, 我们假设 $G$ 是 Hamilton 的, 则 $G$ 包含一个 Hamilton 圈 $C$. 因为 $C$ 含有度为 2 的顶点 $t$, 故 $tu$ 和 $tz$ 都位于 $C$ 上. 根据相同的推理, $xy$ 和 $xz$, 以及 $vw$ 和 $vz$ 也都位于 $C$ 上. 即 $z$ 与 $C$ 上的三条边相关联, 这是不可能的. 因此, 图 6.10 中的图 $G$ 不是 Hamilton 的.

Petersen 图是最为有名的非 Hamilton 图之一, 如图 6.11 所示. Petersen 图是一个 10 阶的 3 正则图. 这个图可以视为由两个 5 圈, 即外圈 $C': u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_1$, 与内圈 $C'': v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1$, 再加上五条边 $u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5$ 构成. (通过交换 $C'$ 和 $C''$ 的顶点标号, 我们可以看出, 把哪个 5 圈看作外圈或内圈无关紧要.) 事实上, 在 Petersen 图中, 最小圈的长度为 5. 有很多种方法可以证明 Petersen 图不是 Hamilton 的. 我们介绍其中一种.

**定理 6.4** Petersen图不是Hamilton的.

**证** [反证法] 假设Petersen图, 记为 PG, 是Hamilton的. 则 PG 含有一个 Hamilton 圈 $C$, 且该圈含十条边. 在与 PG 的每个顶点关联的三条边中, 必须有两条边属于 $C$. 显然, 对于边 $u_iv_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, $C$ 或者包含这所有的五条边, 或者仅包含其中

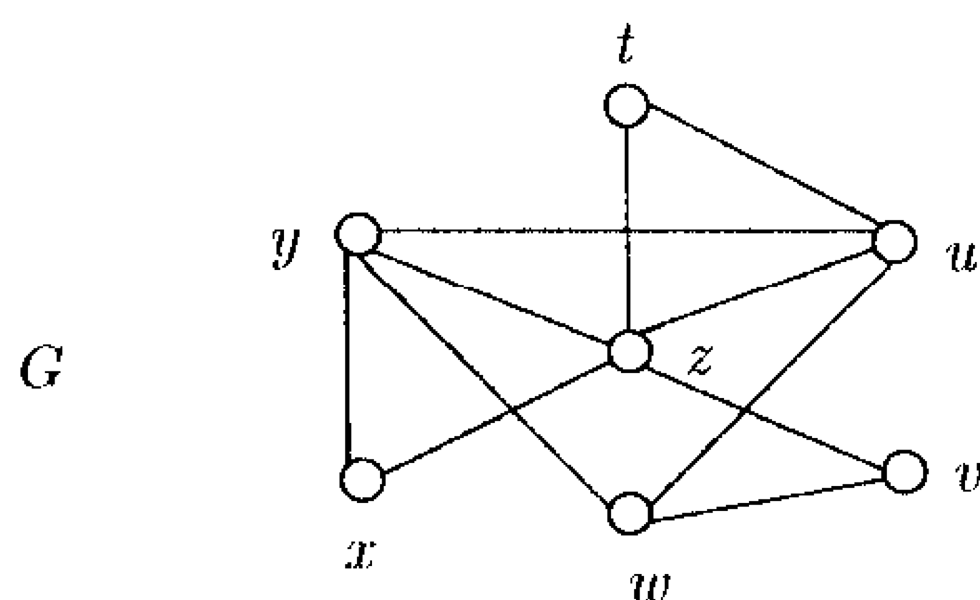



图 6.10 一个非 Hamilton 图

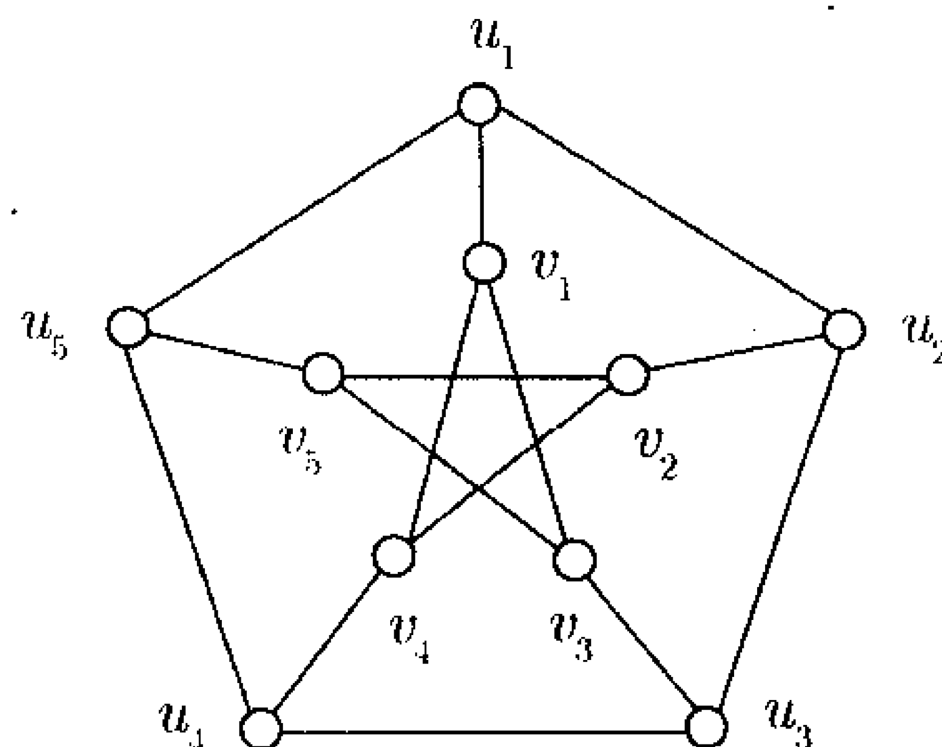



图 6.11 Petersen 图: 一个非 Hamilton 图

一些边, 或者不包含这些边的任意一条, 所以 $C$ 至少有五条边属于 $C'$ 或 $C''$. 因此, 或者 $C'$ 至少包含 $C$ 的三条边, 或者 $C''$ 至少包含 $C$ 的三条边. 为不失一般性, 假设 $C'$ 至少包含 $C$ 的三条边. 首先, 注意到 $C'$ 的五条边不可能全部属于 $C$, 因为任一个圈中不可能含一个更小的圈作为它的子图. 假设 $C$ 恰好包含 $C'$ 的四条边, 设为 $u_4u_5, u_5u_1, u_1u_2, u_2u_3$ (如图 6.12(a) 所示, 其中 PG 中虚线所示的边不属于 $C$). 此时, 圈 $C$ 必须包含边 $u_4v_4, u_3v_3$ 与 $v_1v_3, v_1v_4$ (如图 6.12(b) 所示). 由此推出, $C$ 包含一个 8 圈, 这是不可能的.

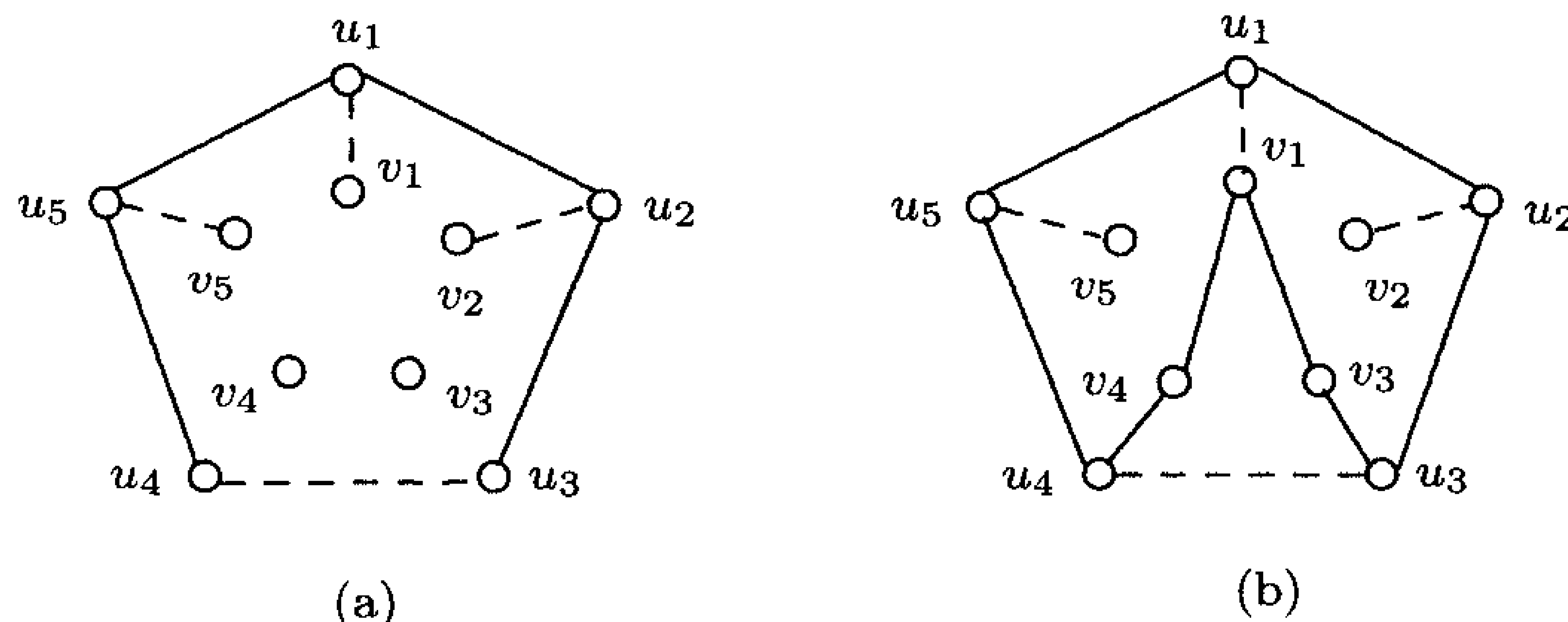



图 6.12 圈 $C$ 恰好包含 $C'$ 的四条边

现在还剩一种情形, 即 $C$ 恰好包含 $C'$ 的三条边. 这又有两种可能性: (1) $C'$ 的位于 $C$ 上的三条边是连续地出现在 $C'$ 上, (2) 这三条边是不连续地出现在 $C'$ 上. 这两种可能性分别在图 6.13(a) 和图 6.13(b) 给出. 图 6.13(a) 所示的情形是不可能出现的, 因为 $u_1v_1$ 是 $C$ 上唯一与 $u_1$ 关联的边. 同样地, 图 6.13(b) 所示的情形也是不可能出现的, 因为 $C$ 将含有更小的圈 $u_4, v_4, v_1, v_3, u_3, u_4$. 因此, 正如所断言的, Petersen 图不是 Hamilton 的. ■

形容词 "Hamilton 的" 取自爱尔兰数学家 Hamilton (William Rowan Hamilton, 1805–1865). 尽管 Hamilton 的个人生活充满不幸, 但是他的职业生涯却富有造诣. 他的兴趣包括诗歌、光学、天文学和数学 (尤其是代数学). 的确, 正如诗一样,Hamilton

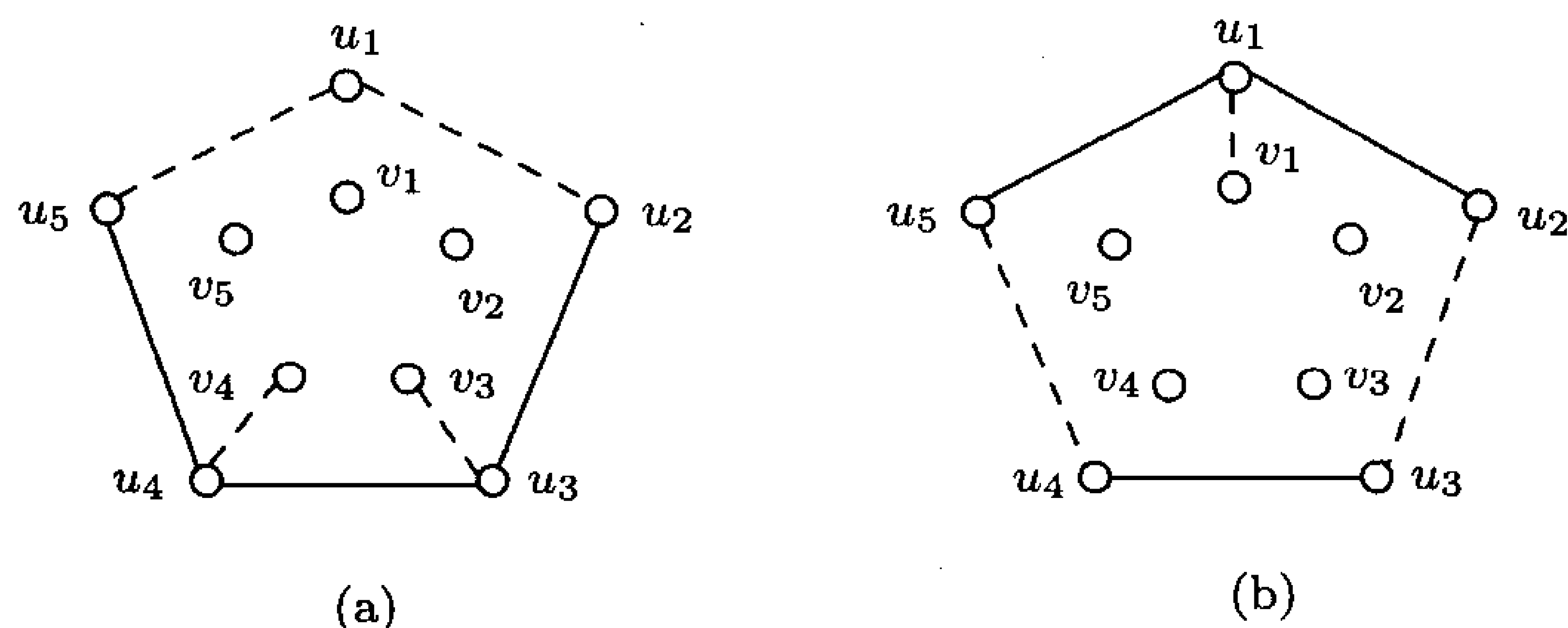



图 6.13　$C$ 恰好包含 $C'$ 的三条边

认为数学是很美的. Hamilton 和著名诗人沃兹沃斯 (William Wordsworth) 相识, 两人曾经在一起讨论过科学与诗. 沃兹沃斯曾对 Hamilton 说: "你的天才是在科学方面, 而不是在诗方面." 有一件事让 Hamilton 很犯难, 就是他的文采不好. 1835 年, Hamilton 被授予爵位, 成为 Hamilton 爵士. Hamilton 发现了四元数 (第一个非交换代数), 在他余生的大部分时间里, Hamilton 主要从事这方面的研究工作.

Hamilton 与图论联系的紧密程度不如 Euler. 他的工作涉及到一个有名的几何图形. 一个正十二面体是一个有十二个面 (全部是正五边形) 和二十个棱角 (每个棱角都是由五边形的三条边相交而成) 的多面体, 如图 6.14 所示.

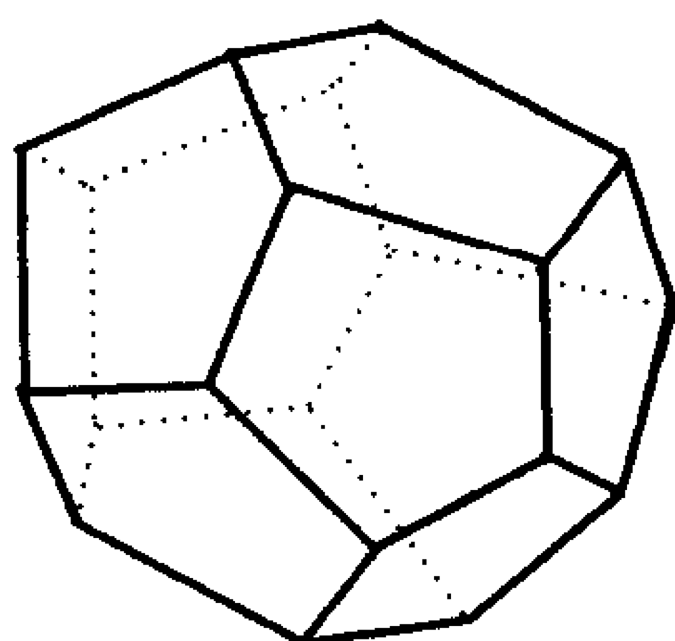


图 6.14　正十二面体

正十二面体被人们所熟识, 是因为它可以用作台历, 因为每个月可以用正十二面体的一个面来显示. 1857 年, Hamilton 发明了一个游戏, 叫**Icosian Game**. 它是由一个木制的正十二面体构成, 正十二面体的每个棱角上标有一个当时非常有名的城市. 游戏目的是 "环绕地球" 旅行, 也就是说, 寻找一个环游路线使得经过每个城市恰好一次. 为了容易记住哪些城市已被游览过, 在每个棱角上放一个钉子, 再用一根线绕在那些旅游过的城市 (钉子) 上, 由此就获得旅程的一个直观表示. 后来人们发现这个道具不好用, 因而诞生了它的木板状的版本 (见图 6.15).

Hamilton 以 25 英镑把这个游戏卖给了 J. Jacques and Sons 公司 (甚至到今天, 该公司仍以国际象棋设备的制造而闻名), 并且于 1859 年获得了该游戏在伦敦发行

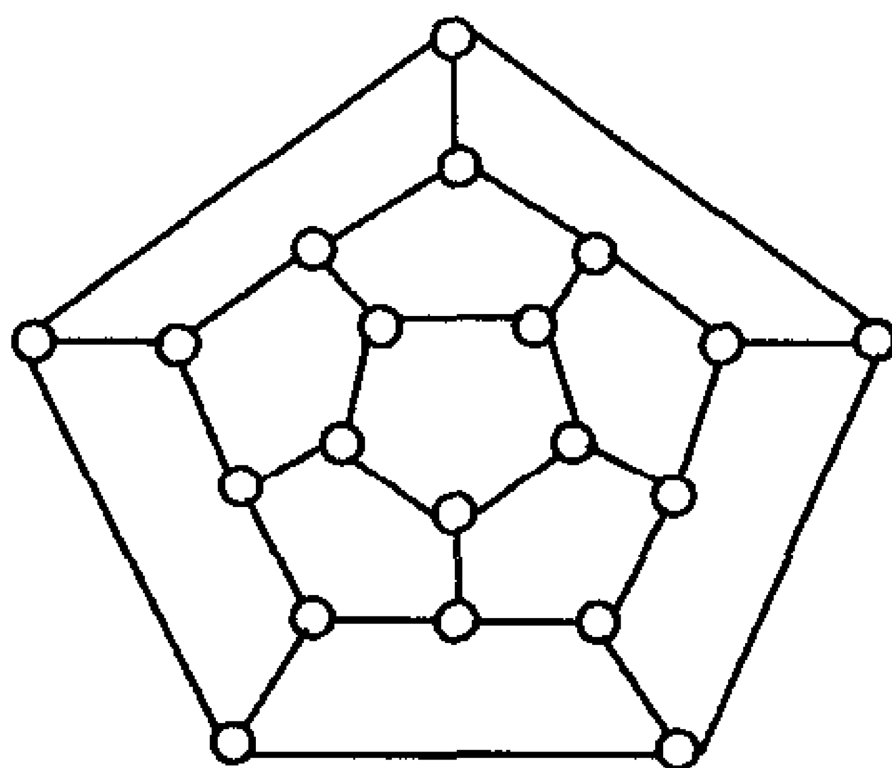


图 6.15 十二面体的图

的专利权. 可是, 这个游戏的商业运作是失败的. 用图论的术语来说, 这个游戏的目的是在图 6.15 所示的 (十二面体) 图中寻找一个 Hamilton 圈. 当然, 这个名词在当时是不存在的; 但是, 正是 Hamilton 的游戏才导致了用他的名字来命名的这些术语. 奇怪的是, 大约在此两年前, Thomas Penyngton Kirkman 在他的一篇论文中曾经提出这样一个问题: 对于一个给定多面体, 是否存在经过其每个顶点的圈? 所以, Hamilton 并不是最早研究 Hamilton 图的人.

下面我们来讨论 Hamilton 图的若干性质. 如果 $G$ 是一个 Hamilton 图, 则 $G$ 显然是连通的. 因为 $G$ 含有一个 Hamilton 圈, 故 $G$ 不可能有割点, 并且 $G$ 的阶至少为 3, 所以 $G$ 是 2 连通的. 这就是说, 对于 $G$ 的每个顶点 $v$, 图 $G-v$ 是连通的. 如果我们删除 $G$ 的多个顶点, 则由此所得的图所含的连通分支数不可能太大. 记 $k(G)$ 为图 $G$ 的连通分支数.

**定理 6.5** 如果 $G$ 是一个Hamilton图, 则对 $G$ 顶点的任一个非空真子集 $S$, 都有

$$k(G-S) \leqslant |S|.$$

**证** [直接证法] 设 $S$ 是 $V(G)$ 的一个非空真子集. 令 $k(G-S)=k, G_1, G_2, \cdots, G_k$ 是 $G-S$ 的连通分支. 因为 $G$ 是 Hamilton 的, 所以 $G$ 包含一个 Hamilton 圈 $C$. 当 $C$ 最后一次相遇于 $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的顶点时, 则 $C$ 的下一个顶点必属于 $S$. 这就推出 $S$ 至少包含 $k$ 个顶点, 即 $k=k(G-S) \leqslant |S|$. ■

定理 6.5 给出了一个图是 Hamilton 的必要条件, 也就是说, 这个定理描述了每个 Hamilton 图都必须具有的性质. 这个必要条件的主要优点在于它的一个逆否条件:

设 $G$ 为一个图. 如果对 $V(G)$ 的某个非空真子集 $S$, 有 $k(G-S)>|S|$, 则 $G$ 不是 Hamilton 的.

也就是说, 定理 6.5 给出了一个图为非 Hamilton 的充分条件. 特别地, 当一个连通图 $G$ 含有一个割点 $v$ 时 (其中 $S=\{v\}$), 且 $k(G-v) \geqslant 2$, 则这个定理给出了一个

显然的事实：

*如果图 $G$ 含有一个割点，则 $G$ 不是Hamilton的.*

考虑图 6.16 中的图 $G$, 其中 $S=\{u,v,w\}$. 则 $G-S$ 含有四个连通分支. 然而,$k(G-S)=4>3=|S|$, 因此根据定理 6.5, $G$ 不是 Hamilton 的. 但是, 这样一个关于图为非 Hamilton 的充分条件并不是必要的, 也就是说, 存在一个非 Hamilton 的图 $G$, 使得对于 $V(G)$ 的每个非空真子集 $S$, 均有 $k(G-S)\leqslant|S|$ (见习题 6.9).

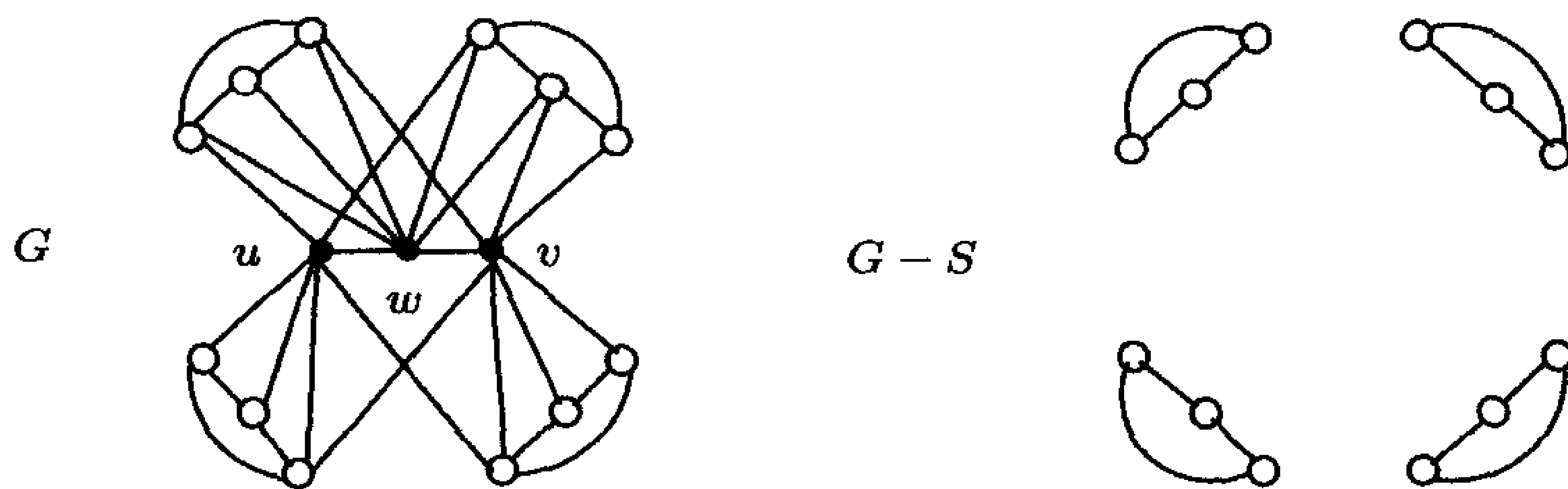



图 6.16 定理 6.5 的例子

尽管 Euler 回路和 Hamilton 圈定义看起来很相似, 但事实上这两个概念有很大的差别. 确定一个图是否含有一条 Euler 回路并不困难, 然而, 确定一个图是否含有 Hamilton 圈却是非常困难的. 事实上, 我们已经有 Euler 图的一个非常简单的刻画 (定理 6.1), 然而, 我们并没有 Hamilton 图的一个如此有用的刻画. 这就说明对一个问题做一个看上去很小的变动, 即从寻找一条 Euler 回路到寻找一个 Hamilton 圈, 却使得一个容易解决的问题变为一个没有实用可行方法的问题.

按照通常的做法, 当无法刻画图具有某种性质时, 我们就去寻找图具有这种性质的若干充分条件. 关于图为 Hamilton 图的一个不难应用的充分条件是由 Oystein Ore 发现的.

**定理 6.6** *设 $G$ 为一个 $n$ $(\geqslant 3)$ 阶的图. 如果对于 $G$ 的每对不邻接的顶点 $u,v$, 有*

$$\deg u+\deg v\geqslant n,$$

*则 $G$ 是Hamilton的.*

**证** [反证法] 假如相反, 存在一个阶为 $n$ $(\geqslant 3)$ 的非 Hamilton 的图 $G$, 使得对于 $G$ 的每对不邻接的顶点 $u,v$, 均有 $\deg u+\deg v\geqslant n$. 可能会出现这样的情形, 即如果我们对 $G$ 添加一些特定的边, 而所得到的图仍然不是 Hamilton 的. 当然, 如果我们对 $G$ 添加所有可能的边, 将得到的 $K_n$ 显然是 Hamilton 的. 设 $H$ 是由 $G$ 添加最多可能的边所得到的非 Hamilton 图. 则对 $H$ 添加任何一条边所得到的图都是 Hamilton 的. 此外, 对于 $H$ 的每对不邻接的顶点 $u,v$, 均有 $\deg_H u+\deg_H v\geqslant n$.

因为 $H$ 不是完全图, 所以 $H$ 含有不邻接的顶点对. 设 $x$ 和 $y$ 是 $H$ 的不邻接的顶点对. 故 $H+xy$ 是 Hamilton 的. 进一步地, $H+xy$ 的每个 Hamilton 圈必包含边 $xy$. 这就意味着, $H$ 包含一条 Hamilton 的 $x-y$ 路 $P: x=x_1,x_2,\cdots,x_n=y$. 我们得到: 如果 $x_1x_i$ 是 $H$ 的一条边, 其中 $2\leqslant i\leqslant n$, 则 $x_{i-1}x_n$ 不是 $H$ 的一条边 (见图 6.17); 否则,

$$x_1,x_i,x_{i+1},\cdots,x_n,x_{i-1},x_{i-2},\cdots,x_1$$

是 $H$ 的一个 Hamilton 圈, 这是不可能的. 因此, 对于 $\{x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ 中的每个与 $x_1$ 邻接的顶点, 在 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$ 中都有一个顶点与 $x_n$ 不邻接. 即 $\deg x_n\leqslant(n-1)-\deg x_1$, 故

$$\deg_H x+\deg_H y\leqslant n-1.$$

这也是一个矛盾. ■

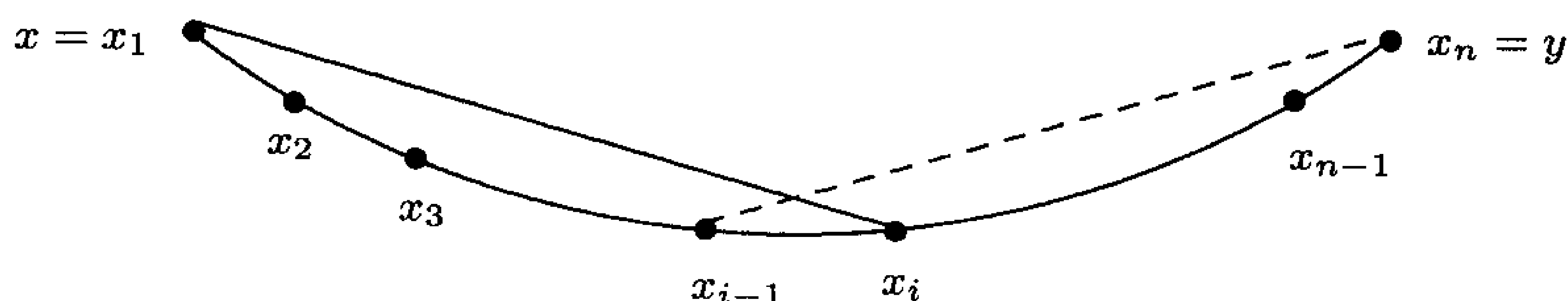



图 6.17 定理 6.6 证明的第二步

定理 6.6 给出的界是紧的. 例如, 设 $n=2k+1\geqslant 3$ 是一个奇数. 设 $G$ 是由 $K_{k+1}$ 的拷贝中的一个顶点与 $K_{k+1}$ 的另一个拷贝的一个顶点重合而得. 故 $G\cong K_1+(2K_k)$. 对于 $n=7$, 图 6.18 给出了图 $G$. 当然, 因为 $G$ 含有一个割点, 所以 $G$ 是非 Hamilton 的. 如果 $u$ 和 $v$ 是 $G$ 的任意两个不邻接的顶点, 则 $\deg u=\deg v=k$, 所以 $\deg u+\deg v=2k=n-1$. 因此, 为了得到同样的结论, 定理 6.6 给出的界不能再降低了.

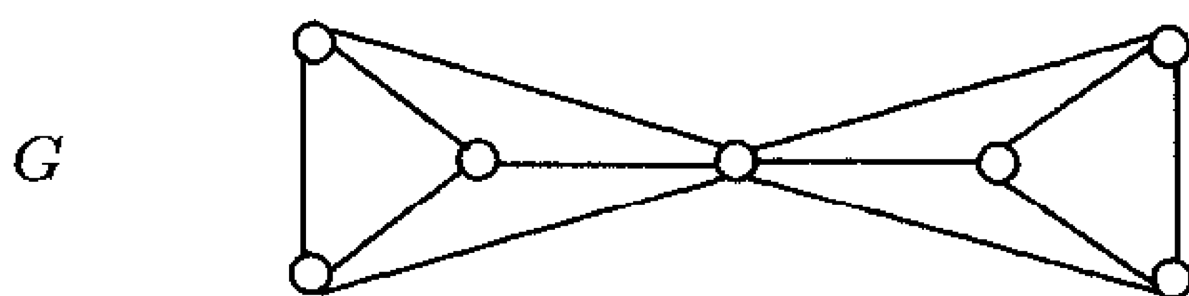



图 6.18 图 $G=K_1+(2K_3)$

定理 6.6 的一个更容易应用的推论归功于 Gabriel Dirac (前面已经有过介绍). Gabriel Dirac 是一位杰出的数学研究者, 他的继父 Paul Dirac 因为量子力学的工作而闻名, 是 1933 年诺贝尔物理学奖获得者, 而 Gabriel Dirac 是丹麦奥尔胡斯大学的一位知名教授.

**推论 6.7** 设 $G$ 为一个 $n \geqslant 3$ 阶的图. 如果对于 $G$ 的每个顶点 $v$, 均有 $\deg v \geqslant n/2$, 则 $G$ 是Hamilton的.

**证** [直接证法] 显然, 如果 $G \cong K_n$, 则 $G$ 是 Hamilton 的. 因此, 我们假设 $G$ 不是完全图. 设 $u$ 和 $v$ 是 $G$ 的两个不邻接的顶点. 则

$$\deg u + \deg v \geqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

根据定理 6.6 知, 图 $G$ 是 Hamilton 的. ■

如果我们仔细考察定理 6.6 的证明部分, 我们可以看出, 它给出了另一个结果的证明, 该结果归功于 J. Adrian Bondy 和 Vašek Chvátal.

**定理 6.8** 设 $u$ 和 $v$ 是一个 $n$ 阶图 $G$ 的两个不邻接的顶点, 并且 $\deg u + \deg v \geqslant n$. 则 $G + uv$ 是Hamilton的当且仅当 $G$ 是Hamilton的.

**证** [直接证法, 反证法] 如果 $G$ 是 Hamilton 的, 则对于 $G$ 的任意两个不邻接的顶点 $u$ 和 $v$, 显然有 $G + uv$ 是 Hamilton 的. 因此, 我们只要验证它的逆.

设 $G + uv$ 是 Hamilton 的, 其中 $u$ 和 $v$ 是图 $G$ 的两个不邻接的顶点. 假如相反, $G$ 不是 Hamilton 的. 即推出 $G + uv$ 的每个 Hamilton 圈都必须含有边 $uv$. 因此, $G$ 含有一条 Hamilton $u - v$ 路. 因为 $\deg_G u + \deg_G v \geqslant n$, 由定理 6.6 的证明知, $G$ 含有一个 Hamilton 圈, 导致矛盾. ■

一个 $n$ 阶图 $G$ 的**闭包 (closure)** $C(G)$ 是指按如下操作所获得的图: 由 $G$ 出发递归地连接度和至少为 $n$ 的不邻接顶点对, 每一步都是针对前一步所获得的图, 直到没有这样的顶点对为止. 图 6.19 举例说明如何获得一个图 $G$ 的闭包, 图 6.20 列出了其他三个图以及它们的闭包. (图 6.20 的图 $G_3$ 是图 6.19 中的图.) 在图 6.20 中, $u$ 和 $v$ 是图 $G_4$ 的仅有的两个不邻接的且度和为 10 (等于 $G_4$ 的阶) 的顶点对.

重复应用定理 6.8, 我们可以得到下面结果.

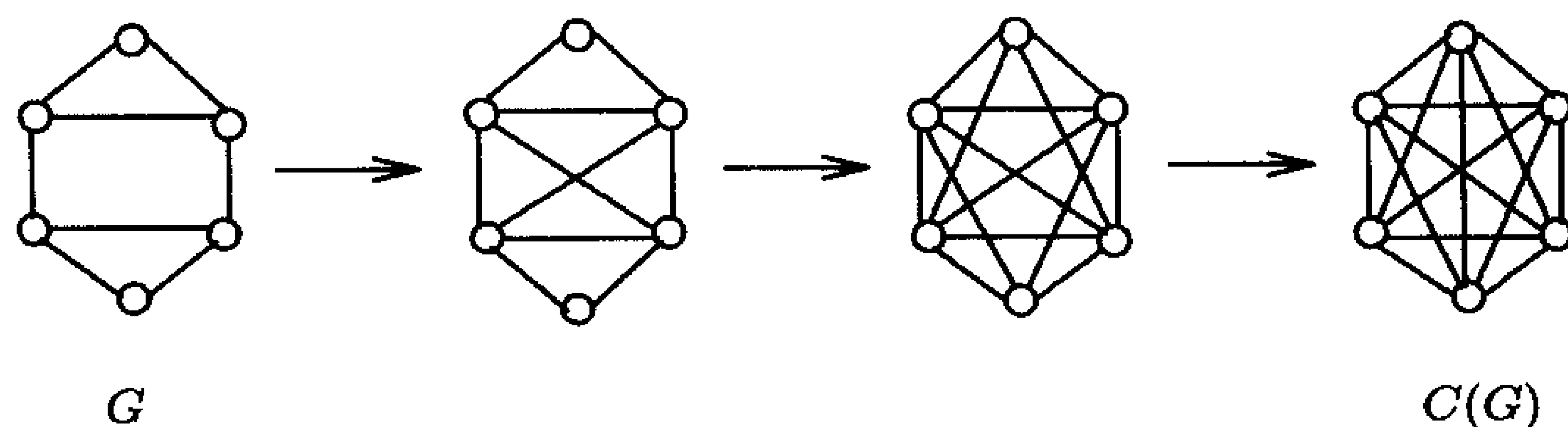



图 6.19 一个图的闭包的构造

**定理 6.9** 一个图是Hamilton的当且仅当它的闭包是Hamilton的.

下面叙述定理 6.9 的一个简单的却很有用的推论.

**推论 6.10** 如果 $G$ 是一个阶至少为 3 的图, 且它的闭包 $C(G)$ 是一个完全图, 则 $G$ 是一个Hamilton图.

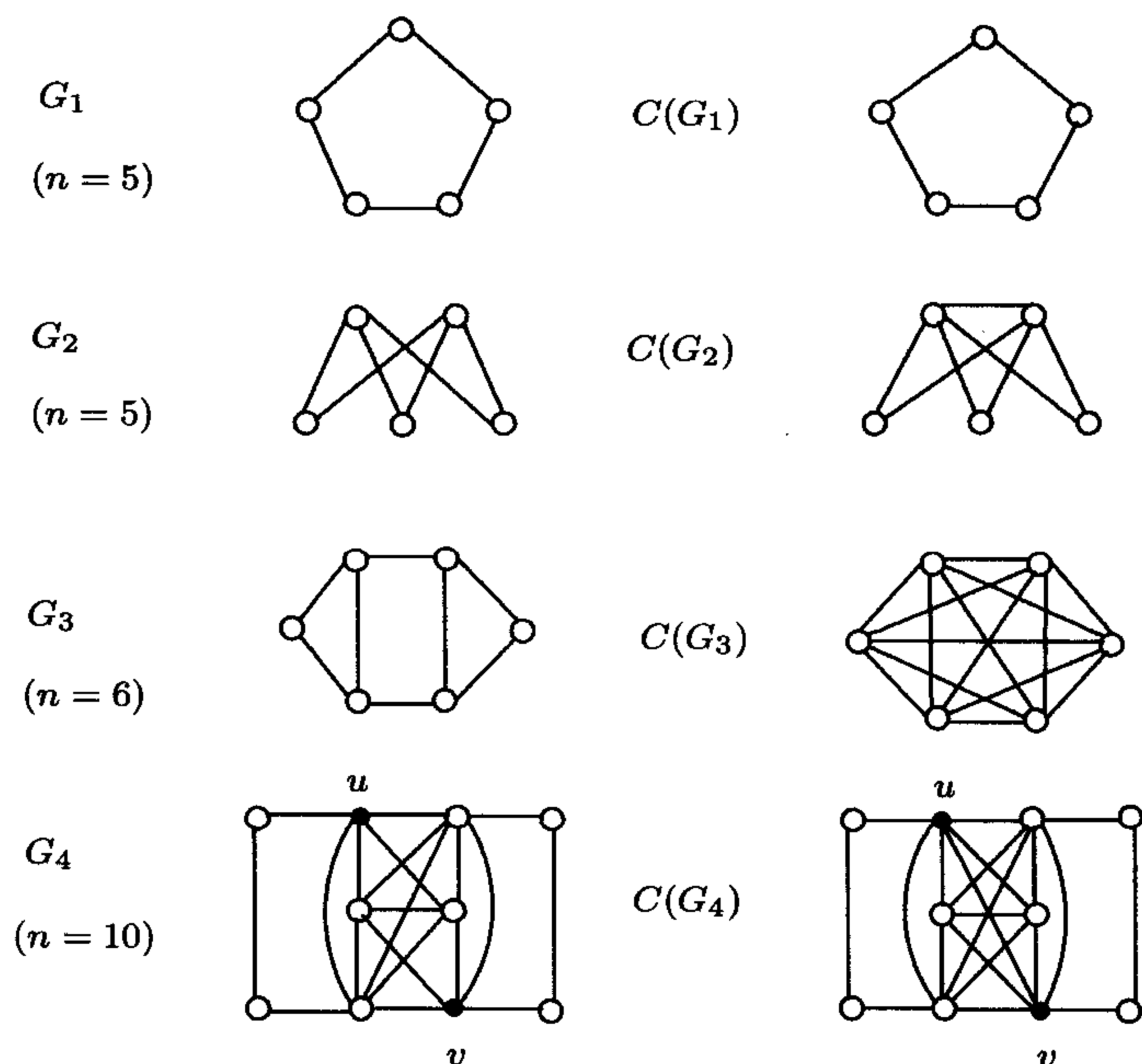



图 6.20 图和它们的闭包

我们注意到, 在推论 6.7 (Dirac 定理) 中, 如果一个 $n$ ($\geqslant 3$) 阶图 $G$ 的每个顶点度至少为 $n/2$, 那么 $G$ 是 Hamilton 的. 更进一步地, Ore 定理 (定理 6.6) 给出一个图为 Hamilton 的较弱条件, 即每对不邻接顶点的度和至少为 $n$. 实际上, Bondy 和 Chvátal 的闭包定理 (定理 6.8) 也能推出该条件. 事实上, 由定理 6.8 可以发现, 有很多的图是 Hamilton 的. 然而, 对于定理 6.8, $n$ ($\geqslant 3$) 阶的图 $G$ 的顶点度必须满足什么条件就可保证 $G$ 是 Hamilton 的? 这仍然不清楚. 对于此, Lajos Posa 给出一个结论 (就发表时间而言, 该结论先于定理 6.8). Posa 发现这个结论时, 他才十几岁, 所以下面的这个定理更引起人们的关注. 尽管 Posa 在科研上很有前途, 但他把毕生精力都献给他的祖国匈牙利的数学教育.

**定理 6.11** 设 $G$ 是一个 $n$ ($\geqslant 3$) 阶的图. 如果对于每个整数 $j$ ($1 \leqslant j < \frac{n}{2}$), $G$ 中度至多为 $j$ 的顶点数小于 $j$, 则 $G$ 是Hamilton的.

**证** [反证法] 我们将证明 $C(G)$ 是完全图. 假设 $C(G)$ 不是完全图. 在 $C(G)$ 的所有不邻接的顶点对中, 设顶点对 $u, w$ 的度和 $\deg_{C(G)} u + \deg_{C(G)} w$ 为最大. 则必然有 $\deg_{C(G)} u + \deg_{C(G)} w \leqslant n-1$. 我们进一步假设, $\deg_{C(G)} u \leqslant \deg_{C(G)} w$. 设 $\deg_{C(G)} u = k$, 则 $k \leqslant \frac{n-1}{2}$, 并且

$$\deg_{C(G)} w \leqslant n-k-1. \tag{6.1}$$

设 $W$ 是所有与 $w$ 不邻接的且不为 $w$ 的顶点的集合. 所以 $u \in W$. 注意到, 如果 $v \in W$, 则有 $\deg_{C(G)} v \leqslant k$, 否则

$$\deg_{C(G)} v + \deg_{C(G)} w > \deg_{C(G)} u + \deg_{C(G)} w,$$

这与顶点对 $u, w$ 所定义的性质矛盾. 因此, $W$ 中的每个顶点的度至多为 $k$. 根据定理的假设, $|W| \leqslant k-1$. 因此,

$$\deg_{C(G)} w \geqslant (n-1)-(k-1)=n-k,$$

与 (6.1) 矛盾. ■

在定理 6.11 中, 当 $j=1$ 时, 这说明 $G$ 没有度为 1 的顶点; 当 $j=2$ 时, 说明 $G$ 允许有一个度为 2 的顶点; 当 $j=3$ 时, 说明 $G$ 允许有一个度为 2 的顶点和一个度为 3 的顶点或者允许有两个度为 3 的顶点.

## 习题

6.9 我们已经注意到图 6.10 所示的图 $G$ 不是 Hamilton 的. 证明: 对 $V(G)$ 的每个非空真子集 $S$, 有 $k(G-S) \leqslant |S|$. 关于定理 6.5, 这个结论说明了什么?

6.10 设 $G$ 是一个 10 阶的 6 正则图, 设 $u, v \in V(G)$. 证明: $G$, $G-v$ 以及 $G-u-v$ 都是 Hamilton 的.

6.11 对于 $n \geqslant 5$, 证明: $\overline{C}_n$ 是 Hamilton 的.

6.12 设 $G$ 是一个 12 阶的 3 正则图, $H$ 是一个 11 阶的 4 正则图.

(a) $G+H$ 是 Euler 图吗? 给予解释.

(b) $G+H$ 是 Hamilton 图吗? 给予解释.

6.13 列举一个图 $G$, 使得

(a) $G$ 是 Euler 的, 但不是 Hamilton 的. (解释为什么 $G$ 不是 Hamilton 的.)

(b) $G$ 是 Hamilton 的, 但不是 Euler 的. (解释为什么 $G$ 不是 Euler 的.)

(c) $G$ 是 Hamilton 的并且含有一条 Euler 迹, 但不是 Euler 的.

(d) $G$ 既不是 Hamilton 的, 也不是 Euler 的, 但含有一条 Euler 迹.

6.14 列举一个图 $G$, 使其具有下面的性质, 或者解释为什么不存在这样的图:

(a) $G$ 是一个 2 连通的 (即连通的, 阶至少为 3 且不含割点)Euler 图, 但不是 Hamilton 的.

(b) $G$ 是非 Euler 的 Hamilton 图, 但它的补图 $\overline{G}$ 是 Euler 的.

6.15 一个图 $G$ 的**细分图** (**subdivision graph**)是一个由 $G$ 通过删除它的每条边 $uv$, 且以一个连接顶点 $u$ 和 $v$ 的度为 2 的顶点 $w$ 代替所得到的图. 试判断下面的结论是否正确: 若图 $G$ 的细分图是 Hamilton 的, 则 $G$ 是 Euler 的.

6.16 设 $G$ 是一个偶数阶 $n$ 的 $r$ 正则连通图, 且 $\overline{G}$ 也是连通的. 证明:

(a) $G$ 或者 $\overline{G}$ 是 Euler 的.

(b) $G$ 或者 $\overline{G}$ 是 Hamilton 的.

6.17 设 $G$ 是一个 $n$ ($\geqslant 3$) 阶的图, $G(3)$ 是按如下操作所获得的图: 对于 $V(G)$ 的每个 3 元子集 $S$, 添加一个新顶点 $v_S$ 且连接 $v_S$ 到 $S$ 的每个顶点. 找出所有这样的图 $G$, 使得 $G(3)$ 是 Hamilton 的.

6.18 证明: 推论 6.7 的界是紧的.

6.19 设 $G_1$ 和 $G_2$ 是两个 $n$ ($\geqslant 3$) 阶的图, 且每个图均满足 Dirac 定理关于 Hamilton 图的假设条件 (推论 6.7). 设图 $G$ 是由 $G_1 \cup G_2$ 通过添加 $G_1$ 和 $G_2$ 之间的边构造而成, 使得 $G_1$ 的每个顶点至少与 $G_2$ 的一半顶点连接, 同样地, $G_2$ 的每个顶点至少与 $G_1$ 的一半顶点连接. 证明: $G$ 是 Hamilton 的.

6.20 设 $G$ 是一个 $n(\geqslant 3)$ 阶且具有下面性质的图: 对每个 $v \in V(G)$, 存在一条从 $v$ 开始的 Hamilton 路. 证明: $G$ 是 2 连通的 (即连通的, 阶至少为 3 且不含割点), 但 $G$ 未必是 Hamilton 的.

6.21 设 $G$ 是一个 $n$ ($\geqslant 3$) 阶的图, 并且对任意两个不邻接的顶点 $u$ 和 $v$, 均有 $\deg u + \deg v \geqslant n-1$. 证明: $G$ 必含有一条 Hamilton 路.

6.22 (a) 是否存在一个 10 阶且边数为 28 的非 Hamilton 图 $G$?

(b) 是否存在一个 10 阶且边数为 28 的非 Hamilton 图 $H$? 其中 $H$ 的 10 个顶点中有 8 个顶点的度为 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6.

6.23 (a) 是否存在一个阶为 $n = 2k \geqslant 6$ 且边数为 $m = k^2 + k - 2$ 的非 Hamilton 图 $G$?

(b) 是否存在一个阶为 $n = 2k \geqslant 6$ 且边数为 $m = k^2 + k - 2$ 的非 Hamilton 图 $H$? 其中 $H$ 有 $k$ 个度为 $k$ 的顶点, $k-2$ 个度为 $k+1$ 的顶点.

6.24 (a) 一个 $n = 2k+1$ 阶的连通图 $G$ 有 $k+1$ 个度为 2 的顶点, 并且它们之间互不邻接, 而剩下的 $k$ 个顶点的度均大于或等于 3. 证明: $G$ 不是 Hamilton 的.

(b) 对某个 $k \geqslant 2$, 列举一个阶为 $n = 2k$ 的 Hamilton 图 $H$, 使得 $H$ 有 $k$ 个度为 2 的顶点, 并且它们之间互不邻接, 而剩下的 $k$ 个顶点的度均大于或等于 3.

## 6.3 专题探索: Hamilton 链与 Hamilton 数

显然, 并非所有阶大于或等于 3 的连通图都含有 Hamilton 圈, 但每个连通图均含有一条闭生成链. 如果用两条平行边去代替连通图 $G$ 的每条边, 则所得到的多重图 $M$ 是 Euler 的 (见图 6.21). 因为 $M$ 的一个 Euler 回路可以形成 $G$ 的一条闭生成链, 其中 $G$ 的每条边出现两次. 即得: 一个边数为 $m$ 的连通图 $G$ 有一条长为 $2m$ 的闭生成链.

连通图 $G$ 中的一条**Hamilton 链 (Hamiltonian walk)** 是指 $G$ 中一条长度最小的闭生成链. 根据前面观察, 每个边数为 $m$ 的连通图 $G$ 包含一条 Hamilton 链, 且这条链的长度至多为 $2m$. 我们用 $h(G)$ 来记 $G$ 中的 Hamilton 链的长度. 因此, 对

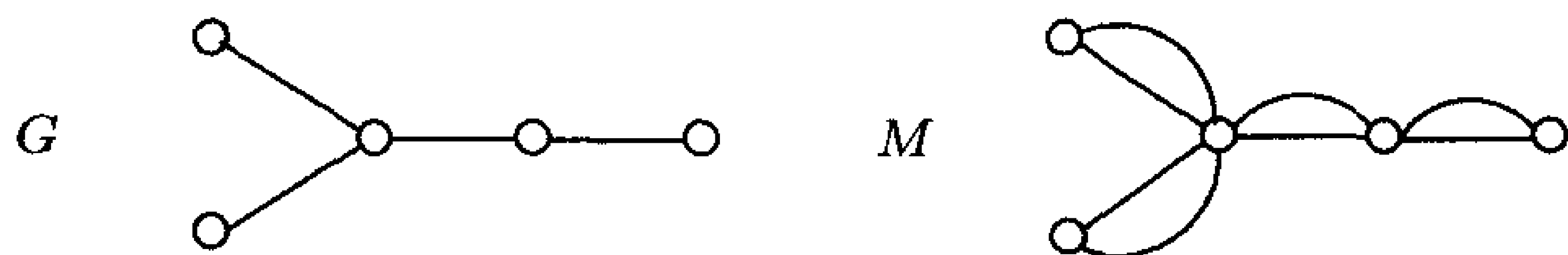



图 6.21 一个图的闭生成链

于阶为 $n$ ($\geqslant 3$) 的连通图 $G$ 而言, $h(G)=n$ 当且仅当 $G$ 是 Hamilton 的. Hamilton 链的概念是由 Seymour Goodman 和 Stephen Hedetniemi 于 1973 年提出的.

一般而言, 判断一个图 $G$ 是否为 Hamilton 的是比较困难的, 但我们注意到, 只要 $G$ 满足 Hamilton 图的一系列充分条件中的一个, 则 $G$ 一定是 Hamilton 的. 然而, 这么多充分条件中没有一个是必要的, 所以即使不满足这些条件中的任何一个, $G$ 也可能是 Hamilton 的. 此时, 我们唯一的选择是构造 $G$ 的一个 Hamilton 圈. 所以问题可以简化为寻找一种顶点排序方式, 即把 $G$ 的顶点按照循环序列排序成 $v_1$, $v_2$, $\cdots$, $v_n$, $v_1$, 使得连续出现的两个顶点对都是邻接的; 也可以表述为: 把 $G$ 的顶点按照循环序列排序成 $v_1$, $v_2$, $\cdots$, $v_n$, $v_1$, 使得 $d(v_i,v_{i+1})=1$, $d(v_n,v_1)=1$, 其中 $1\leqslant i\leqslant n-1$. 如果 $v_1$ 也可以写成 $v_{n+1}$, 则循环序列 $v_1$, $v_2$, $\cdots$, $v_n$, $v_{n+1}=v_1$ 是 Hamilton 圈当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i,v_{i+1})=n.$$

用上述方法寻找 Hamilton 圈可以引出下面的概念. 对于一个阶为 $n$ ($\geqslant 3$) 的连通图 $G$ 以及 $V(G)$ 的一个循环排序

$$s: v_1,v_2,\cdots,v_n,v_{n+1}=v_1,$$

定义数 $d(s)$ 为

$$d(s)=\sum_{i=1}^{n} d(v_i,v_{i+1}).$$

因此, 对于 $V(G)$ 的每个循环排序 $s$, 均有 $d(s)\geqslant n$. 而且, $G$ 是 Hamilton 的当且仅当存在 $V(G)$ 的一个循环排序 $s'$ 使得 $d(s')=n$. $G$ 的**Hamilton 数 (Hamiltonian number)** $h^*(G)$定义为

$$h^*(G)=\min\{d(s)\},$$

其中最小值函数定义在 $V(G)$ 的所有循环排序 $s$ 上. 对于图 6.22 所示的图 $G\cong K_{2,3}$, 以及 $V(G)$ 的循环排序

$$s_1: v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_1 \text{ 和 } s_2: v_1,v_3,v_2,v_4,v_5,v_1,$$

$d(s_1)=8$, $d(s_2)=6$. 因为 $G$ 为 5 阶非 Hamilton 图且 $d(s_2)=6$, 所以 $h^*(G)=6$.

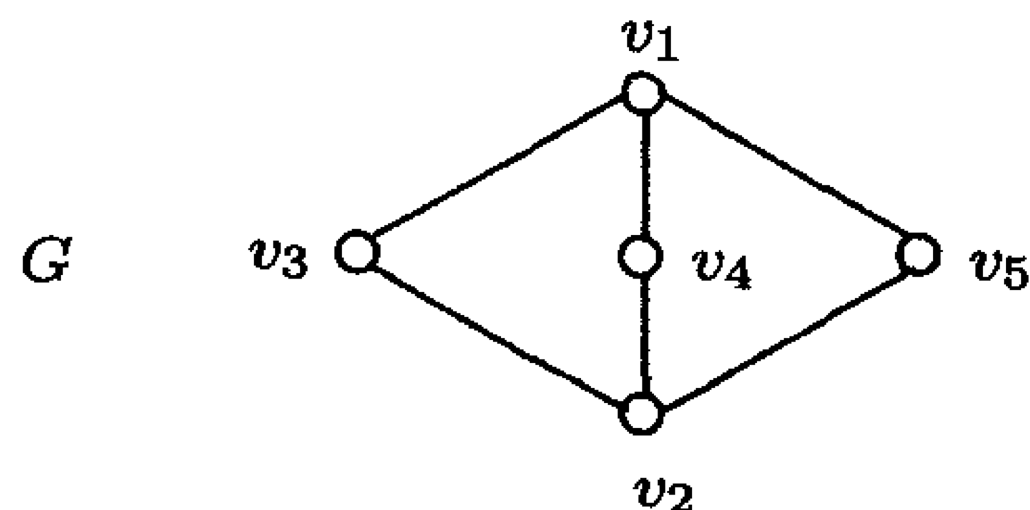



图 6.22 一个 $h^*(G)=6$ 的图 $G$

下面我们换一种方式定义 $G$ 的 Hamilton 链的长度 $h(G)$. 用 $L(W)$ 记链 $W$ 的长度.

**定理 6.12** 对每个连通图 $G$,

$$h^*(G)=h(G).$$

**证** 首先, 我们证明 $h(G)\leqslant h^*(G)$. 设 $s:v_1,v_2,\cdots,v_n,v_{n+1}=v_1$ 是一个 $V(G)$ 的循环排序, 且满足 $d(s)=h^*(G)$. 对于每一个整数 $i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 设 $P_i$ 是 $G$ 中一条 $v_i-v_{i+1}$ 测地线. 因此, $L(P_i)=d(v_i,v_{i+1})$. 因为这些路 $P_i$ 的并可形成 $G$ 的一条 Hamilton 链 $W$, 所以

$$h(G)\leqslant L(W)=\sum_{i=1}^{n}L(P_i)=\sum_{i=1}^{n}d(v_i,v_{i+1})=d(s)=h^*(G).$$

下面我们证明 $h^*(G)\leqslant h(G)$. 设 $W$ 是 $G$ 中一条 Hamilton 链, 且满足 $L(W)=h(G)$. 假设 $W:x_1,x_2,\cdots,x_N,x_1$, 其中 (必然有)$N\geqslant n$. 定义 $v_1=x_1$,$v_2=x_2$. 对于 $3\leqslant i\leqslant n$, 我们再定义 $v_i$ 为 $x_{j_i}$, 其中 $j_i$ 是满足 $x_{j_i}\notin\{v_1,v_2,\cdots,v_{i-1}\}$ 的最小正整数. 则 $s:v_1,v_2,\cdots,v_n,v_{n+1}=v_1$ 是 $V(G)$ 的一个循环序列. 对每个 $i$, 设 $Q_i$ 是 $W$ 的子链 $v_i-v_{i+1}$, 所以有 $d(v_i,v_{i+1})\leqslant L(Q_i)$, 其中 $1\leqslant i\leqslant n$. 因为

$$h^*(G)\leqslant\sum_{i=1}^{n}d(v_i,v_{i+1})\leqslant\sum_{i=1}^{n}L(Q_i)\leqslant L(W)=h(G),$$

即为所证. ■

作为定理 6.12 的推论, 我们可以用 $h(G)$ 记图 $G$ 的 Hamilton 数, 即图 $G$ 的 Hamilton 链的长度.

对于图 6.22 所示的图 $G\cong K_{2,3}$ 以及 $V(G)$ 的循环排序 $s_1:v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_1$ 和 $s_2:v_1,\ v_3,\ v_2,\ v_4,\ v_5,\ v_1$, 我们注意到 $d(s_1)=8$ 和 $d(s_2)=6$. 当然, 也容易证明, 对于 $V(G)$ 的每个循环排序 $s$, $d(s)$ 或者为 8 或者为 6. 这又引入了连通图的另外一个参数. 连通图 $G$ 的**上 Hamilton 数 (upper Hamiltonian number)** $h^+(G)$ 定义为

$$h^+(G)=\max\{d(s)\},$$

其中最大值函数定义在 $V(G)$ 的所有循环排序 $s$ 上. 因此, 对于图 6.22 所示的图 $G$, 有 $h^+(G) = 8$.

作为另一个例子, 我们来看 Petersen 图. 按照图 6.23 的方式, 给 Petersen 图 PG 的顶点标号. 因为 PG 为 10 阶的非 Hamilton 图, 故 $h(PG) \geqslant 11$. 另一方面, 设 $s: x_1, x_2, \cdots, x_{11} = x_1$ 是 PG 的任一循环排序. 因为 $\text{diam}(PG) = 2$, 所以, 对于 $1 \leqslant i \leqslant 10$, 有 $d(x_i, x_{i+1}) \leqslant 2$. 故 $d(s) \leqslant 2 \cdot 10 = 20$, 从而 $h^+(PG) \leqslant 20$. 所以,

$$11 \leqslant h(PG) < h^+(PG) \leqslant 20.$$

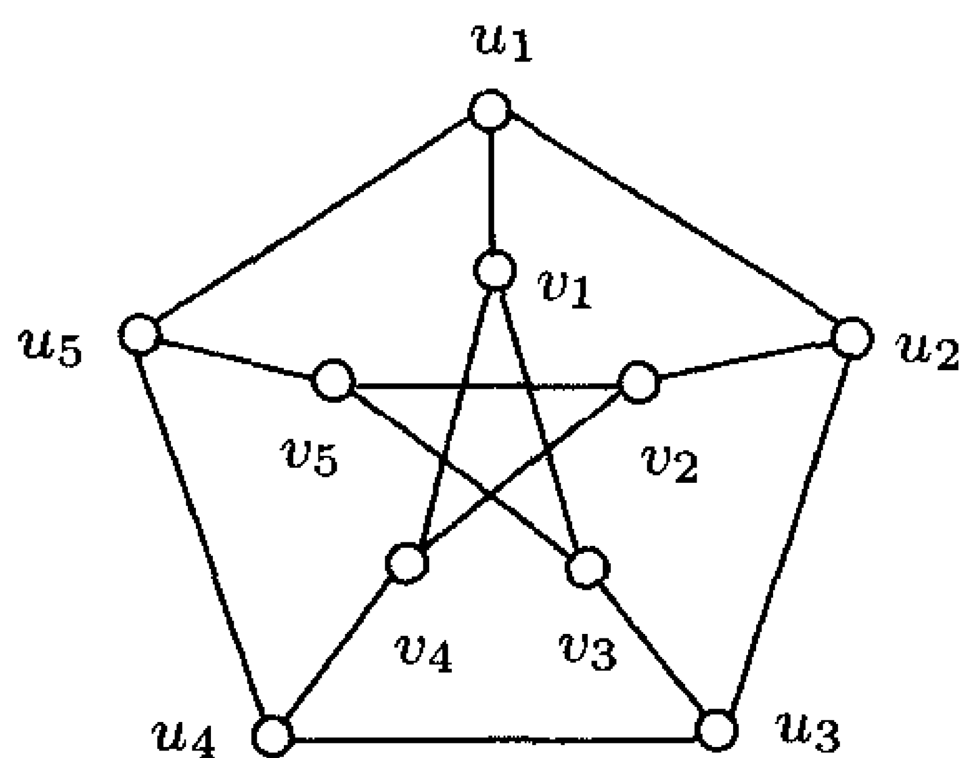



图 6.23 Petersen 图

事实上, 我们有 $h(PG) = 11$, $h^+(PG) = 20$. 更进一步地, 考虑序列 $s_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 10)$:

$$s_1: u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_5, v_2, v_4, v_3, v_1, u_1$$
$$s_2: u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_5, v_2, v_3, v_4, v_1, u_1$$
$$s_3: u_1, u_2, u_3, u_5, u_4, v_4, v_2, v_3, v_5, v_1, u_1$$
$$s_4: u_1, u_3, u_5, u_2, u_4, v_4, v_2, v_5, v_3, v_1, u_1$$
$$s_5: u_1, u_3, u_5, u_2, u_4, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1, u_1$$
$$s_6: u_1, u_3, u_5, u_2, u_4, v_5, v_2, v_4, v_3, v_1, u_1$$
$$s_7: u_1, u_3, u_5, u_2, u_4, v_3, v_5, v_4, v_2, v_1, u_1$$
$$s_8: u_1, u_3, u_5, u_2, v_2, u_4, v_3, v_4, v_5, v_1, u_1$$
$$s_9: u_1, u_3, u_5, u_2, u_4, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1, u_1$$
$$s_{10}: u_1, u_3, u_5, u_2, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, u_1$$

因为当 $1 \leqslant i \leqslant 10$ 时, 有 $d(s_i) = 10 + i$, 所以对每个整数 $k$ $(11 \leqslant k \leqslant 20)$, 存在 $V(PG)$ 的一个循环排序 $s$ 使得 $d(s) = k$.

## 习题

6.25 对 $G_1 \cong K_n$, $G_2 \cong K_{s,t}$, 其中 $n \geqslant 3$, $1 \leqslant s \leqslant t$, 找出 $h(G_i)$ 和 $h^+(G_i)$ $(i = 1, 2)$.

6.26 举出一个 $n$ $(\geqslant 3)$ 阶图的例子, 使得 $h(G) = n + 1$. 并验证此例的正确性.

6.27 举出一个 $n$ $(\geqslant 3)$ 阶图的例子, 使得 $h(G) = 2n - 2$. 并验证此例的正确性.

6.28 设 $C_n$ 是一个 $n\ (\geqslant 3)$ 阶的圈.

(a) 若 $n$ 为偶数, 则 $h^+(C_n)$ 是多少?

(b) 若 $n$ 为奇数, 则 $h^+(C_n)$ 又是多少?

6.29 (a) 如果 $G$ 是一个 $n$ 阶连通图并且直径 $d \geqslant 2$. 证明: $h^+(G) \leqslant nd$.

(b) (a) 中的上界是紧的吗?

6.30 确定所有满足 $h(G) = h^+(G)$ 的图 $G$.

6.31 在研究 Hamilton 数和上 Hamilton 数时, 不从图 $G$ 顶点的循环序列考虑, 请尝试用图 $G$ 顶点的线形序列考虑.

6.32 提出一个你所关心的关于 Hamilton 数和 (或) 上 Hamilton 数的问题, 并尝试解决它.

## 6.4 延伸阅读: 早期的图论书籍

发表于 1736 年的定理 6.1 被认为是图论的开始. 可是, 直到 1936 年, 第一本图论教科书 (由 Dénes König 用德语撰写) 才与读者见面. Dénes König 于 1884 年 9 月 21 日出生于匈牙利的布达佩斯, 其父亲是一位著名的数学教授. 受父亲的影响, 他很小的时候就对数学感兴趣. 在他还是一名高中学生的时候, 他就开始发表论文了.

König 用了九个学期完成大学学业, 前四个学期在布达佩斯, 后五个学期在哥廷根. 他参加了 Hermann Minkowski 关于位置分析的讲座, 早期人们称拓扑为位置分析. Minkowski 对图论的兴趣在很大程度上导致了 König 决定从事图论研究. König 于 1907 年获得博士学位, 他的学位论文是关于几何学方面的. 同年, 他在布达佩斯工业大学获得一个教员职位, 此后一直在那里工作, 直到去世. 尽管 “图论” 这个名字直到 1927 年才出现在大学课程目录里, 但 König 很早以前就已经讲授这门课了. 在那之前, 图论被视为位置分析下面的一个分支. 1935 年, König 成为一名全职教授. 尽管学生们参加 König 的讲座不很积极, 但他还是因为富于激情的讲课而闻名. 正是因为他的引导, 一大批优秀的学生被吸引到数学的这个新领域. 在他的影响下, 很多匈牙利学者转向这个领域, 其中包括 Paul Erdős, Tibor Gallai 和 Paul Turán.

尽管 König 是一位卓越的数学家, 但他在图论方面的主要成就应该是推广图论, 使之被认可. 由于他的努力, 图论从一些孤立有趣的数学结论发展为一个被认可的数学新领域. 尽管 König 被有些数学家瞧不起, 但他从不气馁, 深信图论的未来. 在其关于图论的讲座中, König 经常以下面的话作为开场白:

*图论是数学学科最有趣的分支之一.*

1936 年, König 在莱比锡出版了专著《*有限图与无限图理论*》(这是第一本关于图论主题的专著), 尽管 Oswald Veblen 已经在他的专著《*位置分析*》(第一本关于拓

扑学的专著) 中对图论有所讨论. 十年磨一剑, König 倾注心血写成这本书. 这本书也的确唤起了许多青年数学家对图论的兴趣, 尽管这本书的真正影响产生在二战以后. 1944 年, 当匈牙利被纳粹占领后, König 尽力去帮助那些受迫害的数学家. 1944 年 10 月 19 日, König 自杀, 从而免遭迫害. 1950 年, König 的专著在美国被重印. 在 20 多年的时间里, König 的这本专著是图论仅有的著作. 直到 1958 年 Claude Berge 的专著《无限图理论及其应用》的出版, 这一局面才被打破.

Claude Berge 出生于 1926 年 6 月 5 日, 他独自一人在法国各地传播图论一词. 尽管有 König 的书, 但是在 20 世纪 50 年代之前, 许多数学家并不重视组合学和图论. 大多数法国数学家都试图抵制图论这一术语, 而代之以 "网络" 一词. 然而正是由于 Berge 的努力, 这一切才得以改变.

在 Berge 开始了解图论时, 这个学科在法国还是空白, Berge 的初衷是想了解这个新领域的一些基本东西. 起初, 他研究图论只是为了自己, 但后来在 1958 年他出版了图论专著 (合作者在后面将介绍). 他发现这门学科很有趣, 也有活力, 并且有很大的应用价值. 当然, Berge 推广图论的对象不仅仅是法国人, 他还四处奔波, 做图论的演讲和讲座. Berge 的许多成果被翻译成其他语言. 1993 年, Berge 获得由组合数学及其应用研究所颁发的 Euler 奖章.

Berge 在数学的其他领域也作出了贡献, 包括博弈论和拓扑学. 他引入了 Nash 均衡之外的另一种均衡系统, 称之为 Berge 均衡. Nash 均衡取名于 John Nash, 他的生活被改编成一部电影《美丽心灵》, 该片获得 2002 年奥斯卡金像奖. Berge 还创造了*超图*这一术语.

除了数学, Berge 在其他方面也有很广泛的兴趣. 他对中国的手工艺品特别感兴趣, 是一位象棋高手而且很喜欢写作. 1994 年, 他创作了一部数学悬疑小说《谁杀害了Densmore公爵?》在这部小说中, 侦探在调查案情时用图论的方法 (准确地说是区间图, 本书没有讨论) 找出了杀人凶手. Berge 于 2002 年 6 月 30 日去世.

另一部关于图论的书籍《图理论》是由美国数学学会于 1962 年出版的, 比 Berge 的书迟四年. 它的作者 Oystein Ore (音为 Austin OR-ah) 于 1899 年出生于挪威的奥斯陆. Ore 进入奥斯陆大学学习, 于 1922 年毕业, 他于 1924 年获得博士学位. 自那以后, 他在巴黎和哥廷根呆了很长时间, 后来又回到奥斯陆大学. 1927 年, Ore 来到美国, 并成为耶鲁大学的一名数学教授. 他一生写了一百多篇文章和若干本书.

在开始研究图论之前, Ore 就已经在代数与数论研究方面享有名气. Ore 用自己 1962 年出版的书把图论推广到许多英语国家. 对于 Euler 解决哥尼斯堡七桥问题, Ore 曾经这样说:

*图论是少数几个能确切知道其诞辰的数学领域之一.*

Ore 于 1968 年夏天去世, 在此之前的几个月, Ore 还出席了在西密歇根大学举行的首届图论会议 (每四年一次, 已办十届), 并作了大会发言.

1959 年到 1969 年期间, 出版了图论的一些特殊专题以及图论应用的书, 但是在 1970 年之前出版的具有影响力的关于图理论的书仅有两本, 而且都是 1969 年出版的. 一本是 Alexander. A. Zykov 著的《有限图理论》, 该专著对俄罗斯的图论发展产生了最重要的影响. 1922 年 Zykov 出生于基辅. 1943 年到 1944 年期间, Zykov 开始接触图论, 当时他是高尔基州立大学的一名学生. 在 1959 年至 1969 年期间, Zykov 呆在新西伯利亚, 期间在苏联科学院的西伯利亚分部的数学研究所组织了一个图论研讨会. 自 1969 年, Zykov 在乌克兰的敖德萨州立工业大学工作, 组织过离散数学 (敖德萨) 研讨会.

另一本是 F. Harary 著的图论. Harary 于 1921 年 3 月 11 日出生在纽约市. 他于 1948 年在加州大学伯克利分校获得博士学位. 后来 Harary 来到密歇根大学, 获得教员职位, 一直工作到 1986 年. 此后, 他一直是新墨西哥州立大学的一名教员.

在密歇根大学, Harary 与社会心理学家在一起工作, 但他还是独立地研究图论. Harary 花费了大量的时间周游世界并作图论方面的演讲, 向世界各地的数学家们介绍这门学科. 用这种方式, 他获得众多的合作者, 因此他在这个学科的各个方面共发表论文几百篇. Harary 以他的特有的明晰的写作方式以及对这个学科的热情而为众人所熟知, 被誉为图论大使.

就个人生活而言, Harary 十分喜爱民间舞蹈和古典音乐. 此外, 他经常把曾经作过演讲的城市和大学, 出版过他论文的杂志, 以及和他合作过的同事的趣闻轶事编纂成册.

一次, Alexander Zykov 送给 Frank Harary 一个有三张狮子照片的相框, 即为 (1) 睡狮, (2) 醒狮, (3) 吼狮, 以此来分别代表 (1) 图论的过去,(2) 图论的现在, (3) 图论的未来. 尽管这是一个很滑稽的礼物, 但 Zykov 指出, 如果把 "1936 之前" 定义为图论的 "过去", 把 "1936 年至 1970 年" 定义为图论的 "现在", 并把 "1970 以后" 定义为图论的 "未来", 那么有大量事实来支持图论的这种比拟.

William T. Tutte (1917—2002), 一位对图论作出大量重要贡献的数学家, 是一位腼腆、聪明而幽默的人, 他很喜欢写诗, 常用 Blanche Descartes 这一笔名. 用 Descartes 这个笔名, 他在 1969 年写了一篇反映图论的诗 "The Expanding Unicurse":

*哥尼斯堡的一些市民,*
*漫步在河畔.*
*在普雷格尔河旁,*
*有七座桥相伴.*
*"Euler, 我们一起散步吧!"*
*那些市民在召唤.*
*"我们在这七座桥上漫步,*

经过每坐桥仅一次."
"你们做不到,"Euler大声说道.
"结果就是这样.
岛屿作为顶点,
四个点有奇数度."
从哥尼斯堡到König的书,
图论的传说正是如此,
而且越来越精彩,
绽放在密歇根和耶鲁.

在诗的最后一行出现的密歇根和耶鲁分别指的是 Frank Harary 和 Oystein Ore 所在的大学. 在后面我们还将介绍 William Tutte.

# 第7章 有 向 图

## 7.1 强有向图

正如我们在 6.1 节所见，一个城镇的街道体系可以很自然地用一个图来描述. 在此情形下，顶点代表了城镇中街道的交叉口，边代表了交叉口之间的街道. 图 7.1 列出了两个城镇 A 和 B 的街道体系以及为它们建立模型的图 $G_A$ 和 $G_B$.

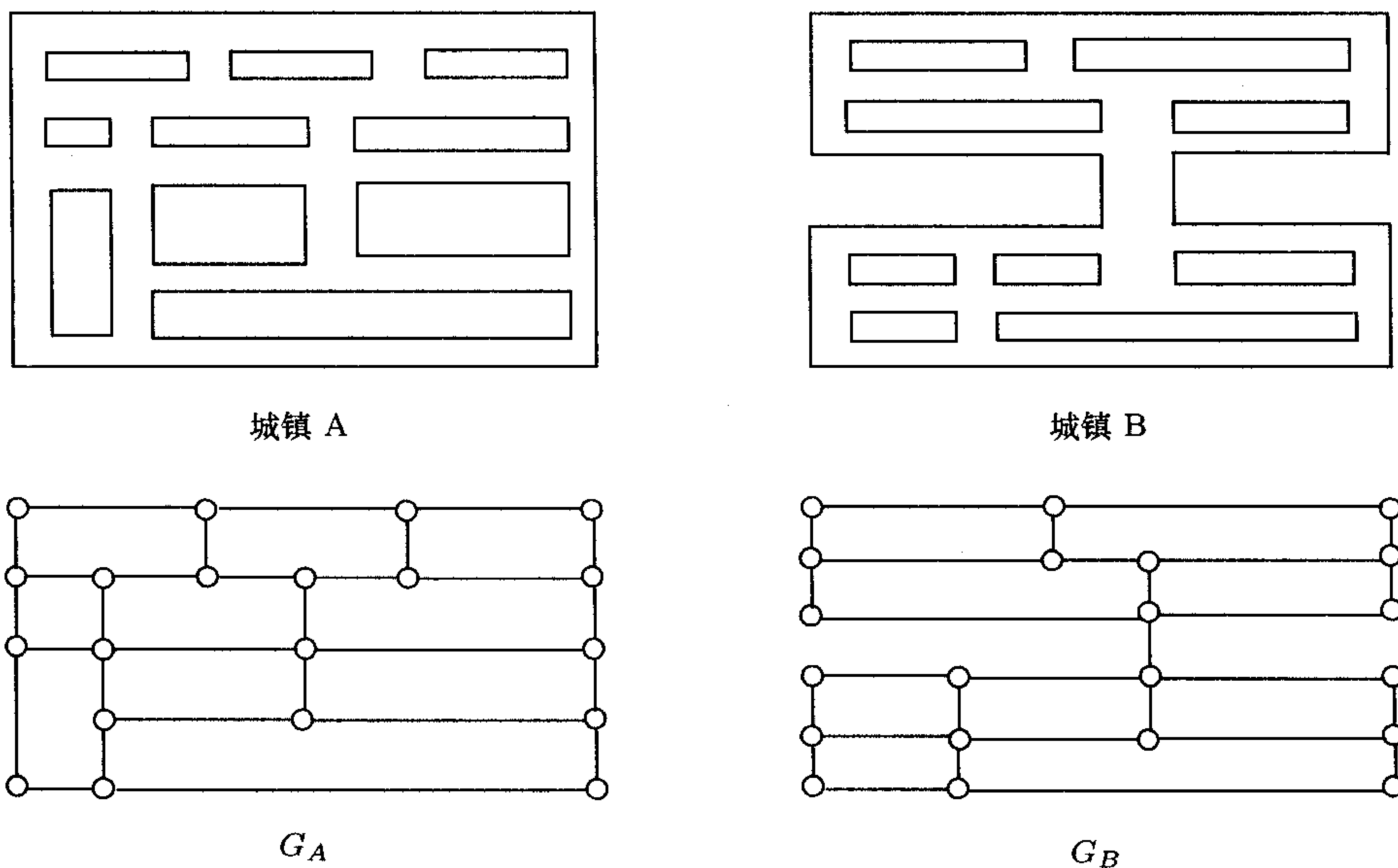



图 7.1 城镇与它们的图模型

图 7.1 的两个图 $G_A$ 和 $G_B$ 都具有如下重要性质：它们都是连通的. 这也就意味着在城镇 A 和城镇 B 中的任意两个位置之间都可以走动 (当然这是任意一个城镇所期望具有的特征). 图 $G_B$ 含有一条割边，但 $G_A$ 不含割边. 事实上，这可能是如下情形：在城镇 B 中，对应于 $G_B$ 中割边的街道是通过桥的一段路. 城镇 B 中这样的街道会带来一个不利条件，即，若必须封闭这条街道，则就不可能在城镇 B 中某些位置之间走动. 然而，在城镇 A 中却没有这种问题. 在城镇 A 中，即使封闭了某条街道，我们也能够在任何两个街道交叉口之间走动，这就允许我们在该城镇中做

些别的事情 (我们即将会发现). 在继续讨论这个发现之前, 我们顺便回顾一下有向图的概念.

如前文所述, **有向图** $D$ 是由非空有限集合 $V$ 与集合 $E$ 构成, 其中 $V$ 中元素称为**顶点**, $E$ 中元素为不同顶点的有序对, 称为**弧**或者**有向边**. 如果有向图 $D$ 具有如下性质: 对于 $D$ 的每对不同顶点, $(u,v)$ 和 $(v,u)$ 中至多有一个是 $D$ 的弧, 则称 $D$ 为**定向图**. 定向图也可以通过对图 $G$ 的每条边指定一个方向 (即定向) 而获得. 所以, 有向图 $D$ 也可以称为是 $G$ 的一个定向. 有向图 $H$ 称为是有向图 $D$ 的一个**子有向图 (subdigraph)**, 如果 $V(H) \subseteq V(D)$, $E(H) \subseteq E(D)$.

有向图 $D$ 称为是**对称的 (symmetric)**, 如果只要当 $(u,v)$ 是 $D$ 的一条弧, 那么 $(v,u)$ 也是 $D$ 的一条弧. 由于研究对称有向图实质上与研究图是一样的, 因此我们很少对对称有向图感兴趣.

我们在前面提到过, 若 $(u,v)$ 是有向图的一条弧, 则 $u$ 称为是**邻接到** $v$, $v$ 称为是**邻接自** $u$. 顶点 $u$ 和 $v$ 也称为**关联于**弧 $(u,v)$. 顶点 $v$ 所邻接到的顶点个数是 $v$ 的**出度**, 记为 $\operatorname{od} v$; $v$ 所邻接自的顶点个数是 $v$ 的**入度**, 记为 $\operatorname{id} v$. 有向图的 $D$ 顶点出度和是 $D$ 的边数, 同样, 入度和也是其边数.

**定理 7.1** **(有向图理论第一定理)** *若有向图 $D$ 的边数为 $m$, 且 $V(D) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, 则*

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{od} v_i = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{id} v_i = m.$$

设 $D$ 为一个有向图. 若对于所有 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$, $D$ 的顶点序列

$$W : u = u_0, u_1, \cdots, u_k = v \tag{7.1}$$

满足 $u_i$ 邻接到 $u_{i+1}$, 则称 $W$ 为 $D$ 中一条 **(有向的)** $u-v$ **链**. 每条弧 $(u_i, u_{i+1})$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$ 称为在 $W$ 上或属于 $W$. 链上弧出现的次数称为是该链的**长度**. 因此, (7.1) 中链 $W$ 的长度为 $k$. 若一条链中没有重复出现的弧, 则称该链为一条 **(有向) 迹**; 若一条链中没有重复出现的顶点, 则称该链为一条 **(有向) 路**. 对于一条 $u-v$ 链来说, 若 $u = v$, 则称其为**闭的**; 若 $u \neq v$, 则称其为**开的**. 称长度至少为 2 的闭迹为 **(有向) 回路**; 若一条长度至少为 2 的闭链除了始点和终点之外没有重复出现的顶点, 则称其为 **(有向) 圈**. 因此, 无论我们提到有向图中哪种类型的链, 都意味着是有向链, 换句话说, 我们在按照箭头所指的方向前进. 类似于图, 有向图中由路、圈、迹或回路的顶点和弧构成的有向子图, 也用同样的术语, 即, 仍称之为路、圈、迹或回路.

为了说明这些概念, 考虑图 7.2 中的有向图 $D$. 由于 $(t,w)$ 和 $(w,t)$ 都是 $D$ 的弧, 有向图 $D$ 不是定向图. 首先, $W : y, w, v, x, y, w, t$ 是一条长为 6 的 $y-t$ 链. 弧

$(y, w)$ 在 $W$ 中出现了两次, 所以 $W$ 不是迹. 但 $T: y, w, t, w, v$ 是一条 $y-v$ 迹. 由于顶点 $w$ 在 $T$ 中重复出现了, 因而它不是路. $C: v, t, w, t, u, , v$ 是回路而不是圈; $C': v, x, y, w, v$ 是一个长为 4 的圈. 圈 $C'': t, w, t$ 的长度为 2.

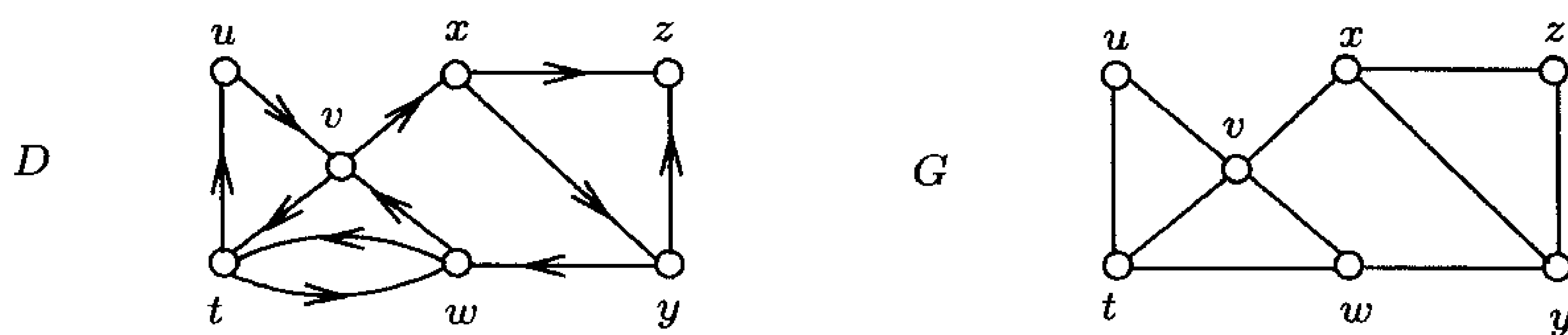



图 7.2 有向图中的链

有向图 $D$ 的**基础图 (underlying graph)**是由 $D$ 通过除去 $D$ 中弧的方向且用单边代替每对平行边所获得的图. 等价地说, 有向图 $D$ 的基础图是通过用边 $uv$ 来代替弧 $(u, v)$ 或弧对 $(u, v), (v, u)$ 而获得. 因此, 如图 7.2 所示, 图 $G$ 就是有向图 $D$ 的基础图. 另外, 若 $D$ 是图 $G$ 的一个定向, 则 $G$ 是 $D$ 的基础图.

一个图或者是连通的, 或者不是, 而对于有向图来说, 却有另外一种情形. 有向图 $D$ 称为是**连通的** (或者**弱连通的 (weakly connected)**), 如果 $D$ 的基础图是连通的. 例如, 图 7.2 中有向图 $D$ 是连通的. 有向图 $D$ 称为是**强的 (strong)** (或者**强连通的 (strongly connected)**), 如果对于每对不同顶点 $u, v$, $D$ 都含有一条 $u-v$ 路和一条 $v-u$ 路. 图 7.2 中有向图 $D$ 不是强连通的, 因为 $D$ 中不存在 $z-y$ 路. 实际上, $D$ 中不存在从 $z$ 到其他任何顶点的路.

在图中可以定义距离, 在有向图中我们也可以定义距离. 设 $u$ 和 $v$ 是有向图 $D$ 的顶点. **有向距离 (directed distance)**, 或更具体地, **从 $u$ 到 $v$ 的距离** $\vec{d}(u, v)$定义为 $D$ 中一条最短 $u-v$ 路的长度. 一条长度为 $\vec{d}(u, v)$ 的 $u-v$ 路称为是一条 $u-v$ **测地线**. 在这里, 我们再次强调, 我们这里所讨论的路是*有向路*. 为了对 $D$ 中每对顶点 $u, v$ 能够定义 $\vec{d}(u, v)$, 有向图 $D$ 必须是强连通的.

若 $D$ 是强连通有向图, 则 $D$ 的每个顶点必然有正的出度和入度. 这仅仅是有向图为强连通的一个必要条件, 而不是充分条件. 例如, 图 7.3 中有向图 $D$ 的每个顶点都有正的出度和入度, 但不存在 $u-x$ 路.

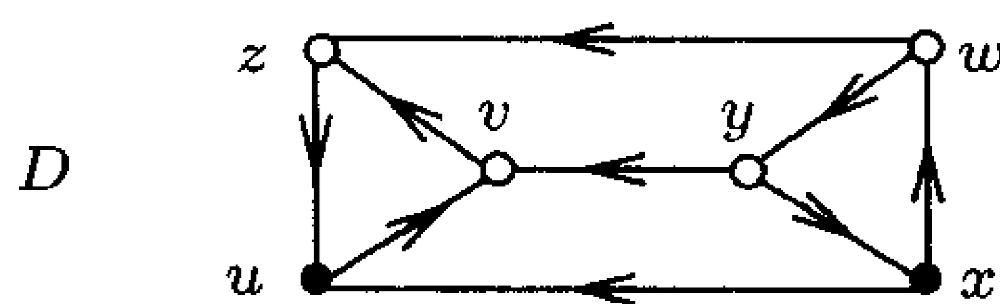



图 7.3 一个非强连通的有向图

有向图 $D$ 中每条 $u-v$ 路都是 $u-v$ 链, 但我们知道这个命题的逆却是不正确的. 换句话说, $D$ 中一条 $u-v$ 链的存在性暗示着 $D$ 中存在一条 $u-v$ 路. 如下定理

的陈述和证明与定理 1.6 关于无向图的对应结果非常相似.

**定理 7.2** 若有向图 $D$ 含有一条长度为 $\ell$ 的 $u-v$ 链, 则 $D$ 含有一条长度至多为 $\ell$ 的 $u-v$ 路.

**证** [反证法] 设 $W$ 为 $D$ 的所有 $u-v$ 链中长度最小的链. 假设 $W: u = u_0, u_1, \cdots, u_k = v$. 则有 $k \leqslant \ell$. 若顶点 $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_k$ 是不相同的, 则 $W$ 是一条 $u-v$ 路, 定理得证; 否则, 则存在顶点 $u_i$ 与 $u_j$, 满足 $u_i = u_j$, 其中 $1 \leqslant i < j \leqslant k$. 如果从 $W$ 中删去 $u_{i+1}, u_{i+2}, \cdots, u_j$, 那么可以得到一条 $u-v$ 链

$$W': u = u_0, u_1, \cdots, u_i, u_{j+1}, u_{j+2}, \cdots, u_k = v.$$

$W'$ 的长度小于 $k$, 得到矛盾. 因此, $W$ 是一条长度为 $k \leqslant \ell$ 的 $u-v$ 路. ■

下面结论给出了有向图是强连通的一个充要条件.

**定理 7.3** 有向图 $D$ 是强连通的当且仅当 $D$ 含有一条闭生成链.

**证** [直接证法] 因为平凡有向图均为强连通的, 所以我们可以假设 $D$ 是非平凡的. 首先, 设有向图 $D$ 包含一条闭生成链 $W: w = w_0, w_1, \cdots, w_k = w$. 设 $u, v$ 为 $D$ 的两个不同顶点, 则存在整数 $i$ 与 $j$ $(0 \leqslant i, j \leqslant k)$, 使得 $u = w_i$, $v = w_j$. 假设 $i < j$, 则 $W': u = w_i, w_{i+1}, \cdots, w_j = v$ 是一条 $u-v$ 链, $W'': v = w_j, w_{j+1}, \cdots, w_k = w_0, w_1, \cdots, w_i = u$ 是一条 $v-u$ 链. 根据定理 7.2, $D$ 同时含有一条 $u-v$ 路和一条 $v-u$ 路.

现在来证明必要性. 设 $D$ 是强连通的有向图, 并且 $V(D) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 由于 $D$ 是强连通的, 所以对于 $i = 1, 2, \cdots, n-1$, $D$ 含有一条 $v_i - v_{i+1}$ 路 $P_i$. 设 $P_n$ 为一条 $v_n - v_1$ 路. 对于 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, 设 $P_i'$ 是通过删去 $P_i$ 的最后一个顶点所获得的路. 则

$$W: P_1', P_2', \cdots, P_{n-1}', P_n$$

是 $D$ 中一条闭生成链. ■

由定理 7.3 可知, 含有一条闭生成回路的有向图是强连通的. 我们对如下一类生成回路感兴趣. (强连通) 有向图 $D$ 的一条**Euler 回路 (Eulerian circuit)** 是指一条包含 $D$ 的每条弧的回路. **Euler 有向图 (Eulerian digraph)**是指含有 Euler 回路的有向图. 图 7.4 中有向图 $D$ 是 Euler 有向图, $C: u, v, w, y, z, x, y, x, w, u$ 是一条 Euler 回路.

正如 Euler 图很容易刻画一样, Euler 有向图也很容易刻画. 实际上, 下面定理的证明类似于刻画 Euler 图 (定理 6.1) 的证明.

**定理 7.4** 非平凡连通有向图 $D$ 是Euler的当且仅当对于 $D$ 的每个顶点 $v$, 均有 $\mathrm{od}\, v = \mathrm{id}\, v$.

**证** [直接证法, 反证法] 设 $D$ 为 Euler 有向图, 那么 $D$ 含有一个 Euler 回路 $C$. 设 $v$ 为 $C$ 的一个顶点. 首先, 假设 $v$ 不是 $C$ 的起始点 (所以 $v$ 也不是终点). 只要 $v$

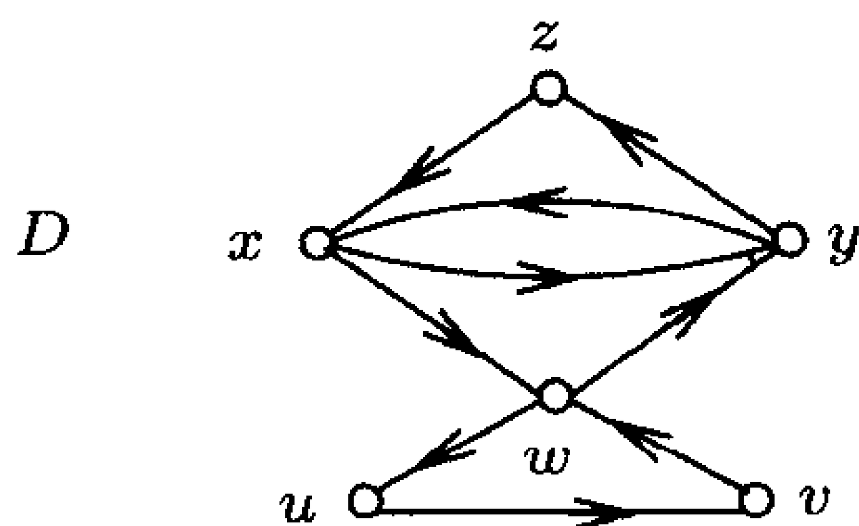



图 7.4 一个 Euler 有向图

在 $C$ 上出现, 那么就存在一条弧进入 $v$, 另一条弧离开 $v$. 这就为 $v$ 的入度和出度分别贡献了 1. 若 $v$ 在 $C$ 上出现了 $k$ 次, 则 $\text{od}\,v = \text{id}\,v = k$. 其次, 若 $v$ 为 $C$ 的起始点, 则存在一条弧离开 $v$, $C$ 的最后一条弧进入 $v$. $v$ 在 $C$ 上的每一次出现都为 $v$ 的入度和出度贡献了 1, 因此, $\text{od}\,v = \text{id}\,v$.

现在来证明定理的逆, 设 $D$ 为满足下面性质的非平凡连通有向图, 即, 对 $D$ 的每个顶点 $v$ 都有 $\text{od}\,v = \text{id}\,v$. 对于 $D$ 的顶点 $u$, 设 $T$ 为一条以 $u$ 为起点的最长迹. 假设 $T$ 是一条 $u-v$ 迹. 首先假设 $u \neq v$, $v$ 在 $T$ 上出现了 $k$ 次, 其中 $k \geqslant 1$. 那么 $T$ 含有 $k$ 条弧进入 $v$, $k-1$ 条弧离开 $v$. 然而, 由于 $\text{od}\,v = \text{id}\,v$, 所以还存在一条离开 $v$ 的且不属于 $T$ 的弧. 这就意味着 $T$ 可以延伸为一条以 $u$ 为起点的更长的迹, 导致矛盾. 因此, $u = v$, $T$ 为 $D$ 中一条回路 $C$. 故 $D$ 含有回路, 且可设 $C$ 为 $D$ 中最长的回路.

我们断言 $C$ 含有 $D$ 的所有弧, 因而 $C$ 是一条 Euler 回路. 假设 $C$ 没有包含 $D$ 的所有弧. 由于 $D$ 是连通的, 所以 $C$ 上存在一个顶点 $w$, $w$ 与 $C$ 之外的一条弧关联. 设 $D' = D - E(C)$ 为 $D$ 的由不属于 $C$ 的弧所构成的生成子有向图. 对于 $C$ 上每个顶点 $v$, $\text{od}_D\,v = \text{id}_D\,v$, $\text{od}_C\,v = \text{id}_C\,v$, 所以对于 $D'$ 的每个顶点 $v$, 均有 $\text{od}_{D'}\,v = \text{id}_{D'}\,v$. 设 $T'$ 为 $D'$ 中以 $w$ 为起始点的最长迹. 由上面的证明可知, $T'$ 为 $D'$ 中的一条回路 $C'$. 如果我们把 $C'$ 与 $C$ 在 $w$ 处连接起来, 则我们得到 $D$ 中一条回路 $C''$, $C''$ 比 $C$ 含有更多的弧, 导致矛盾. 因此, $C$ 是一条 Euler 回路. ■

我们在前面提到：在城镇 A (图 7.1) 中, 封闭任一条街道, 仍然可以在任意两个街道交叉口之间走动; 而在城镇 B 中, 情形却不是这样的, 因为模拟该城镇街道系统的图 $G_B$ 中存在了一条割边. 我们也提到：城镇 A 的这种特性允许我们在其中做些其他事情. 假设城镇 A 的镇委员们用他们无穷的智慧作了如下的决策：把所有的街道都改造成单行道会更方便 (无论什么原因). 这样做可行吗? 这个问题的回答是肯定的, 但这并不是所要提的问题, 更明确的问题应该是：把城镇 A 中所有街道改造成单行道, 以至于在改造之后, 在城镇 A 中能够从任何一个地方驱车到任何其他地方, 这样能够改造成功吗? 这个问题的答案也是肯定的. 图 7.5 列出了实现这种改造的一种方法. 图 7.5 中有向图 $D_A$ 模拟了这种新的街道系统. 你可能已经

注意到, 我们刚刚所提的问题能够重述为: 存在图 7.1 中图 $G_A$ 的一个强连通的定向吗? 当然, 我们现在知道了这个问题的答案是肯定的. 更一般的问题是: 哪些图具有强连通的定向? 图 7.1 中图 $G_A$ 和 $G_B$ 为我们提供了线索.

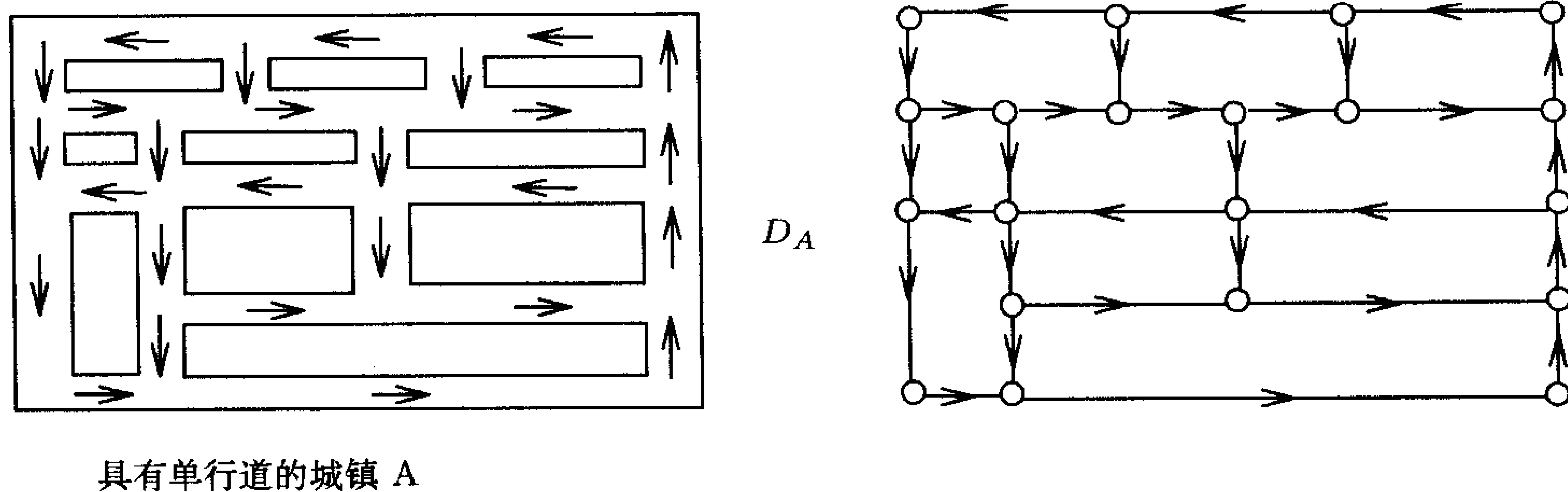



图 7.5　单行道系统的一个有向图模型

**定理 7.5**　非平凡连通图 $G$ 有一个强连通的定向当且仅当 $G$ 不含割边.

**证**　[逆否证法, 反证法] 首先假设非平凡连通图 $G$ 含有一条割边 $e = uv$. 设 $D$ 为 $G$ 的任意一个定向. 则 $(u,v)$ 或者 $(v,u)$ 为 $D$ 的一条弧, 不妨设 $(u,v)$ 为 $D$ 的一条弧. $D$ 必然含有一条 $u-v$ 路. 我们断言 $D$ 中不存在 $v-u$ 路. 若 $D$ 含有一条 $v-u$ 路 $P$, 则 $P$ 可以被认为是 $G$ 中一条 $v-u$ 路 $P'$, 其中 $P'$ 不含 $uv$. 在 $G$ 中, $P'$ 与边 $uv$ 就构成了一个含有边 $e$ 的圈, 与 $e$ 为割边相矛盾. 因此, 正如我们所断言的, $D$ 不含 $v-u$ 路, 所以 $D$ 不是强连通的.

反过来, 设 $G$ 是一个不含割边的连通图. 我们来证明 $G$ 具有一个强连通的定向. 由于 $G$ 不含割边, 所以 $G$ 含有圈 $C$. 如果我们通过给 $C$ 的边指定方向来获得一个有向圈 $C'$, 那么对于 $C'$ 上的每对顶点 $x$ 和 $y$, $C'$ 上都存在一条 $x-y$ 路与一条 $y-x$ 路. 因此, 可以通过给 $G$ 的某些边指定方向来获得有向图 $D'$, 以至于在获得 $D'$ 之后, 存在 $D'$ 的顶点集合 $U$, 使得对于 $U$ 中每对顶点 $x$ 和 $y$, $D'$ 同时存在一条 $x-y$ 路与一条 $y-x$ 路. 若 $G$ 的一条边连接了 $U$ 中两个顶点, 但该边还没有被定向, 则我们可以对它任意指定一个方向, 并能够得到相同的结论.

根据上面的做法, 存在一个由 $G$ 中顶点构成的且具有最大基数的集合 $S$, 以及连接 $S$ 中顶点的 ($G$ 的) 边的一个定向 $D$, 使得对 $S$ 中每对不同顶点 $x$ 和 $y$, $D$ 中都存在一条 $x-y$ 路和一条 $y-x$ 路. 若 $S = V(G)$, 则证明完成. 假设 $S \neq V(G)$. 由于 $G$ 是连通的, 所以必存在一个顶点 $u \in S$ 与一个顶点 $v \notin S$, 使得 $uv \in E(G)$. 因为 $uv$ 不是割边, 所以 $uv$ 属于一个圈

$$C'' : u, v = v_1, v_2, \cdots, v_s = u.$$

显然, $u \in S$, 但 $u$ 可能不是 $C''$ 上 $v$ 之后的属于 $S$ 的第一个顶点. 设 $w = v_t$ $(t \leqslant s)$

为第一个这样的顶点. 对边 $uv, vv_2, \cdots, v_{t-1}v_t$ 的定向为: $(u,v), (v,v_2), \cdots, (v_{t-1}, v_t)$ (见图 7.6), 设 $P$ 为所产生的 (有向) $v-v_t$ 路. 若其他任何一边连接 $T=\{v_1, v_2, \cdots, v_{t-1}\}$ 中一个顶点与 $S\cup T$ 中一个顶点, 则对该边任意指定方向. 设 $D'$ 为所得到的有向图.

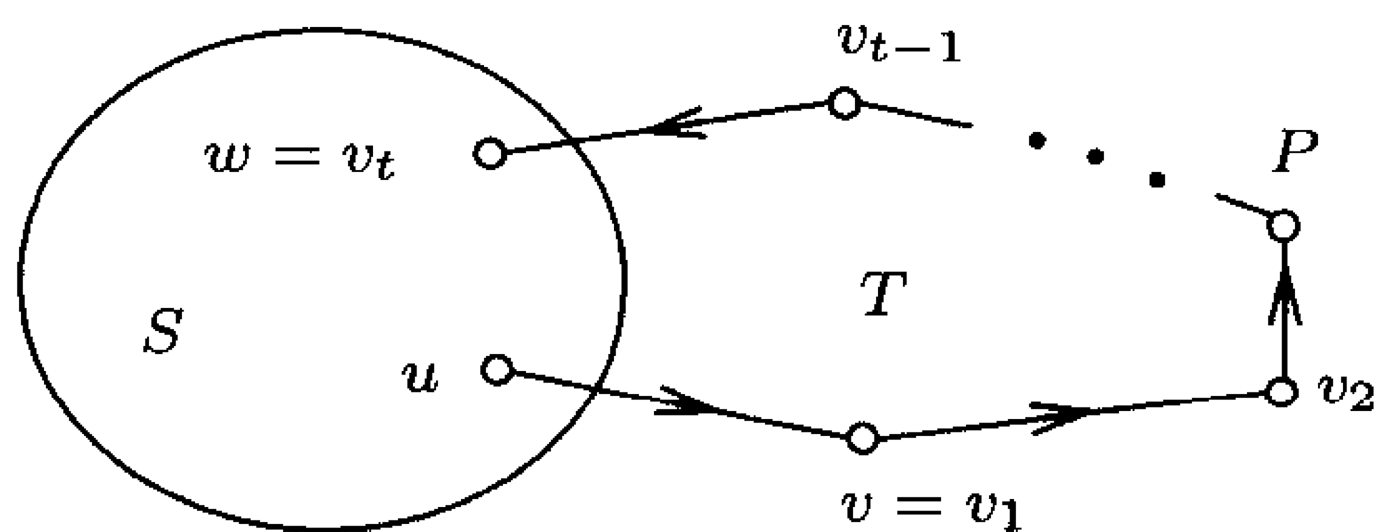



图 7.6 构造一个强连通的定向

不难发现, 对于 $S\cup T$ 中每对顶点 $x,y$, $D'$ 中都存在一条 $x-y$ 路与一条 $y-x$ 路. 这与 $S$ 具有最大基数且满足如下性质相矛盾, 即对于 $G$ 的定向中的每对顶点 $x,y\in S$ 都存在一条 $x-y$ 路与一条 $y-x$ 路. ■

我们在第五章中提到过, 如果图 $G$ 是一个不含割边的非平凡连通图, 则 $G$ 是 2 边连通的. 因此, 定理 7.5 可按重新表述如下:

*非平凡连通图 $G$ 具有一个强连通的定向当且仅当 $G$ 是 2 边连通的.*

定理 7.5 归功于 Herbert E. Robbins (1915—2001). 这个定理是出现在一篇题为*A theorem on graphs, with an application to a problem of traffic control*的论文中的, 该文于 1939 年发表在杂志*American Mathematical Monthly* (美国数学月刊) 上. 这是他在 Hassler Whitney 的指导下, 从哈佛大学获得拓扑学方面的博士学位仅仅一年之后的工作. 这篇文章只是 Robbins 所发表的第二篇论文, 但却给人们留下了长远而深刻的印象. Robbins 于 1939 年 (当时他 24 岁) 开始与 Richard Courant 一起编著杰作《什么是数学?》一书. Robbins 认为该著作所含文学上的东西多于自然科学上的. 若干年后, Robbins 开始对统计分析感兴趣并投入到该方面的研究中去, 并作出了重要的贡献. 他在哥伦比亚大学做了多年的数理统计学教授. 1958 年, Robbins 开始指导一名叫 Herbert Wilf 的博士生. Wilf 在组合数学和图论方面做出了重要贡献并于 2002 年获得了组合数学及其应用研究所颁发的 Euler 奖章.

## 习题

7.1 (a) 证明: 若 $D$ 是一个 4 阶定向图, 使得对于 $D$ 的每个顶点 $v$, $D-v$ 是强连通的, 则 $D$ 是强连通的.

(b) 证明: 不存在具有如下性质的 4 阶定向图, 使得对于 $D$ 的每个顶点 $v$, $D-v$ 是强连通的.

7.2 证明：图 $G$ 有一个 Euler 定向当且仅当 $G$ 是 Euler 的.

7.3 证明：通过对图 7.7 中图 $G_1$ 和 $G_2$ 的每条边指定某种方向, 可使得定向后的有向图都是强连通的.

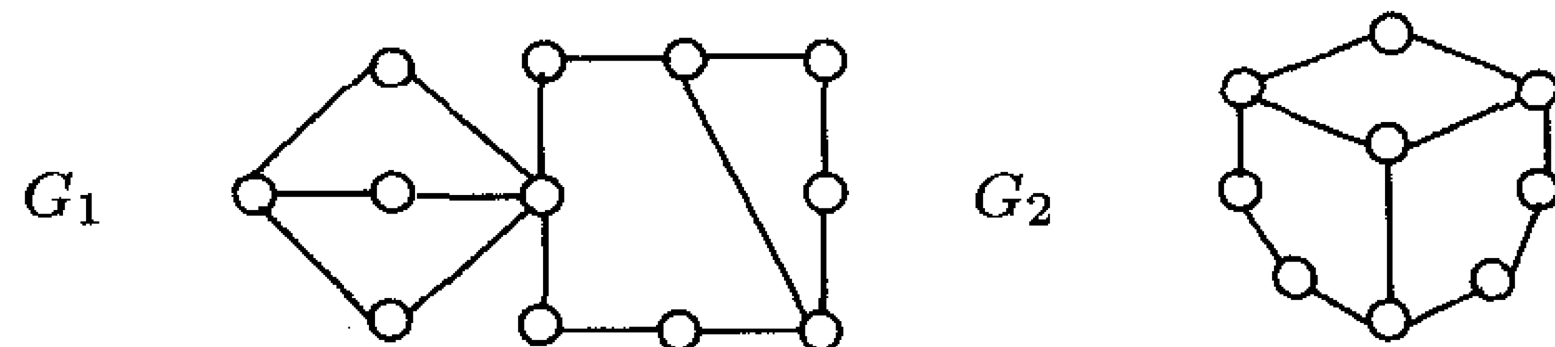



图 7.7 习题 7.3 的图

7.4 有向图 $D$ 的**逆** (**converse**) $\vec{D}$ 是通过把 $D$ 的每条弧的方向反向而得到的. 证明：有向图 $D$ 是强连通的当且仅当它的逆 $\vec{D}$ 是强连通的.

7.5 证明：非平凡有向图 $D$ 是强连通的当且仅当对于 ($D$ 的) 基础图 $G$ 的每个边割 $S$ (分割 $V(G-S)$ 为两个集合 $A$ 与 $B$), $D$ 中存在一条从 $A$ 指向 $B$ 的弧和一条从 $B$ 指向 $A$ 的弧.

7.6 存在具有如下性质的非平凡有向图 $D$ 吗? 使得 $D$ 中不存在两个顶点具有相同的出度, 但任意两个顶点都具有相同的入度. 并给予解释.

## 7.2 竞 赛 图

很难弄清楚竞赛有多久的历史了. 个体之间有比赛 (网球、国际象棋、桥牌和马术), 团队之间也有比赛 (足球、篮球和棒球), 甚至如马克 · 吐温在幽默小说*卡拉韦拉斯县驰名的跳蛙*中所描写的 Dan'l Webster, 青蛙之间也有比赛. 在一些比赛中, 两个个体或者两个团队之间仅有一次对抗, 对抗中的获胜者决定着比赛的结果. 在另一些比赛 (通常称为竞赛) 当中, 会有许多个体 (或团队) 参与, 并按一定规则来确定谁与谁对抗. 一次对抗的失利会导致失败的个体或团队被淘汰, 而竞赛仍会在初赛中获胜者之间进行下去. 还有一些竞赛是 "双淘汰制" 的, 其中参赛选手或团队可以失败一次, 但在第二次失败的时候必须被淘汰.

另一种竞赛是 "循环赛", 其中每支队伍都会与其他队伍进行一次竞赛, 竞赛的结果是在所有竞赛都结束以后决定的. 例如, 假设有 8 支队伍 (用 1, 2, ···, 8 来表示) 参与循环赛, 则每支队伍都要与其他 7 支队伍比赛一次. 第一轮有 4 场比赛, 每场都有两支队伍参与. 这个循环赛共有 7 轮比赛. 图 7.8 列出了赛程表. 如果只有 7 支队伍参赛, 那么在任一轮比赛中, 只能进行三场比赛, 其中有一支队伍没有比赛 (这支队伍会得到一个写有 "bye" 的牌子). 在这种情况下, 我们在图 7.8 中用 "bye" 来替代每次出现的 8. 我们将在 8.2 节中讨论如何构造赛程表.

循环赛能够很自然地引出一类有向图, 称为竞赛图. **竞赛图 (tournament)**是完全图的一个定向. 因此, 竞赛图可以定义为一类有向图, 使得对于每对不同的顶

| 第 1 轮 | 第 2 轮 | 第 3 轮 | 第 4 轮 | 第 5 轮 | 第 6 轮 | 第 7 轮 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1–2 | 1–3 | 1–4 | 1–5 | 1–6 | 1–7 | 1–8 |
| 3–4 | 2–8 | 2–6 | 2–3 | 2–7 | 2–5 | 2–4 |
| 5–6 | 4–5 | 3–7 | 6–8 | 3–5 | 3–8 | 3–6 |
| 7–8 | 6–7 | 5–8 | 4–7 | 4–8 | 4–6 | 5–7 |

图 7.8　有 8 支队伍参与的循环赛

点 $u, v$, $(u,v)$ 和 $(v,u)$ 中恰有一条是弧. 竞赛图 $T$ 可以作为循环赛的图模型. $T$ 的顶点为循环赛中的参赛队伍, $(u,v)$ 是弧当且仅当队伍 $u$ 战胜 $v$. (平局是不允许的.)

如前文所述, 两个有向图 $D$ 和 $D'$ 是**同构的** (记为 $D \cong D'$), 如果存在一个双射 $\phi : V(D) \to V(D')$, 使得 $(u,v) \in E(D)$ 当且仅当 $(\phi(u), \phi(v)) \in E(D')$. 映射 $\phi$ 称为是一个**同构**. 1 阶竞赛图只有一个; 2 阶竞赛图 (同构图视为同一个图) 也只有一个; 3 阶竞赛图有两个; 4 阶竞赛图有 4 个; 5 阶竞赛图有 12 个. 图 7.9 列出了阶等于或小于 4 的竞赛图. 根据这个信息, 当得知存在超过 1540 亿个 12 阶的竞赛图时, 我们一定会感到很吃惊.

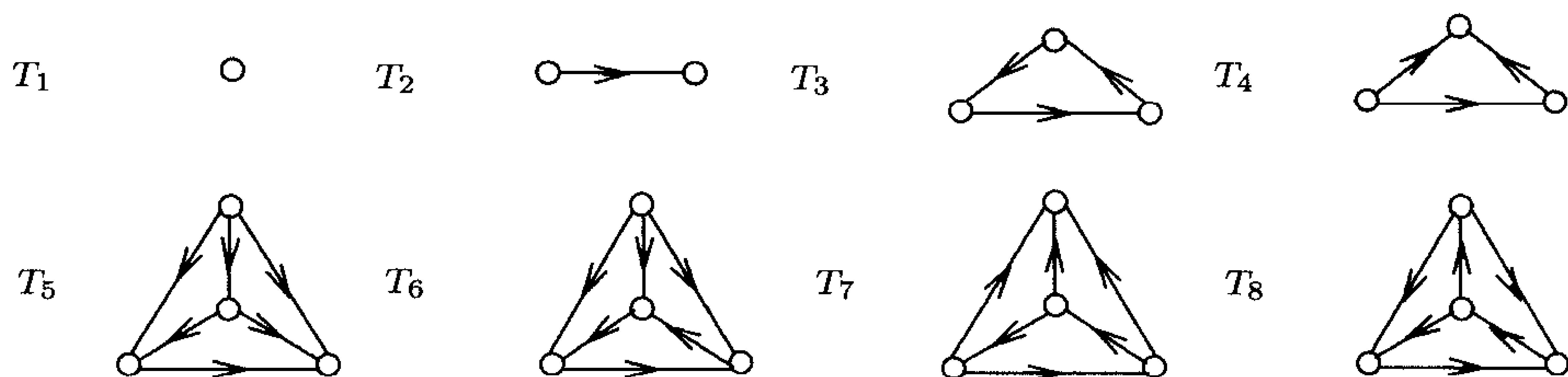



图 7.9　阶至多为 4 的竞赛图

竞赛图 $T$ 称为是**可迁的 (transitive)**, 如果只要 $(u,v)$ 和 $(v,w)$ 是 $T$ 的弧, 则 $(u,w)$ 也是 $T$ 的一条弧. 图 7.9 中 $T_1, T_2, T_4, T_5$ 是可迁的. 事实上, 对于任意一个正整数 $n$, 存在唯一的 $n$ 阶可迁竞赛图 (在同构意义下). 若 $T$ 是一个 $n$ 阶可迁竞赛图, $i$ 为一整数 $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, 则 $T$ 中存在一个顶点 $v_i$ 满足 $\mathrm{od}\, v_i = i$. 可迁竞赛图具有其他竞赛图所没有的如下性质.

**定理 7.6**　竞赛图 $T$ 是可迁的当且仅当 $T$ 不含圈.

**证**　[反证法, 直接证法] 设 $T$ 是一个可迁竞赛图. 假设相反, $T$ 含有圈 $C$ : $v_1, v_2, \cdots, v_k, v_1$. 由于 $(v_1, v_2)$ 和 $(v_k, v_1)$ 均为 $T$ 的弧, 则 $C$ 上存在 $v_1$ 邻接到 (指向) 的顶点, 以及 (指向)$v_1$ 邻接自的顶点. 因此, 必定存在顶点 $v_i$ $(2 \leqslant i \leqslant k-1)$, 满足 $(v_1, v_i)$ 与 $(v_{i+1}, v_1)$ 均是 $T$ 的弧. 因为 $(v_1, v_i)$ 和 $(v_i, v_{i+1})$ 是可迁竞赛图的弧, 所以 $(v_1, v_{i+1})$ 是 $T$ 的一条弧, 导出矛盾.

现在来证明充分性, 假设竞赛图 $T$ 不含圈. 设 $(u,v)$ 与 $(v,w)$ 为 $T$ 的两条弧.

由于 $T$ 不含圈, 故 $(w,u)$ 不是 $T$ 的弧, 从而 $(u,w)$ 是 $T$ 的一条弧, 因此 $T$ 是可迁的. ■

正如我们所见到的, 如果 $T$ 是 $n$ 阶可迁竞赛图, 那么 $T$ 有唯一的出度为 $n-1$ 的顶点 $u$, 当然是 $T$ 顶点的最大出度. 因此, $u$ 邻接到 $T$ 的其他所有顶点. 因而, 对于 $T$ 的任一顶点 $v$, 有 $\vec{d}(u,v) \leqslant 1$. 对于竞赛图 (可迁的, 或者不可迁的) 的任一具有最大出度的顶点, 也有基本相同的结论.

**定理 7.7** 若 $u$ 是竞赛图 $T$ 中具有最大出度的顶点, 则对于 $T$ 的任一顶点 $v$, $\vec{d}(u,v) \leqslant 2$.

**证** [反证法] 假设 $\mathrm{od}\, u = k$, 并设 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 为 $T$ 中邻接自 $u$ 的 $k$ 个顶点. 若 $T$ 没有其他顶点, 则对于 $T$ 的任一顶点 $v$, 有 $\vec{d}(u,v) \leqslant 1$.

假设 $T$ 有一些邻接到 $u$ 的顶点, 不妨设为 $w_1, w_2, \cdots, w_\ell$ (如图 7.10 所示). 由上所述, $\vec{d}(u,v_i) = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. 我们来证明: 对于每个顶点 $w_j$ $(1 \leqslant j \leqslant \ell)$, 均有 $\vec{d}(u,w_j) = 2$. 若某个顶点 $v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 邻接到 $w_j$, 则必定有 $\vec{d}(u,w_j) = 2$. 另一方面, 若并不是前面这种情形, 则 $w_j$ 邻接到 $v_1, v_2, \cdots, v_k$. 由于 $w_j$ 也邻接到 $u$, 所以 $\mathrm{od}\, w_j \geqslant k+1 > k = \mathrm{od}\, u$, 导致矛盾. ■

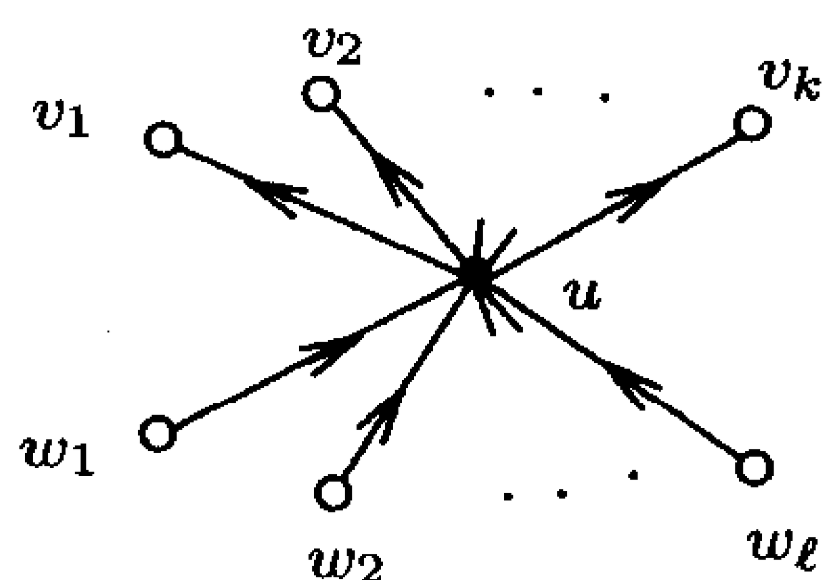



图 7.10 定理 7.7 证明中的一步

假设我们有一组队伍参与循环赛. 比赛的结果可以用竞赛图 $T$ (一个有向图) 来建立模型. 设 $T$ 中顶点的出度是这个队伍所赢的比赛场数. 设 $A$ 是赢得比赛场数最多的一支队伍. 根据定理 7.7, 如果 $B$ 是其他的任何一支队伍, 则或者 (1) $A$ 击败 $B$, 或者 (2) $B$ 击败 $A$, 但是 $A$ 击败一支 $B$ 曾负于的队伍.

像图一样, 有向图 $D$ 的路 $P$ 称为是 ($D$ 的)**Hamilton 路**, 如果 $P$ 包含了 $D$ 的所有顶点. $D$ 中的圈 $C$ 称为是**Hamilton 圈**, 如果 $C$ 包含了 $D$ 的所有顶点. 若 $D$ 含有一个 Hamilton 圈, 则 $D$ 称为是一个**Hamilton 有向图**. 我们现在叙述每个竞赛图都具有的一个性质, 该性质是由 László Rédei 最初发现的.

**定理 7.8** 每个竞赛图都含有一条Hamilton路.

**证** [反证法] 设 $P$ 是竞赛图 $T$ 中最长的一条路, 不妨设 $P: v_1, v_2, \cdots, v_k$. 如果 $P$ 包含 $T$ 的每个顶点, 则 $P$ 是一条 Hamilton 路. 假设 $P$ 不是 Hamilton 路. 因

此, $T$ 中存在不属于 $P$ 的顶点 $v$ (如图 7.11 所示). $(v,v_1)$ 与 $(v_k,v)$ 都不是 $P$ 的弧, 否则 $T$ 含有一条长度超过 $P$ 的路. 因此, $(v_1,v)$ 和 $(v,v_k)$ 是 $T$ 的弧. 这就意味着, 必然要存在一个顶点 $v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$, 满足 $v$ 邻接自 $v_i$, 并且 $v_{i+1}$ 邻接自 $v$. 然而, $P': v_1, v_2, \cdots, v_i, v, v_{i+1}, \cdots, v_k$ 就是一条长度超过 $P$ 的路, 导出矛盾. ■

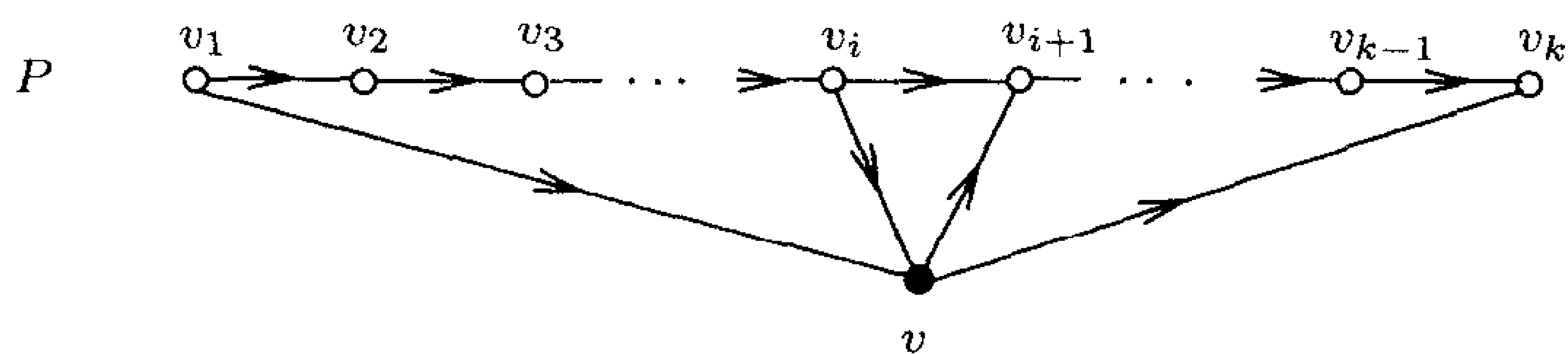



图 7.11 定理 7.8 证明中的一步

由定理 7.8 可知, 如果我们有一组队伍参与循环赛, 则这些队伍可以被排序, 不妨排为 $A_1$, $A_2$, $\cdots$, $A_n$, 使得队伍 $A_1$ 战胜 $A_2$, 队伍 $A_2$ 战胜 $A_3$, 等等. 这并不意味 $A_1$ 是最强的队伍, $A_n$ 是最弱的队伍. 例如, 在如图 7.12 所示的 3 阶强连通的竞赛图 $T$, 在这 3 支队伍之间并没有逻辑顺序. 比如, $A_1$, $A_2$, $A_3$; $A_2$, $A_3$, $A_1$ 以及 $A_3$, $A_1$, $A_2$ 都是 Hamilton 路. 实际上, 仅仅当模拟结果的有向图是可迁的时候, 这些队伍之间才有一个比较清楚的排序.

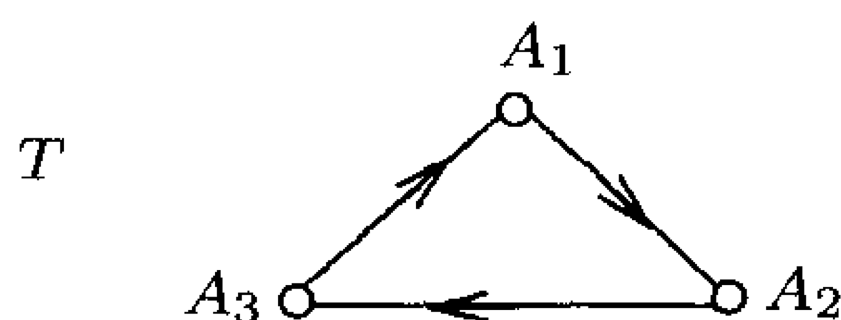



图 7.12 竞赛图中的 Hamilton 路

如果 $T$ 是一个不可迁的竞赛图, 则 $T$ 不仅含有 Hamilton 路, 根据定理 7.6, $T$ 也含有圈. 若 $T$ 是强连通的, 则还可以有更多的性质.

**定理 7.9** 非平凡强连通竞赛图的每个顶点都属于一个三角形.

**证** [直接证法] 设 $v$ 是非平凡的强连通竞赛图 $T$ 中一个顶点. 由于 $T$ 是强连通的, 所以 $\operatorname{od} v > 0$, $\operatorname{id} v > 0$. 设 $U$ 为 $v$ 所邻接到的顶点集合, $W$ 为 $v$ 所邻接自的顶点集合 (如图 7.13 所示). 因此, $U \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$. 由于 $T$ 是强连通的, 所以对于每个 $w \in W$ 都存在一条 $v-w$ 路. 对于某个 $u \in U$ 与 $w \in W$, 该路必然包含弧 $(u,w)$, 所以 $v$ 属于三角形 $v, u, w, v$. ■

每个竞赛图都含有一条 Hamilton 路, 但并不是每个竞赛图都含有 Hamilton 圈. 若竞赛图 $T$ 含有一个 Hamilton 圈

$$C: v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1,$$

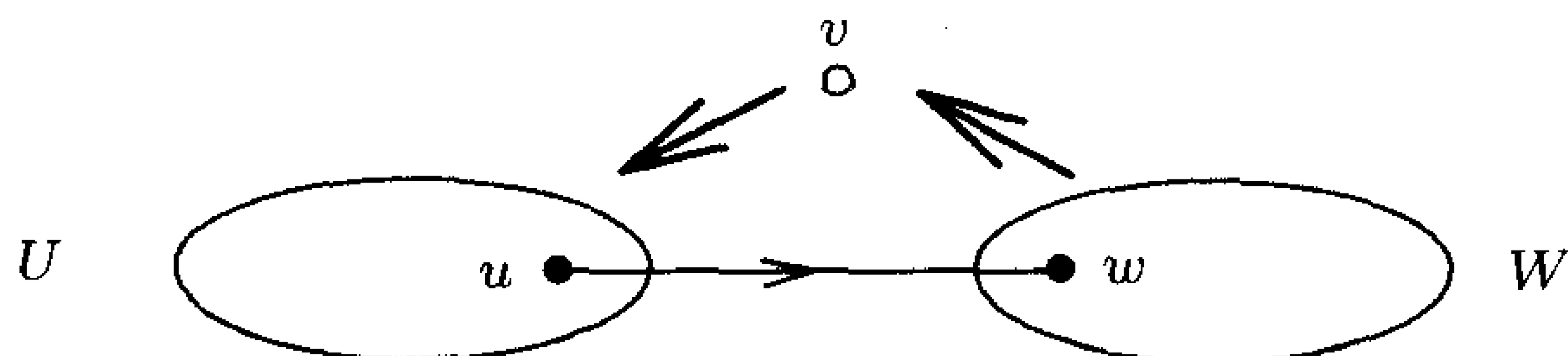



图 7.13 定理 7.9 证明中的一步

则 $T$ 必然是强连通的. 为了说明这点, 设 $u$ 和 $v$ 为 $T$ 的任意两个不同的顶点, 则 $u = v_i$, $v = v_j$, 其中 $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. 假设 $i < j$, 则 $P: u = v_i, v_{i+1}, \cdots, v_j = v$ 与 $P': v = v_j, v_{j+1}, \cdots, v_n, v_1, v_2, \cdots, v_i = u$ 分别是 $u - v$ 路与 $v - u$ 路, 因此, $T$ 是强连通的. 令人惊奇的是, 这个结论的逆也是正确的.

**定理 7.10** 非平凡竞赛图是Hamilton的当且仅当 $T$ 是强连通的.

**证** [反证法] 我们已经知道, 每个 Hamilton 竞赛图都是强连通的. 现在来证明该命题的逆. 假设 $T$ 是一个非平凡的强连通竞赛图, 因此, $T$ 含有圈. 设 $C$ 为 $T$ 中最长的圈. 若 $C$ 包含 $T$ 的所有顶点, 则 $C$ 是一个 Hamilton 圈. 假设 $C$ 不是 Hamilton 圈, 不妨设

$$C: v_1, v_2, \cdots, v_k, v_1,$$

其中 $3 \leqslant k < n$. 若 $T$ 含有一个满足如下条件的顶点 $v$: $v$ 邻接到 $C$ 的某个顶点, 同时也邻接自 $C$ 的某个顶点, 则 $C$ 上必然存在一个邻接到 $v$ 的顶点 $v_i$, 使得 $v_{i+1}$ 邻接自 $v$. 在这种情形下,

$$C': v_1, v_2, \cdots, v_i, v, v_{i+1}, \cdots, v_k, v_1$$

是一个长度大于 $C$ 的圈, 导致矛盾. 因此, $T$ 中每个不属于 $C$ 的顶点或者邻接到 $C$ 的每个顶点, 或者邻接自 $C$ 的每个顶点. 由于 $T$ 是强连通的, 每种类型的顶点必然都存在.

设 $U$ 是由 $T$ 中满足如下条件的所有顶点构成, 这些顶点不属于 $C$, 并使得 $C$ 的每个顶点都邻接到 $U$ 的每个顶点. 设 $W$ 是由 $T$ 中满足如下条件的那些顶点构成, 这些顶点不属于 $C$, 并使得 $W$ 的每个顶点都邻接自 $C$ 的每个顶点 (如图 7.14 所示). 则 $U \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$.

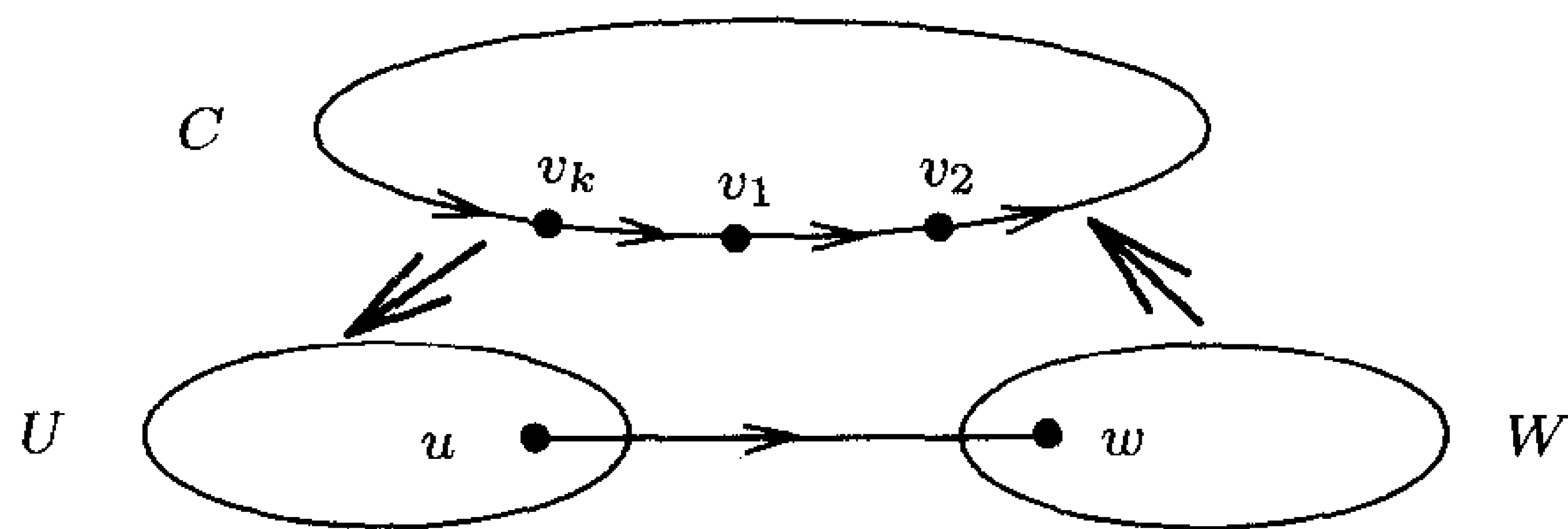



图 7.14 定理 7.10 证明中的一步

由于 $T$ 是强连通的, 则 $C$ 的每个顶点到 $W$ 的每个顶点之间都存在一条路. 因为 $C$ 中没有顶点邻接到 $W$ 的任何一个顶点, 则必然存在顶点 $u \in U$ 邻接到顶点 $w \in W$. 然而,

$$C'' : v_1, v_2, \cdots, v_k, u, w, v_1$$

是一个长度大于 $C$ 的圈, 导出矛盾. ■

定理 7.10 要归功于 Paul Camion. Rédei 与 Camion 的结论是竞赛图可迁性方面的基础定理. 4 阶强连通的竞赛图 $T$ 只有一个. 由于强连通图的每个顶点都属于一个三角形, 则 $T$ 中存在顶点 $v$, 使得 $T-v$ 也是强连通的. 该命题对于每个阶大于 4 的强连通竞赛图来说, 也是正确的. 下面这个结论的证明与前面结论的证明方式相同.

**定理 7.11** *若 $T$ 是一个阶为 $n \geqslant 4$ 的强连通的竞赛图, 则 $T$ 中存在顶点 $v$, 使得 $T-v$ 是强连通竞赛图.*

**证** [反证法] 由于该结论对于 $n = 4$ 的情形是成立的, 所以我们可以假设 $n \geqslant 5$. 假设定理不成立, 则存在一个阶为 $n \geqslant 5$ 的强连通图, 使得对于 $T$ 的每个顶点 $v$, 竞赛图 $T-v$ 都不是强连通的. 根据定理 7.10, 可以得到 $T$ 不含长度为 $n-1$ 的圈. 设 $C$ 为 $T$ 中最长的非 Hamilton 圈. 假设

$$C : v_1, v_2, \cdots, v_k, v_1,$$

其中 $3 \leqslant k \leqslant n-2$. 若存在一个不属于 $C$ 的顶点 $x$, 且使得 $x$ 邻接到 $C$ 的一些顶点, 也邻接自 $C$ 的一些顶点, 则 $C$ 上存在某个顶点 $v_i$, 使得 $(v_i, x)$ 与 $(x, v_{i+1})$ 均为 $T$ 的弧. 然而

$$C' : v_1, v_2, \cdots, v_i, x, v_{i+1}, \cdots, v_k, v_1$$

是一个长度为 $k+1$ 的圈, 导出矛盾.

这意味着 $T$ 中每个不属于 $C$ 的顶点或者邻接到 $C$ 的所有顶点, 或者邻接自 $C$ 的所有顶点. 设 $U$ 是由 $T$ 中满足如下条件的所有顶点构成, 这些顶点不属于 $C$, 并邻接自 $C$ 的所有顶点. 设 $W$ 是由 $T$ 中满足如下条件的那些顶点构成, 这些顶点不属于 $C$, 并邻接到 $C$ 的所有顶点. 则 $U \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$ (如图 7.15 所示).

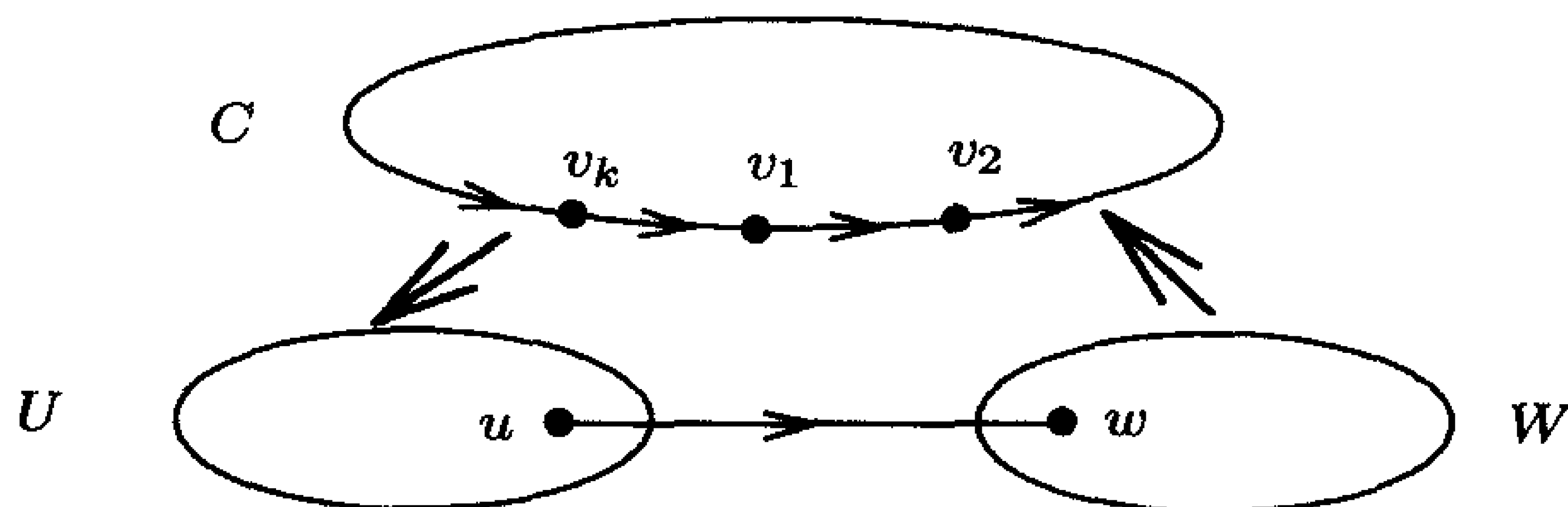



图 7.15 定理 7.11 证明中的一步

由于 $T$ 是强连通的, 所以存在顶点 $u \in U$ 与 $w \in W$, 使得 $(u, w)$ 是 $T$ 的一条弧. 然而,

$$C'': v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}, u, w, v_1$$

是一个长度为 $k+1$ 的圈, 导出矛盾. ∎

作为定理 7.11 的一个推论, 容易发现: 对于任一整数 $k$ $(3 \leqslant k \leqslant n)$, 每个阶为 $n \geqslant 3$ 的强连通竞赛图都含有一个阶为 $k$ 的诱导强连通竞赛图.

**习题**

7.7 证明: 仅有一个阶为 $n$ $(3 \leqslant n \leqslant 5)$ 的竞赛图 $T$, 使得对于 $T$ 的每条弧 $(u, v)$, $T$ 与 $T-(u, v)+(v, u)$ 是强连通的.

7.8 如果某个 $n$ 阶竞赛图的每个顶点都具有相同的出度 $x$, 则 $x$ 为多少?

7.9 证明: 竞赛图 $T$ 是可迁的当且仅当 $T$ 的每两个顶点都具有不同的出度.

7.10 证明: 若 $u$ 和 $v$ 为竞赛图的顶点, 且 $\vec{d}(u, v)=k$, 则 $\operatorname{id} u \geqslant k-1$.

7.11 设 $T$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 的竞赛图, 其中 $V(T)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 证明: 若对于 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, 都有 $\operatorname{od} v_i > \operatorname{id} v_i$, 则 $T$ 不是强连通的.

7.12 证明或反驳:

(a) 若竞赛图 $T$ 的每个顶点都属于 $T$ 的一个圈, 则 $T$ 是强连通的.

(b) 对于强连通竞赛图 $T$ 的每对顶点 $u, v$, 存在一条 Hamilton 路 $u-v$ 或者 Hamilton 路 $v-u$.

(c) 若 $(u, v)$ 是强连通竞赛图 $T$ 的一条弧, 则 $(u, v)$ 属于 $T$ 的一个 Hamilton 圈.

7.13 设 $u$ 和 $v$ 是竞赛图中两个不同的顶点, 且 $\vec{d}(u, v)$ 与 $\vec{d}(v, u)$ 有定义. 证明: $\vec{d}(u, v) \neq \vec{d}(v, u)$.

7.14 (a) 证明: 若有奇数支队伍参与了循环赛, 则有可能任何两支队伍都打成平局, 进而全部都获得第一名.

(b) 证明: 若有偶数支队伍参与了循环赛, 则不可能所有队伍全都打成平局, 进而都获得第一名.

7.15 证明: 若 $T$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 的强连通竞赛图, 则对于任一整数 $k$( $3 \leqslant k \leqslant n$), $T$ 都含有一个长度为 $k$ 的圈.

## 7.3 延伸阅读: 决策

在 2000 年美国总统选举期间, George W. Bush 险胜 Al Gore. 虽然 Gore 获得的普选票比 Bush 高得多, 但获胜者却是 Bush, 因为他获得的选举人票数高于 Gore.

在某些具有代表性的年份中, 许多情形的决策是通过投票来确定的. 不论是选举总统、首相、参议员、地方长官、市长, 还是学生委员会的代表, 都必须通过决策来确定哪些人来担任这些职务. 此外, 必须制定相应程序以确定如何决策. 这个问

题看起来很简单，通过选举就可以了. 其实，事情并非其表面看起来那么简单. 如果某个职位有几个候选人，那么就有许多方式确定谁是获胜者. 二选一的选举应该会很容易，一般来说事实也是如此 (甚至对于 2 个以上的总统候选人的选举)，除去前面所提的 2000 年美国总统选举作为一个例外. 当然，在众多选择中作出决策并不仅限于政府或者大学的选举.

**例 7.12** Al和他的妻子Barbara以及他们的三个孩子Cassie, Donna, Edwin为买哪一种汽车进行过讨论，并统一了意见，即他们将在通用(GM)、本田(H)、克莱斯勒(C)、丰田(T)以及福特(F)这些品牌中选择一个. Al和Barbara认为这是一个家庭决策，每个家庭成员都有同等的决策权利.

事实上，Al 的选择偏好恰好与上述汽车的列表次序是一致的. 换句话说，他喜欢通用比喜欢本田多一点，喜欢本田比喜欢克莱斯勒多一点，等等. Al 的选择以图 7.16 的竞赛图给出. 例如，从 C 到 F 的有向边说明 Al 喜欢克莱斯勒比喜欢福特多一点. 图 7.16 的竞赛图称为是表示 Al 选择偏好的**互比竞赛图 (tournament of paired comparisons)**，它反映了 Al 在每两个汽车之间的选择偏好.

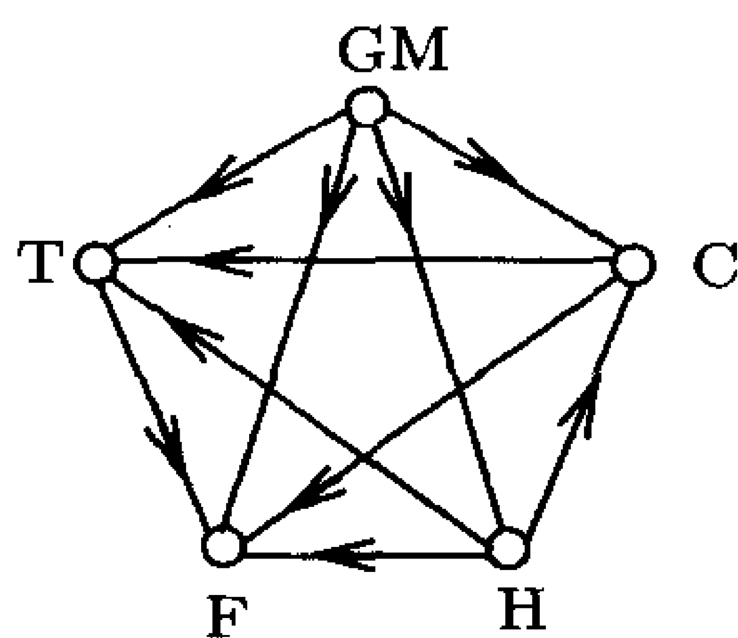



图 7.16 Al 的互比竞赛图

图 7.17 给出了家庭中所有成员的互比竞赛图. 正如所料，这些竞赛图都是可迁的. 例如，由于 Barbara 喜欢本田比喜欢福特多一些，喜欢福特比喜欢丰田多一些，我们可以认为她喜欢本田比喜欢丰田多一些，事实上，她的偏好确实如此. 为了做出买哪一种汽车的决定，图 7.18 给出了整个家庭的单个互比竞赛图. 例如，三个孩子都喜欢福特比喜欢通用多些，父母喜欢通用比喜欢福特多些. 由于家庭中大多数成员喜欢福特比喜欢通用多些，所以比起通用来，该家庭就更喜欢福特，因此，从 F 到 GM 存在一条弧. 该竞赛图中的其他所有弧都通过这种方式获得的. 现在，我们就有了全部的信息，问题是：应该买哪一个品牌的汽车呢? 这个问题看起来不容易回答. 至少，它没有一个明显的答案. 问题的关键在于，尽管图 7.17 中每个竞赛图都是可迁的，但是通过这 5 个竞赛图所构造的 (图 7.18 中的) 竞赛图却并不是可迁的. ◇

我们再来看一个例子.

**例 7.13** 假设某所大学正在选举学生会主席，这一年有三个候选人参选，他们

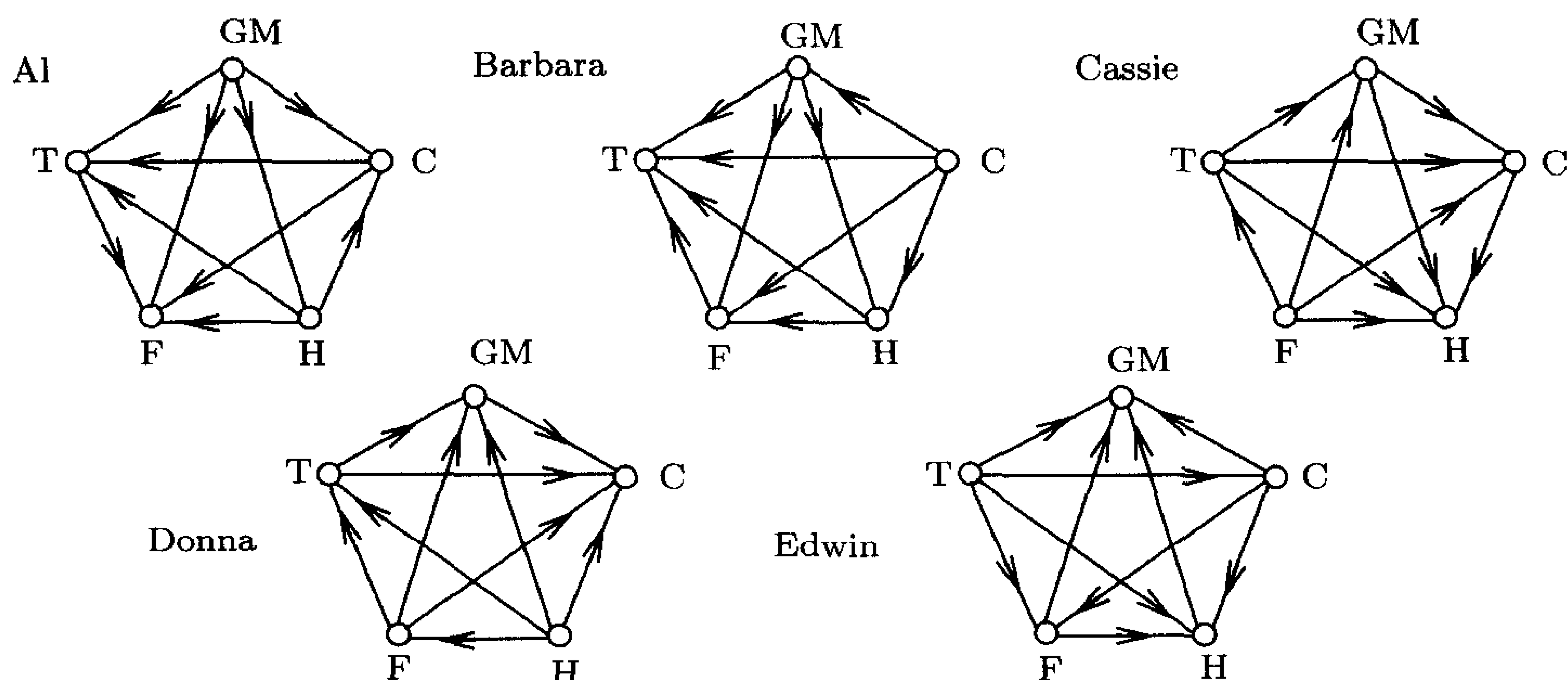



图 7.17 5 位家庭成员的互比竞赛图

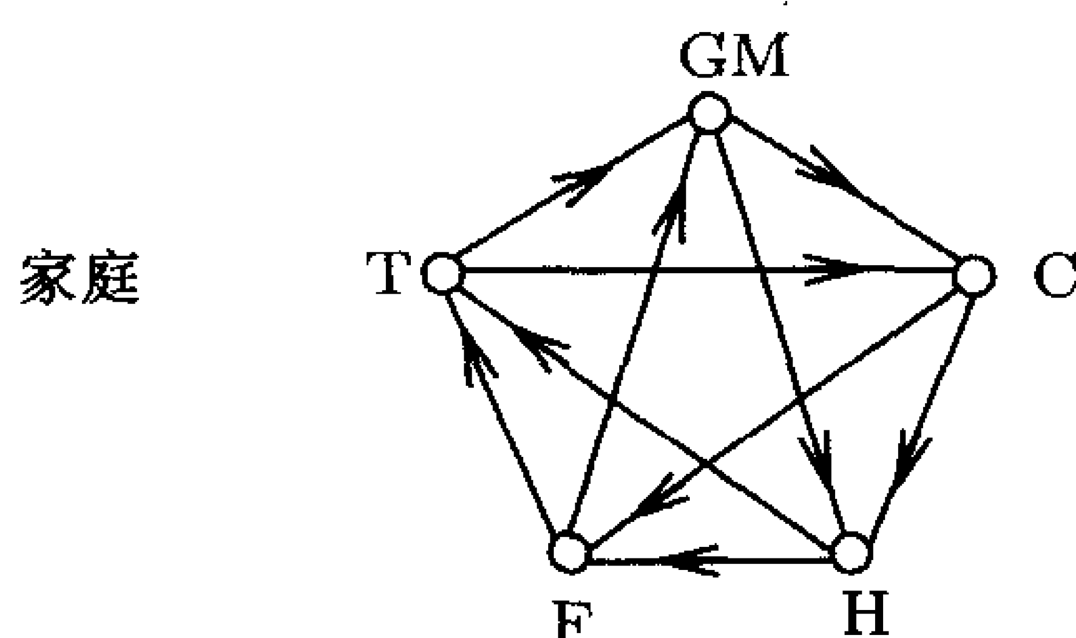



图 7.18 家庭的单个互比竞赛图

是Atkins, Bennett, Chapman.

为了让所有学生都参与选举, 要求每个学生都要投票, 即在下面列表中选择一个.

| ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
|---|---|---|---|---|---|
| Atkins | Atkins | Bennett | Bennett | Chapman | Chapman |
| Bennett | Chapman | Chapman | Atkins | Bennett | Atkins |
| Chapman | Bennett | Atkins | Chapman | Atkins | Bennett |

例如, 考虑列表的第三列, 它意味着首选人是 Bennett (B), 其次是 Chapman (C), 最后是 Atkins (A). 不妨设投票已进行过了, 下面是投票的结果:

| 100 | 500 | 75 | 425 | 50 | 350 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | A | B | B | C | C |
| B | C | A | C | A | B |
| C | B | C | A | B | A |

我们根据这些信息能做些什么呢? 首先构造一个竞赛图 $T$, 以表达这些候选人被选择的优先情况. $T$ 的顶点集为 $V(T) = \{A, B, C\}$. 我们首先考虑 A 与 B. 由于 $100 + 500 + 50 = 650$ 个学生选择 A 的优先性大于 B, $75 + 425 + 350 = 850$ 个学生选择 B 的优先性大于 A, 所以我们可以清楚地看到 B 的优先性大于 A, 因此, 在 $T$

中画条有向边 (B, A). 类似地, 由于 825 人选择 C 的优先性大于 A, 675 人选择 A 的优先性大于 C, 所以 (C, A) 为 $T$ 中一条有向边; 由于 900 人选择 C 的优先性大于 B, 600 人选择 B 的优先性大于 C, 所以 (C, B) 为 $T$ 中一条有向边. 图 7.19 列出了这个竞赛图.

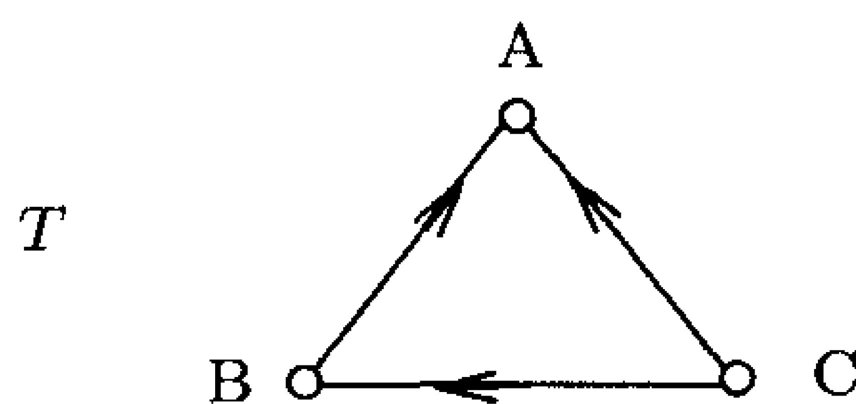



图 7.19　大学选举的互比竞赛图

观察图 7.19 中竞赛图 $T$, 我们可以看到, 不仅 Chapman 优先于其他两个候选人, 而且 Bennett 与 Chapman 都优先于 Atkins. 另外, 反映这种优先性的选票数是比较突出的. 因此, 决策也很清楚. 但你经常见到这种方式的选举决策吗? 一般情形下, 仅仅计数候选人作为首选人的选票来确定谁是获胜者. 若上述选举采用这种方式, 则选举的结果为

A　600 票　　　B　500 票　　　C　400 票

因此, 获胜者是 Atkins. 另一方面, 经常通过预选来选择两位得票最高的候选人进入普选. 例如, 在上述的选举中, Chapman 得票最少, 他会因淘汰而不能进入下一轮普选. 也就是说, 在普选中, 将是 Atkins 与 Bennett 相互竞争. 但我们已经发现, 在这两个候选人中, Bennett 将会比 Atkins 赢得更多的选票, 因而可以很轻松地取胜. 因此, 通过这两种最常见的方法来决定一个选举结果, 获胜的候选人都不是最优的候选人. ◇

## 习题

7.16　下面所示的是由 98 名投票者为三位候选人投票的选举.

| 选举人数目 | 第一选择 | 第二选择 | 第三选择 |
|---|---|---|---|
| 18 | A | B | C |
| 17 | A | C | B |
| 13 | B | A | C |
| 16 | B | C | A |
| 16 | C | A | B |
| 18 | C | B | A |

(a) 若作为首选的某个候选人得票最多, 则该候选人为获胜者, 问该选举中哪一个候选人获胜?

(b) 画出互比竞赛图, 并说明你是如何画这三条弧的. 根据这个竞赛图来判断谁是获胜者?

7.17 今年有 4 个候选人来竞选某个地方大学的学生会主席, 他们是 Archer (A), Benson (B), Chase (C), Dawkins (D). 每个学生都要给 4 个候选人按照优先性排序, 然后在 24(4!) 个序列中选择一个. 总共有 408 个学生参选, 结果如下:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 11 | 28 | 10 | 27 | 26 | 11 | 10 | 25 | 9 | 24 | 29 |
| A | A | A | A | A | A | B | B | B | B | B | B |
| B | B | C | C | D | D | A | A | C | C | D | D |
| C | D | B | D | B | C | C | D | A | D | A | C |
| D | C | D | B | C | B | D | C | D | A | C | A |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 22 | 12 | 21 | 20 | 11 | 8 | 21 | 7 | 20 | 25 |
| C | C | C | C | C | C | D | D | D | D | D | D |
| A | A | B | B | D | D | A | A | B | B | C | C |
| B | D | A | D | A | B | B | C | A | C | A | B |
| D | B | D | A | B | A | C | B | C | A | B | A |

问: 谁赢得了选举?

(a) 仅通过计算作为首选的候选人得票数, 确定谁是获胜者.

(b) 通过淘汰 (a) 中 (作为首选的) 得票最少的那个候选人, 然后再重新计数余下三位候选人的得票, 确定谁是获胜者?

(c) 通过淘汰 (a) 中 (作为首选的) 得票最少的两个候选人, 然后再重新计数余下两位候选人的得票, 确定谁是获胜者?

(d) 通过构造关于 4 个候选人的互比竞赛图, 确定谁是获胜者?

(e) 谁应该 赢得选举?

7.18 回到例 7.12 中, 该例讨论一个家庭决定购买 (5 种品牌中) 哪一种汽车. Edwin 有另外一种决策的想法. 从本田 (H) 和福特 (F) 开始, 判断哪一种是家庭首选的汽车. 然后再用同样的方式来考虑丰田 (T) 和通用 (GM) 汽车. 接下来比较克莱斯勒 (C) 与前面在 H 和 F 之间所选择的汽车, 所选得汽车再与 T 和 GM 之间所选择的汽车进行比较. 通过这种方式可以判断出该家庭倾向于选择哪种汽车? 这是一个好方法吗?

## 7.4 专题探索: 酒瓶问题

在一些游戏与难题中, 成功是通过一系列步骤来获得的. 也就是说, 在游戏进行过程中或者在试图求解难题中, 他可能发现自己处于多个状态中的一种状态, 通过一个 (允许的) 步骤从该状态转移到另外状态. 该情形也可以用图来建立模型, 其中图的顶点是这些状态, 如果能够通过一个步骤从状态 A 转移到 B, 则状态 A 和 B 是邻接的; 当然我们在此假设从 A 转移到 B 是可逆的 (即通过一个逆步骤). 另一方面, 如果存在状态 A 和 B, 使得 A 可以通过一个步骤转移到 B, 而 B 却不能通过一个步骤转移到 A, 那么这种情形更适合用有向图 (而不是图) 来建立模型. 下面来看一类能够用有向图来建立模型的问题.

**例 7.14** 3 个酒瓶 $A, B, C$ 分别具有 1, 3, 4 升的容量. 这些瓶子是没有标出刻度的, 也就是说, 瓶子上面没有记号. 因此, 在观察一个瓶子的时候, 不可能确切地知道它里面有多少酒, 除非是满的或者空的. 最大的瓶子装满了酒, 并且其他瓶子是空的. 用**倾倒 (pouring)**这个词来表示把瓶子 $X$ 所装的酒倒入瓶子 $Y$ 中, 直到 $Y$ 被装满或者 $X$ 中的酒被倒光. 我们希望通过不断地把一个瓶子中的酒倒入另一个瓶子, 把酒分成相等的两份. 问题即为：我们能够在最大号的瓶子与中号的瓶子中分别装上 2 升酒吗? 如果能做到的话, 那么完成这个目标所需倾倒的最少可能次数是多少?

在任何时候, 假设瓶子 A 中的酒量为 $a$ 升, B 中的酒量为 $b$ 升, C 中的酒量为 $c$ 升. 因此, $a+b+c=4$, 最初有 $a=b=0$. 事实上, 只要知道 $a$ 和 $b$ 的值就能搞清 3 个瓶子中分别有多少酒了. 为了有助于解答这个问题, 我们构造一个有向图 $D$, 满足

$$V(D)=\{(a,b):\ a\in\{0,1\}, b\in\{0,1,2,3\}\},$$

其中 $(a_1,b_1)$ 邻接到 $(a_2,b_2)$, 如果通过一次倾倒就能够从 $(a_1,b_1)$ 变成 $(a_2,b_2)$. 因此, 该问题的答案就是在 $D$ 中从顶点 $(0,0)$ 到 $(0,2)$ 的距离. 有向图 $D$ 如图 7.20 所示.

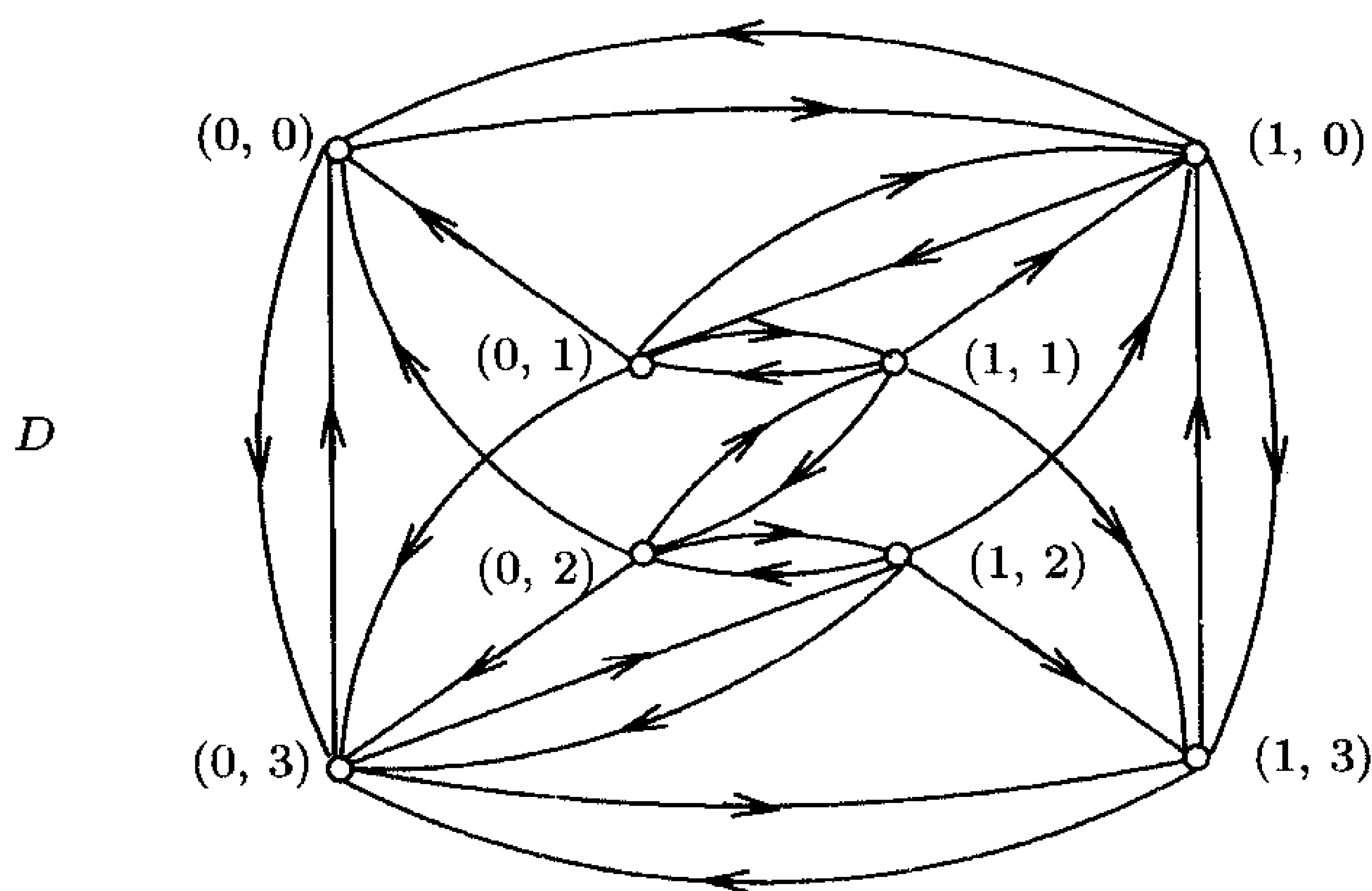



图 7.20 例 7.14 中的有向图

观察可知：有些步骤是可逆的, 而有些步骤却不可逆. 例如, 存在一条从 $(0,1)$ 到 $(0,0)$ 的弧, 但没有从 $(0,0)$ 到 $(0,1)$ 的弧. 换句话说, 如果 $A$ 是空的, $B$ 有 1 升的酒, 那么可以把 $B$ 的酒倒入到 $C$; 如果 $C$ 有 4 升的酒, 那么就不可能恰好把 1 升的酒倒入到 $B$. 考虑图 7.20 所示的有向图 $D$, 可以发现从 $(0,0)$ 到 $(0,2)$ 的距离为 3, 路 $(0,0),(0,3),(1,2),(0,2)$ 是一条测地线. 因而, 从装满酒的瓶子 $C$ 开始, 通过 3 次 (但不可能更少次) 倾倒是能够把酒分成相等的两份. 注意到还有从 $(0,0)$ 到 $(0,2)$

的更长路.

## 习题

7.19 3 个酒瓶 $A, B, C$ 分别有 3, 5, 8 升的容量. 最少需要通过几次倾倒就能够得到

(a) 两个瓶子分别装有 4 升的酒?

(b) 两个瓶子之中, 一个装有 2 升的酒, 另一个装有 6 升的酒?

(c) 两个瓶子之中, 一个装有 1 升的酒, 另一个装有 7 升的酒?

7.20 自己选择 3 个不同容量的酒瓶, 仿照习题 7.19 构造一个问题.

# 第 8 章　匹配与分解

## 8.1　匹　　配

某大学数学系要把 12 本不同的数学书奖励给数学竞赛上获得好成绩的学生;每一位成功的学生一本书. 当然, 如果有资格拿到书的学生数超过 12, 分配将出现问题. 不难发现, 若仅有 10 名学生有资格拿到书, 分配将十分容易. 然而, 对于这种情形, 可能存在另外一个问题. 某些学生可能已经有了某些书的复印本, 他们并不需要这些书. 问题转化为：是否存在一种分配方案, 从 12 本书中选出 10 本分配给学生, 使得每名学生拿到他们想要的一本书. 尽管书的本数多于学生数, 但这个问题可能是无解的. 例如, 可能有 3 本或 3 本以上的书, 学生都不想要. 可能有 4 名学生, 仅仅对同一本书感兴趣, 在此情形下, 不可能给这 4 名学生分发 4 本相同的书.

我们或许已经很清楚, 可以为这个问题建立一个图模型 $G$, 其顶点为学生 (记为 $S_1, S_2, \cdots, S_{10}$) 和书 (记为 $B_1, B_2, \cdots, B_{12}$). $G$ 中两个顶点是邻接的, 若这两个顶点中一个为学生, 另一个为该学生想要的书. 显然, $G$ 是一个二部图, 其部集为 $U = \{S_1, S_2, \cdots, S_{10}\}$ 和 $W = \{B_1, B_2, \cdots, B_{12}\}$. 例如：学生 $S_1$ 想要书 $B_2, B_3, B_5, B_7$ 中的任一本, 则 $G$ 包含如图 8.1 所示的子图. 我们所要寻找的是 $G$ 中 10 条边构成的集合 $A$ (图 8.1 仅仅画出部分), 其中 $A$ 中任意两条边是不邻接的. 如果集合 $A$ 存在, 则每个顶点 $S_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 10)$ 恰好与 $A$ 中的一条边关联.

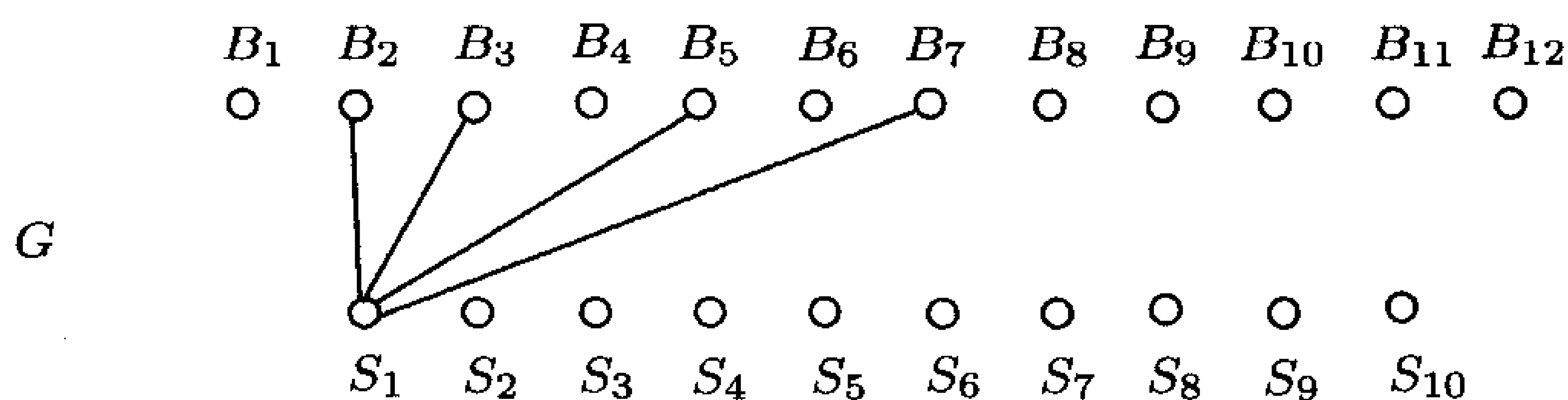



图 8.1　二部图的一个子图

这里有一个相关的数学问题. 设 $U$ 和 $W$ 是两个集合, 其中 $|U| = 10$, $|W| = 12$. 是否存在一一映射 $f: U \to W$? 如果仅回答这个问题, 答案是肯定的. 然而, 若 $U$ 中每个元素的像不能是 $W$ 中的任意元素, 即 $U$ 中每个元素的像都必须属于 $W$ 的某个指定子集, 答案又将怎样呢? 我们将要回答, 如果已知 $U$ 中元素可能的像集合, 是否存在满足这些条件的一一映射 $f: U \to W$?

前面的讨论导出了一些新概念. 图中边的集合称为是**独立的** (**independent**), 若该集合中任意两条边不邻接. 图 $G$ 中边的一个独立集称为是 $G$ 的一个**匹配** (**matching**). 不难发现, 前面讨论的问题就是一个给定的图是否存在一个特定的匹配. 由于这类问题大多数都涉及到二部图 (我们在前面讨论的问题也是如此), 因此, 我们首先对二部图考虑这些概念.

设 $G$ 为二部图, 部集为 $U$ 和 $W$, 其中 $r = |U| \leqslant |W|$. $G$ 的一个匹配是一个边的集合 $M = \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$, 其中 $e_i = u_iw_i (1 \leqslant i \leqslant k)$, 使得 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 是 $U$ 中 $k$ 个不同的顶点, $w_1, w_2, \cdots, w_k$ 是 $W$ 中 $k$ 个不同的顶点. 我们称 $M$ 将集合 $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$**匹配** (**match**)到集合 $\{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$. 显然, 对于任意由 $k$ 条边构成的匹配, 必有 $k \leqslant r$. 术语 "匹配" 顾名思义, 即是 $M$ 中的边将 $U$ 中 $k$ 个元素匹配 (或配对) 到 $W$ 中 $k$ 个元素. 因此, 前面所感兴趣的那个问题可以表述为: $G$ 是否包含一个基数为 $r$ 的匹配. 在进一步讨论这个问题之前, 我们先来看下面两个例子:

**例 8.1** 由于在考试中获得好成绩, 6名学生Ashley (A), Bruce (B), Charles(C), Duane (D), Elke (E), Faith (F)将获得下列科目中的一本书作为奖励, 它们分别是: 代数学 ($a$)、微积分 ($c$)、微分方程 ($d$)、几何学 ($g$)、数学史 ($h$)、规划学 ($p$) 和拓扑学 ($t$). 每门科目仅有一本书. 每名学生对这些书的喜好不同, 如下所示:

A: d, h, t; B: g, p, t; C:a, g, h; D:h, p, t; E:a, c, d; F:c, d, p.

每名学生是否可以得到他喜欢的书?

**解** 建立一个如图 8.2(a) 所示的二部图模型 $G$, 其部集为 $U = \{\mathrm{A, B, C, D, E, F}\}$ 和 $W = \{a, c, d, g, h, p, t\}$. 问题转化为: $G$ 是否包含由 6 条边构成的匹配. 如图 8.2(b) 所示, 这样的匹配是存在的. 我们即可知道怎样将这 7 本书中的 6 本分发给 6 名学生. ◇

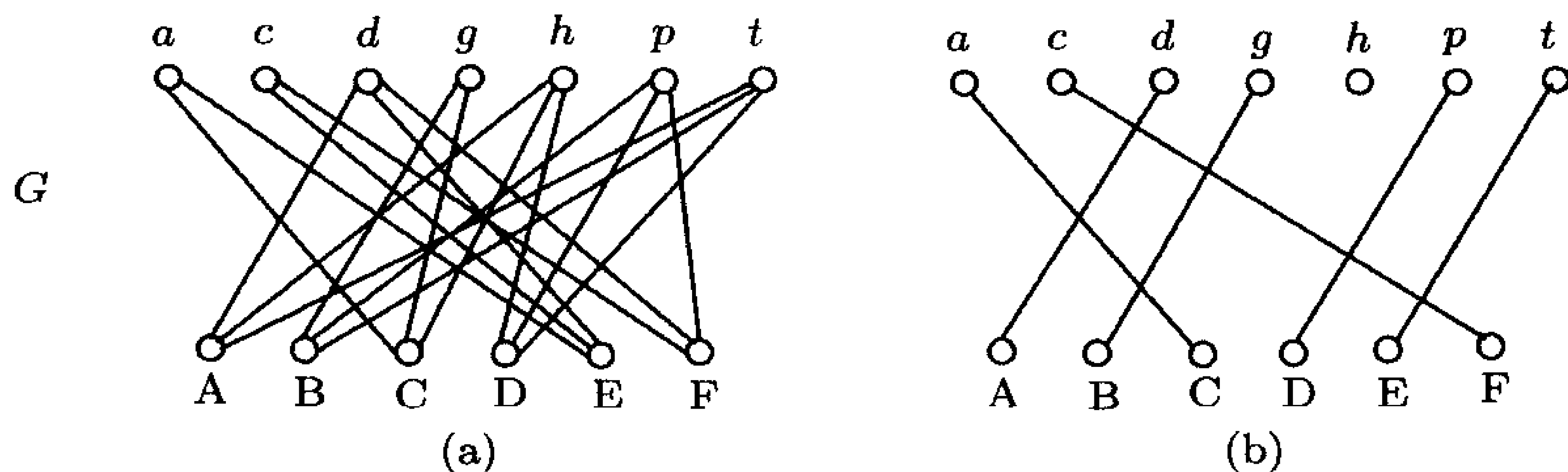



图 8.2 二部图的一个匹配

**例 8.2** 7名高年级大学生Ben (B), Don (D), Felix (F), June(J), Kim(K), Lyle(L), Maria(M)在毕业后寻找工作. 大学就业办公室提供的公开职位有会计师 ($a$)、咨询师 ($c$)、编辑 ($e$)、程序员 ($p$)、记者 ($r$)、秘书 ($s$) 和教师 ($t$). 每名学生申请的职位如下所示:

B: c, e; D:a, c, p, s, t; F:c, r; J:c, e, r;
K:a, e, p, s; L:e, r; M:p, r, s, t.

*每名学生是否都能得到他（她）所申请的职位?*

**解** 建立一个如图 8.3 所示的二部图模型 $G$, 其中一个部集 $U = \{B, D, F, J, K, L, M\}$ 为学生集合, 另外一个部集 $W = \{a, c, e, p, r, s, t\}$ 为职位集合. 若 $u$ 申请了职位 $w$, 则顶点 $u \in U$ 邻接于顶点 $w \in W$.

本题的回答是*不可能*. 由于 Ben, Felix, June, 和 Lyle 仅仅申请了咨询师、编辑和记者这三个职位中的全部或部分. 因此在这四名学生中并不是所有人都能得到他(她) 所申请的职位. 故, 并不是所有七名学生都能得到他 (她) 申请的职位. 通过对图 8.3 中二部图 $G$ 进行观察, 我们发现 $G$ 不含由七条边构成的匹配. 我们所给的解释是: 存在 $U$ 的含四个顶点的子集 $X = \{B, F, J, L\}$, 而 $X$ 中顶点的邻点属于三个顶点的集合 $\{c, e, r\}$. 正如我们将要看到的, 这正是该图 $G$(或者任一个具有部集 $U$ 和 $W$ 的二部图, 其中 $r = |U| \leqslant |W|$) 不包含由 $r$ 条边构成的匹配的关键原因. ◇

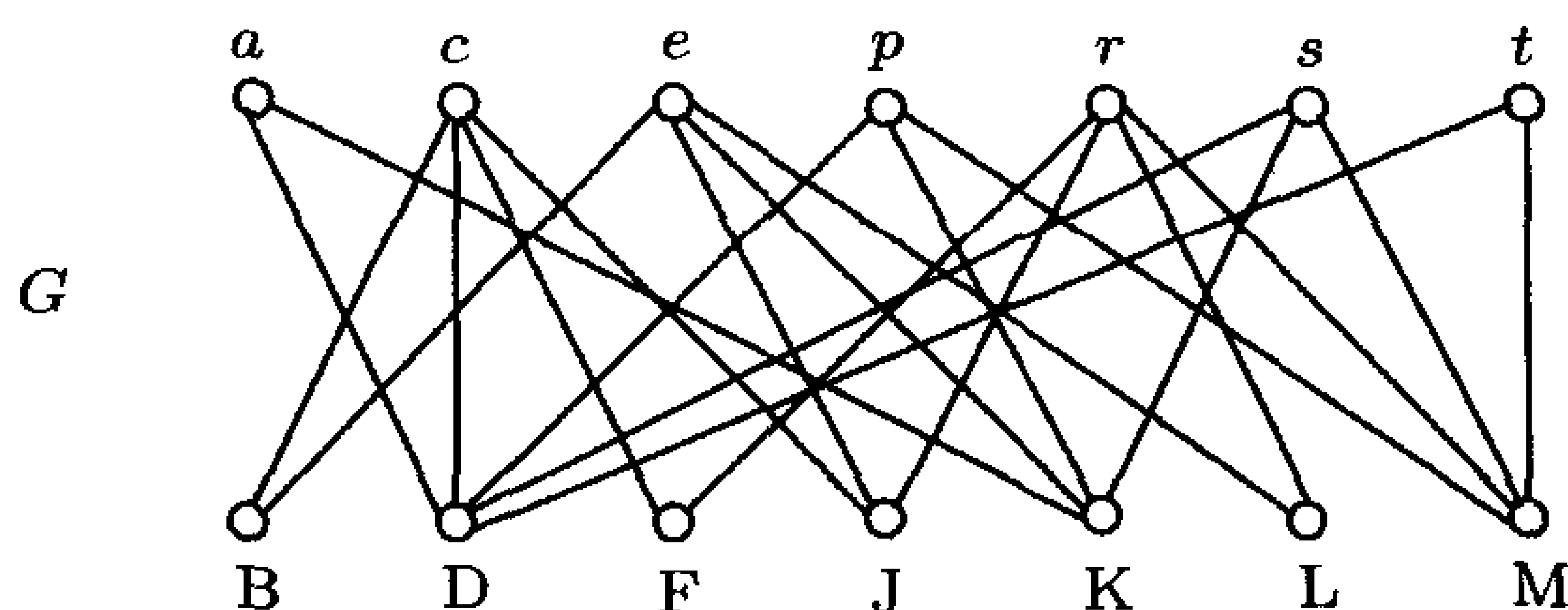



图 8.3 例 8.2 中问题的图模型

设 $G$ 为二部图, 其部集为 $U$ 和 $W$, 且 $|U| \leqslant |W|$. 对于 $U$ 的非空子集 $X$, $X$ 的**邻域 (neighborhood)**$N(X)$ 是指 $X$ 中所有顶点邻域的并. 等价地, $N(X)$ 是由 $W$ 中如下顶点构成, 这些顶点是 $X$ 中一个或多个顶点的邻点. 部集 $U$ 称为是**友好的 (neighborly)**, 若对于 $U$ 的任意非空子集 $X$, 均有 $|N(X)| \geqslant |X|$. 对于例 8.2 中二部图 $G$ 的部集 $U = \{B, D, F, J, K, L, M\}$, 由于 $U$ 的子集 $X = \{B, F, J, L\}$ 满足 $|N(X)| < |X|$, 故 $U$ 不是友好的. 不难发现, 例 8.1 中二部图 $G$ 的部集 $U = \{A, B, C, D, E, F\}$ 是友好的.

**定理 8.3** *设 $G$ 为二部图, 其部集为 $U$ 和 $W$, 且 $r = |U| \leqslant |W|$. 则 $G$ 包含一个基数为 $r$ 的匹配当且仅当 $U$ 是友好的.*

**证** [直接证法, 反证法] 首先, 设 $G$ 包含基数为 $r$ 的匹配 $M^*$. 对于 $U$ 的任一非空子集 $X$, 则存在 $M^*$ 的子集 $M'$, 使得 $|M'| = |X|$ 且 $M'$ 中的每条边恰好与 $X$ 中的一个顶点关联, 故 $|N(X)| \geqslant |X|$, $U$ 是友好的.

下面, 我们验证充分性. 假设存在满足下面条件的部集为 $U$ 和 $W$ 的二部图 $G$, 其中 $r = |U| \leqslant |W|$, 使得 $U$ 是友好的但 $G$ 不包含基数为 $r$ 的匹配. 设 $M$ 为具有最

多边数的匹配, 显然 $|M| < r$. 因此, 存在顶点 $u \in U$, 使得 $u$ 不与 $M$ 中任一条边关联. 在 $G$ 中, 一条由属于 $M$ 的边和不属于 $M$ 的边交错构成的路称为是 $G$ 的交错路. 设 $S$ 为 $G$ 中所有满足下面条件的顶点构成的集合, 其中这些顶点均可通过一条交错路连接到 $u$. 不难发现, $u$ 的闭邻域 $N[u]$ 中任一顶点均属于 $S$.

我们断言: $S - \{u\}$ 中的任一顶点均与 $M$ 中的一条边关联. 假设断言不成立, 则存在顶点 $x \in S - \{u\}$, 它不与 $M$ 中任一条边关联. 由于 $G$ 包含一条交错的 $x - u$ 路 $P$, 则 $P$ 的长度为奇数, 故 $x \in W$. 此时, $P$ 中不属于 $M$ 的边 (可能只有一条) 多于属于 $M$ 的边. 在匹配 $M$ 中, 我们把 $M$ 中位于 $P$ 上的边替换为 $P$ 的其余的边, 可得到一个比 $M$ 有更多边的新匹配, 导致矛盾. 因而, 根据断言, $S - \{u\}$ 中的任一顶点均与 $M$ 中的一条边关联. 故 $u$ 是 $S$ 中唯一不与 $M$ 中任一条边关联的顶点.

设 $U'$ 为 $S$ 中属于 $U$ 的顶点构成的集合, $W'$ 为 $S$ 中属于 $W$ 的顶点构成的集合, 即 $U' = U \cap S$, $W' = W \cap S$. 由于 $U$ 是友好的, 则 $|N(U')| \geqslant |U'|$. 此外,$S - \{u\}$ 中任一顶点都恰如与 $M$ 中的一条边关联, 故存在 $M$ 的一个子集 $M'$, 使得 $U' - \{u\}$ 匹配到 $W'$. 因而 $|W'| = |U'| - 1$, $W' \subseteq N(U')$.

因为 $U'$ 中任一顶点均可通过一条交错路连通到 $u$, 所以, 若 $w \in N(U')$, 则 $G$ 也包含一条交错的 $u - w$ 路. 故 $N(U') \subseteq W'$. 由此, 我们得到 $N(U') = W'$, 且

$$|N(U')| = |W'| = |U'| - 1 < |U'|,$$

这与 $|N(U')| \geqslant |U'|$ 相矛盾. ■

定理 8.3 归功于著名的代数学家 Philip Hall. Hall 于 1904 年 4 月 11 日出生于英国伦敦的 Hempstead. 当他还是小学生时, 便爱上了数学. Hall 的数学老师们对他在数学上的兴趣产生了很大的影响, 他们不仅是杰出的数学教育者, 而且对数学有着极高的热情. Hall 在英语方面也很优秀. 尽管他既不善于与人交流也不擅长运动, 但他仍然是一名很受欢迎的学生. 后来, 他就读于剑桥大学. 在那里, 老师鼓励他去学习和研究 William Burnside 的工作, 他也对群论产生了兴趣. 1925 年, Hall 获得了学士学位. 经过一段时间的思索之后, 他决定从事学术研究工作.

1927 年, Hall 获得剑桥大学的研究员职位. 他与 Burnside 之间保持通信联系, Burnside 很乐于帮助 Hall, 尽管他们从来没有见过面. 1927 年末, Hall 得到了群论中的一个重要定理. 他将 Sylow 定理推广到有限可解群上, 即现在我们常说的 Hall 定理. 该定理发表于 1928 年. 1930 年, 他再次申请研究员职位, 但第二次申请没有获得批准, 这主要因为在这三年里他在数学方面缺乏活力. 1932 年, 他发表的一篇关于素数幂阶群的论文或许是他最为有名的工作. 1933 年, 他被聘任为剑桥大学的讲师. 1935 年, 他发表了关于匹配的定理 (定理 8.3), 尽管这个结论当时并不是用图论术语描述的.

1933～1967 年间, 他一直呆在剑桥大学, 除了二战的一段时间他在位于布莱切利公园的外交部工作外. Hall 用他毕生的大部分时间为代数学作出了巨大的贡献, 被认为是 20 世纪最伟大的数学家之一. 作为一名高级知识分子和具有很强判断力的人, Hall 悉心关怀他的学生, 当然他的学生对他也是如此. Hall 是一名雅致的学者, 当他认为有必要批评学生的写作时, 他会以一种温和的方式建议他们改进. 在他的学生完成学业离开以后, 他仍然与他们保持联系并继续鼓励他们. Hall 于 1982 年 12 月 30 日去世.

关于 Hall 的定理 8.3, 有一些有趣的推论. 设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 为非空有限集合. 若存在 $n$ 个不同的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得 $x_i \in S_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 则称该集族有一个**互异代表元系 (system of distinct representatives)**. 当然, 为了使得集合 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 有一个互异代表元系, 则必须 $|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| \geqslant n$.

例如, 考虑集合 $S_1, S_2, \cdots, S_7$, 其中

$$S_1 = \{1,2,3\} \quad S_2 = \{2,4,6\} \quad S_3 = \{3,4,5\} \quad S_4 = \{1,4,7\}$$
$$S_5 = \{1,5,6\} \quad S_6 = \{3,6,7\} \quad S_7 = \{2,5,7\}.$$

则该集族有一个互异代表元系, 即,$1, 2, \cdots, 7$ 为一个互异代表元系, 其中, 当 $i = 1, 2, \cdots, 7$, $i \in S_i$. 另一方面, 我们考虑集合 $S_1', S_2', \cdots, S_6'$, 其中

$$S_1' = \{1,3,5,6\} \quad S_2' = \{3,4\} \quad S_3' = \{4,5\}$$
$$S_4' = \{3,4,5\} \quad S_5' = \{1,2,4,6\} \quad S_6' = \{3,5\}.$$

由于 $S_2' \cup S_3' \cup S_4' \cup S_6' = \{3,4,5\}$, 则集合 $S_2', S_3', S_4', S_6'$ 没有互异代表元系, 故该集族也就没有互异代表元系.

这两个例子可以给出很好的启发：一个集族是否有互异代表元系, 恰好对应着一个二部图 $G$ 是否包含从一个部集 $U$ 到另一部集 $W$ 的某个子集的匹配.

**定理 8.4**　非空有限集族 $\{S_1, S_2, \cdots S_n\}$ 有一个互异代表元系当且仅当对于任一整数 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 集族中任意 $k$ 个集合的并至少包含 $k$ 个元素.

**证**　[直接证法] 假设 $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 有一个互异代表元系. 则对于任一整数 $k (1 \leqslant k \leqslant n)$, 集族中任意 $k$ 个集合的并至少包含 $k$ 个元素. 因此, 只需验证充分性即可.

设 $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 是由非空有限集合构成的集族, 且对任一整数 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 集族中任意 $k$ 个集合的并至少包含 $k$ 个元素. 我们构造二部图 $G$, 其部集为 $U = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 和 $W = S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_n$. 若 $w \in S_i$, 则 $U$ 中顶点 $S_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 与 $W$ 中顶点 $w$ 邻接. 设 $X$ 为 $U$ 的任一个子集, 其中 $|X| = k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. 根据条件, 任意 $k$ 个集合的并至少包含 $k$ 个元素, 则 $|N(X)| \geqslant |X|$. 故 $U$ 在 $G$ 中是友好的. 由定理 8.3, $G$ 包含基数为 $n$ 的匹配, 该匹配可将 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 配对到 $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ 中 $n$ 个不同的元素, 从而形成了集族 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的互异代表元系. ∎

定理 8.3 有时会被表述得 “非常友好”, 即下面将要介绍的**婚姻定理**.

**定理 8.5** (**婚姻定理 (The Marriage Theorem)**) *在一个由 $r$ 个女人和 $s$ 个男人构成的人群中, $1 \leqslant r \leqslant s$. 在熟识的男女之间可能出现 $r$ 对婚姻当且仅当对每个整数 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$, 任意 $k$ 个女人共认识至少 $k$ 个男人.*

定理 8.3 的证明 (反证法) 利用了一个具有最大基数的匹配. 我们称具有最大基数的匹配为**最大匹配 (maximum matching)**. 在这一点上, 我们不再假设所考虑对象仅仅是二部图. 对于 $n$ 阶图 $G$, 其最大匹配的基数不超过 $\lfloor n/2 \rfloor$. 换句话说, 若 $G$ 的阶为奇数 $2\ell+1$, 则任一匹配所含的边数不超过 $\ell$; 若 $G$ 的阶为偶数 $2k$, 则任一匹配所含的边数不超过 $k$. 若阶为 $2k$ 的图 $G$ 存在一个基数为 $k$ 的匹配 $M$, 则称该匹配 $M$(必然是最大匹配) 为**完美匹配 (perfect matching)**, 此时 $G$ 中任一顶点均可通过 $M$ 匹配到 $G$ 中某个顶点. 例如, 任一非空正则二部图均存在完美匹配; 该结果归功于 Dénes König.

**定理 8.6** *任意 $r$ 正则二部图 $(r \geqslant 1)$ 均有一个完美匹配.*

**证** [直接证法] 设 $G$ 为 $r$ 正则二部图, 其部集为 $U$ 和 $W$. 显然, $|U| = |W|$. 设 $X$ 为 $U$ 的非空子集, 且 $|X| = k \geqslant 1$. 由于 $X$ 的每个顶点在 $G$ 中的度均为 $r$, 则 $G$ 中有 $kr$ 条边与 $X$ 中的顶点关联. 此外, $W$ 中的每个顶点最多只能关联这 $kr$ 条边中的 $r$ 条边, 故 $N(X)$ 中每个顶点也最多只能关联 $r$ 条边, 因此 $|N(X)| \geqslant k = |X|$. 由定理 8.3, $G$ 有完美匹配. ■

事实上, 存在一种与匹配 (以及最大匹配) 直接相关的参数. 图 $G$ 的**边独立数 (edge independence number)** $\beta_1(G)$ 是指 $G$ 中边独立集的最大基数. 因而, 若 $M$ 为最大匹配, 则 $\beta_1(G) = |M|$. 不难发现, 阶为 $n$ 的图 $G$ 存在完美匹配当且仅当 $n$ 是偶数且 $\beta_1(G) = n/2$. 对于整数 $n \geqslant 3$, $r$, $s$, $1 \leqslant r \leqslant s$, 则有

$$\beta_1(C_n) = \beta_1(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor,\ \beta_1(K_{r,s}) = r.$$

下面我们将介绍一种与边独立数密切相关的参数. 一个顶点与其关联的边称为彼此**覆盖 (cover)**. 对于不包含孤立点的图 $G$, 由覆盖 $G$ 的所有顶点的边构成的集合称为是 $G$ 的一个**边覆盖 (edge cover)**. $G$ 的**边覆盖数 (edge covering number)**$\alpha_1(G)$ 定义为 $G$ 中所有边覆盖的最小基数. 具有最小基数 $\alpha_1(G)$ 的边覆盖称为是**最小边覆盖 (minimum edge cover)**. 因而, $\alpha_1(G)$ 有定义当且仅当 $G$ 不包含孤立点. 对于整数 $n \geqslant 3$, $r$, $s$, $1 \leqslant r \leqslant s$, 有

$$\alpha_1(C_n) = \alpha_1(K_n) = \lceil n/2 \rceil\ ,\ \alpha_1(K_{r,s}) = s.$$

进而,

$$\alpha_1(C_n) + \beta_1(C_n) = \alpha_1(K_n) + \beta_1(K_n) = n,$$
$$\alpha_1(K_{r,s}) + \beta_1(K_{r,s}) = r + s.$$

由此, 引出下面定理.

**定理 8.7** 对于任意不包含孤立点的 $n$ 阶图 $G$,

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n.$$

**证** [直接证法] 首先, 假设 $\beta_1(G) = k$, 则 $G$ 的最大匹配由 $k$ 条边构成, 且覆盖了 $2k$ 个顶点. $G$ 中余下的 $n-2k$ 个顶点可被 $n-2k$ 条边覆盖. 因此, $\alpha_1(G) \leqslant k+(n-2k) = n-k$. 故

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) \leqslant (n-k) + k = n.$$

下面, 我们仅需证明 $\alpha_1(G) + \beta_1(G) \geqslant n$.

设 $X$ 是 $G$ 的最小边覆盖, 则 $|X| = \ell = \alpha_1(G)$. 对于由 $X$ 诱导的子图 $F = \langle X \rangle$, 我们发现 $F$ 不可能包含长度为 3 的迹 $T$. 反之, 若 $F$ 包含了长度为 3 的迹 $T$, 记 $e$ 为 $T$ 的中间边, 则 $X - \{e\}$ 同样覆盖 $G$ 的所有顶点, 导致矛盾. 因此, $F$ 不包含圈, 也不含长度为 3 或大于 3 的迹. 这就意味着 $F$ 的每个连通分支都是星图.

由于阶为 $n$ 且边数为 $n-k$ 的森林包含 $k$ 个连通分支, 而 $F$ 的边数为 $\ell = n-(n-\ell)$, 则 $F$ 包含 $n-\ell$ 个非平凡的连通分支. 从上述的每个连通分支中选取一条边, 即可构造出一个基数为 $n-\ell$ 的匹配. 因而, $\beta_1(G) \geqslant n-\ell$. 故

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) \geqslant \ell + (n-\ell) = n.$$

从而, $\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n$. ■

定理 8.7 归功于 Tibor Gallai, 他在早年被人们熟知的名字是 Tibor Grünwald. 1912 年, Gallai 出生于匈牙利. Gallai, Paul Erdős 和 Paul Turán 是当时匈牙利国家数学竞赛的获胜者. 后来, 他们成为了一生的朋友. 鉴于 Gallai 在数学上的天赋, 他被准许进入布达佩斯的 Pázmány 大学学习. 他是 1930 年布达佩斯的狂热学生小组的一员, 该团队还有 Paul Erdős, Paul Turán, George Szekeres 和 Esther Klein 等人. 他们中的一些人参加了由布达佩斯科技大学教授 Dénes König 主讲的图论课. 这对 Gallai 的数学兴趣有着深远的影响. Gallai 曾帮助 König 编写过图论著作, König 也在他的图论著作中提到了 Gallai 的一些结果并使用了他的另外一些想法. Gallai 对图论的许多贡献后来被证明是这门学科的基本原理, 并推动了图论与组合论的迅速发展. 例如, 他是最早认识到所谓的 "极小 - 极大定理" 重要性的数学家之一.

Gallai 是一个极其谦虚的人, 他很少在公众场合露面, 也很少参加会议. 事实上, 他的大部分工作仅仅是通过他的学生的努力才被人们知晓的. Gallai 在赞扬别人工作的同时, 却经常低估自己工作的优点, 尽管他在图论的很多领域都有着重要的结论. 因而, 在发表自己的结论方面, 他是出了名地慢. 他的几个结论甚至没有被发表, 后来又被其他人独立地发现 (和发表). Gallai 于 1992 年去世.

顶点的独立性也是图论中一个同等重要的课题. 图中一个顶点的集合称为是**独立的** (independent), 如果该集合中任意两顶点都不邻接. 图 $G$ 的**点独立数** (vertex independence number)(或简称为**独立数** (independence number)$\beta(G)$ 定义为 $G$ 中点独立集的最大基数. 图 $G$ 中基数为 $\beta(G)$ 的独立集称为是**最大独立集** (maximum independent set).

类似于边覆盖, 下面将介绍关于顶点覆盖的一些概念. 若图 $G$ 的某个顶点子集可以覆盖 $G$ 的所有边, 则称该集合为 $G$ 的**点覆盖** (vertex cover). $G$ 的所有点覆盖的最小基数称为是 $G$ 的**点覆盖数** (vertex covering number) , 记为 $\alpha(G)$. 基数为 $\alpha(G)$ 的点覆盖称为是**最小点覆盖** (minimum vertex cover). 对于整数 $n \geqslant 3$, $r$, $s(1 \leqslant r \leqslant s)$, 有

$$\beta(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor,\ \beta(K_n) = 1,\ \beta(K_{r,s}) = s;$$
$$\alpha(C_n) = \lceil n/2 \rceil,\ \alpha(K_n) = n-1,\ \alpha(K_{r,s}) = r.$$

这里我们发现

$$\alpha(C_n) + \beta(C_n) = \alpha(K_n) + \beta(K_n) = n,\ \alpha(K_{r,s}) + \beta(K_{r,s}) = r + s.$$

同样地, 也有一个关于顶点的类似于定理 8.7 的结论, 它也归功于 Gallai. 该结论的证明类似于定理 8.7 的证明, 我们将留作习题. 定理 8.7 和定理 8.8 常被称为**Gallai 恒等式**.

**定理 8.8** *对于任意不包含孤立点的 $n$ 阶图,*

$$\alpha(G) + \beta(G) = n.$$

前面讨论了关于图 $G$ 独立和覆盖的一些概念, 我们总结如下:

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha(G)$ | 点覆盖数 | 覆盖所有边的顶点的最小个数 |
| $\beta(G)$ | 点独立数 | 相互不邻接的顶点的最大个数 |
| $\alpha_1(G)$ | 边覆盖数 | 覆盖所有顶点的边的最小个数 |
| $\beta_1(G)$ | 边独立数 | 相互不邻接的边的最大个数 |

**例 8.9** 对于图 8.4 中的图 $G \cong K_1 + 2K_3$, 确定 $\alpha(G)$, $\beta(G)$, $\alpha_1(G)$, $\beta_1(G)$.

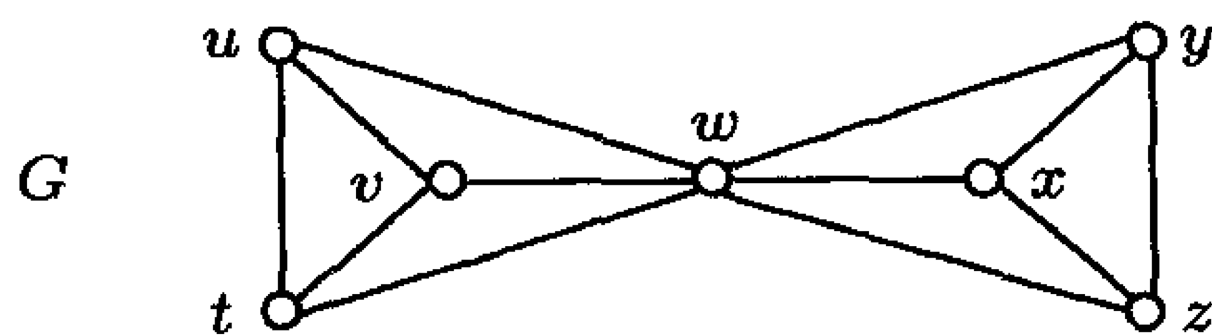



图 8.4 例 8.9 中的图 $G$

**解** 由于 $G$ 的阶为 7, 故 $\beta_1(G) \leqslant \lfloor 7/2 \rfloor = 3$. 因为 $\{tu, vw, yz\}$ 是包含 3 条边的独立集, 所以 $\beta_1(G) = 3$. 由定理 8.7, $\alpha_1(G) = 4$. 例如, $\{tu, vw, wy, yz\}$ 是 $G$ 的最

小边覆盖.

注意到, 顶点 $w$ 与 $G$ 的其余顶点均邻接; $\langle\{t,u,v\}\rangle \cong K_3$; $\langle\{x,y,z\}\rangle \cong K_3$, 故 $\beta(G)=2$. 例如, $\{t,z\}$ 是 $G$ 的一个最大独立集. 由定理 8.8, $\alpha(G)=5$. 例如, $\{t,u,w,y,z\}$ 是 $G$ 的一个最小点覆盖. ◇

## 习题

8.1 设 $G$ 为二部图, 其部集为 $U=\{u_0, u_1, \cdots, u_6\}$和 $W=\{w_0, w_1, \cdots, w_6\}$, 其中 $U$ 中的元素见如下描述, $w_i=i(0\leqslant i\leqslant 6)$. 若整数 $w_j$ 为 $u_i$ 描述的正确回答则顶点 $u_i$ 和 $w_j(0\leqslant i,j\leqslant 6)$ 是邻接的.

$u_0$: 非平凡完全图的边数.

$u_1$: 树上两顶点 $u, v$ 之间不同 $u-v$ 路的个数.

$u_2$: 可迁竞赛图中 Hamilton 圈的个数.

$u_3$: 6 阶树中割边的个数.

$u_4$: 7 阶非空 $r$ 正则图的 $r$ 可能的值.

$u_5$: 5 阶树的最大度.

$u_6$: 5 阶图中割点的最大个数.

(a) 画出图 $G$.

(b) $G$ 是否包含完美匹配? 若不包含, 为什么? 若包含, 画出该完美匹配, 并说明在该情形下它意味着什么?

8.2 某家大型公司 7 个不同部门有些公开职位, 分别是广告设计 (a), 营销 (b), 计算师 (c), 规划师 (d), 实验师 (e), 财政主管 (f), 客户接待 (g). 有 6 名应聘者来申请这些职位, 分别是

Alvin (A) : a, c, f; Beverly (B): a, b, c, d, e, g;
Connie (C): c, f; Donald (D): b, c, d, e, f, g;
Edward (E): a, c, f; Frances (F): a, f.

(a) 用一个二部图为此情形建模.

(b) 这 6 名应聘者是否可以得到他们所申请的职位?

8.3 如图 8.5 所示, $G_1$ 和 $G_2$ 为两个二部图, 每个二部图的部集均为 $U=\{v,w,x,y,z\}$ 和 $W=\{a,b,c,d,e\}$. 对于每个图, $U$ 是否可以匹配到 $W$ 上?

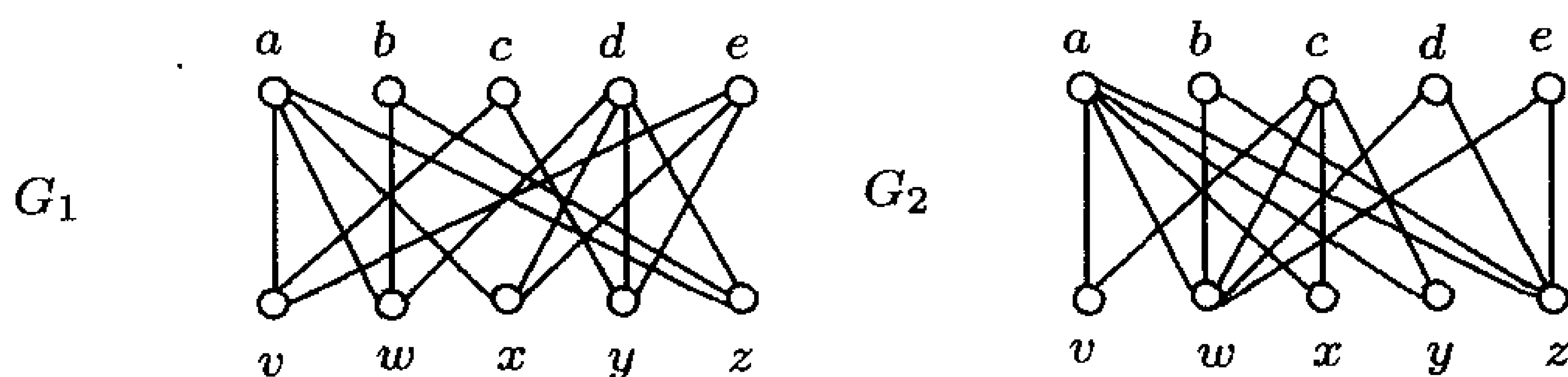



图 8.5　习题 8.3 中图 $G_1$ 和 $G_2$

8.4 设 $G$ 为连通二部图, 其部集为 $U$ 和 $W$, 其中 $|U| = |W| = k \geqslant 2$. 证明：若 $U$ 中任意两点在 $G$ 中有不同的度, 则 $G$ 包含完美匹配.

8.5 证明：任一树至多包含一个完美匹配.

8.6 (a) 证明：任一不同构于 $K_{1,3}$ 的 4 阶连通图包含完美匹配.

(b) 设 $G$ 为偶数阶连通图, 证明：若 $G$ 不包含同构于 $K_{1,3}$ 的诱导子图, 则 $G$ 包含完美匹配.

8.7 给出一个连通的非 Hamilton 图, 使得该图包含两个不相交的完美匹配.

8.8 证明：Petersen 图不包含两个不相交的完美匹配. (注意到 Petersen 图的最小圈长为 5.)

8.9 对于任意整数 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, 给出满足下面条件且阶数最小的连通图 $G_i$, 其中 $\beta(G_i) + \beta_1(G_i) = 5$, $\beta(G_i) = i$.

8.10 对于任意阶为 6, 且有 4 个独立顶点的连通图 $G$, 证明：或者 $\beta(G) = 5$ 或者 $\beta_1(G) \geqslant 2$.

8.11 列举满足 $\alpha_1(G) = \beta(G)$ 的图 $G$ 的一个无穷类.

8.12 证明或反驳：

(a) 图的任一点覆盖包含一个最小点覆盖.

(b) 图的任一边独立集包含于某个最大边独立集.

8.13 对于如图 8.6. 所示的图 $H$, 确定 $\alpha(H)$, $\beta(H)$, $\alpha_1(H)$, $\beta_1(H)$, 并列举 $H$ 的一个最小点覆盖, 一个最大点独立集, 一个最小边覆盖, 一个最大边独立集.

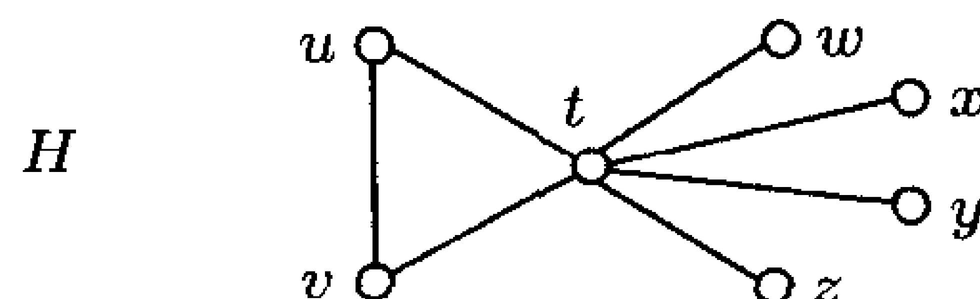



图 8.6 习题 8.13 中的图 $G$

8.14 证明：不含孤立点的图 $G$ 有完美匹配当且仅当 $\alpha_1(G) = \beta_1(G)$.

8.15 两个顶点不相交图 $G_1$ 和 $G_2$ 的阶分别为 $n_1$ 和 $n_2$, 且 (1) $n_2 > n_1$, (2) $n_1$ 和 $n_2$ 具有相同的奇偶性, (3) $\beta_1(G_2) \geqslant (n_2 - n_1)/2$. 设 $G = G_1 + G_2$, 则 $\alpha_1(G)$ 为多少? 并解释原因.

8.16 证明：若图 $G$ 的阶为 $n$, 最大度为 $\Delta$, 则 $\alpha(G) \geqslant \frac{n}{\Delta+1}$.

## 8.2 因子分解

我们已经知道：$n$ 阶图 $G$ 的匹配 $M$ 是**完美匹配**, 若 $n$ 是偶数, 且 $|M| = n/2$. 因此, 由 $M$ 诱导的子图 $F = \langle M \rangle$ 为 $G$ 的 1 正则生成子图. 图 $G$ 的 1 正则生成子图也称为是 $G$ 的**1 因子 (1-factor)**. 不难发现, 图的 1 因子的边集是图的完美匹配. 因而, 图 $G$ 有 1 因子当且仅当 $G$ 有完美匹配.

对于偶数 $n \geqslant 4$, 图 $C_n$ 和 $K_n$ 有 1 因子. 对于整数 $r$ 和 $s$, 完全二部图 $K_{r,s}$ 有 1 因子当且仅当 $r = s$. Petersen 图 PG (见图 8.7) 也有 1 因子, 例如, $F = \langle X \rangle$, 其中 $X = \{u_iv_i : 1 \leqslant i \leqslant 5\}$. Petersen 图是 3 正则的, 很多其他的 3 正则图有 1 因子. 不难发现, 图 8.7 中所有图都有 1 因子.

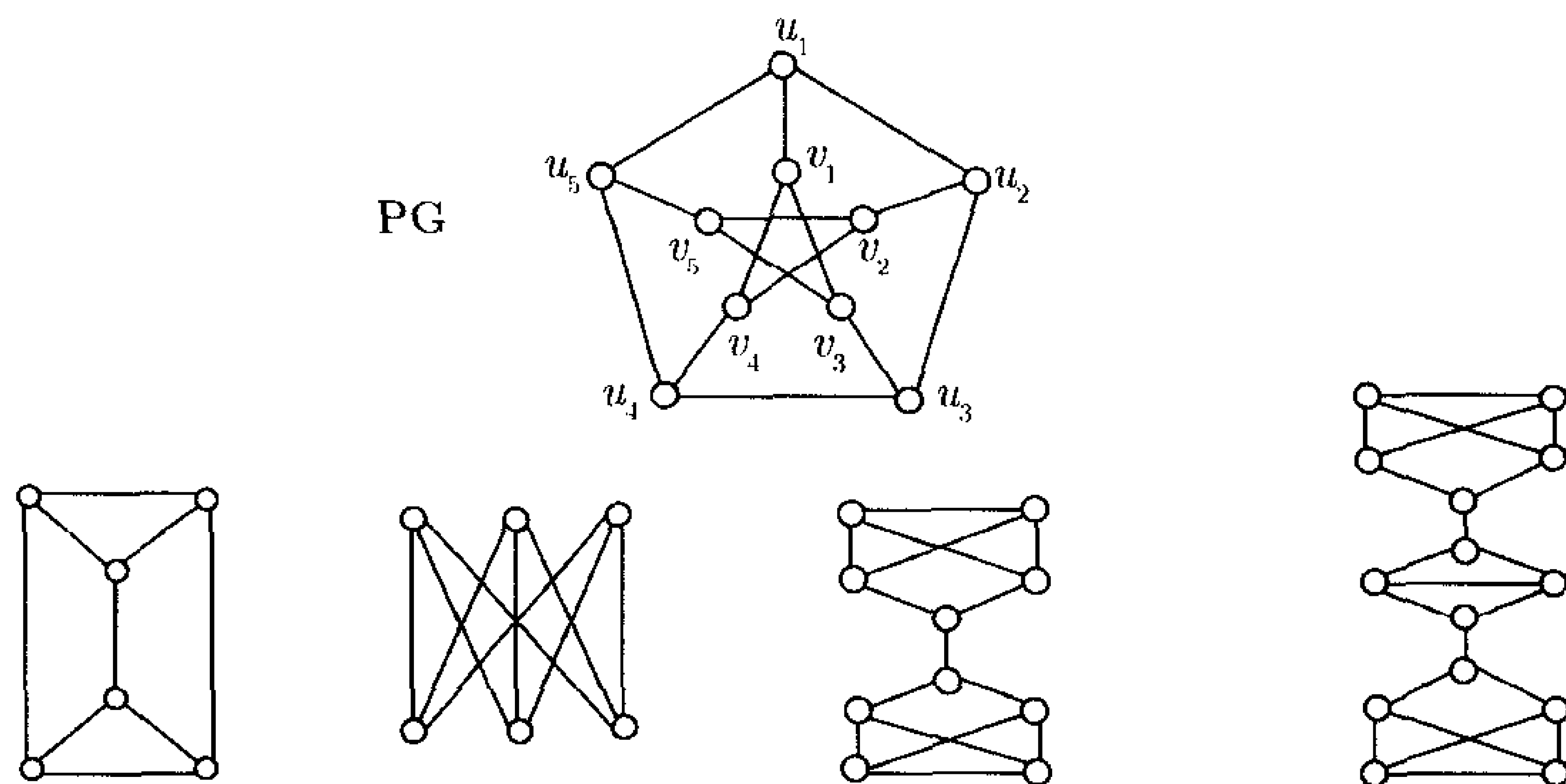



图 8.7 包含 1 因子的 3 正则图

然而, 并非所有的 3 正则图都包含 1 因子. 例如, 图 8.8 所示的 16 阶 3 正则图 $H$ 不包含 1 因子. 这便提出一个问题: 都有哪些图包含 1 因子呢? 当然, 仅仅只有偶数阶图才可能包含 1 因子. 不难发现, 若 $G$ 为偶数阶的 Hamilton 图, 则 $G$ 包含 1 因子. 因为我们只需从 Hamilton 圈上取出互不相交的边, 即可得到 1 因子. 其实, 偶数阶的 Hamilton 图包含两个不相交的完美匹配.

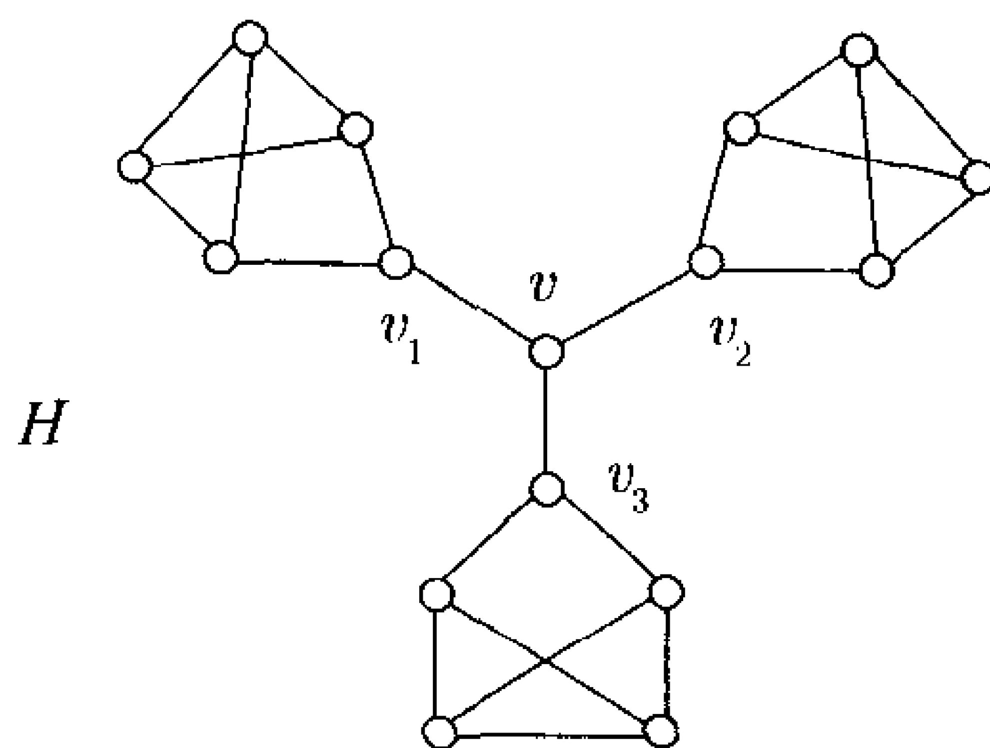



图 8.8 不包含 1 因子的 3 正则图

利用定理 6.5 的结论, 若 $G$ 为偶数阶的 Hamilton 图, 则对于 $V(G)$ 的任意非空子集 $S$, $k(G-S) \leqslant |S|$, 其中 $k(G-S)$ 为 $G-S$ 的连通分支数. 我们已经看出该定理的逆并不正确. 例如, 对于 Petersen 图 $PG$ 顶点集的任意非空真子集 $S$, $k(PG-S) \leqslant |S|$, 但 Petersen 图不是 Hamilton 的. 然而, Petersen 图却包含 1 因子.

我们已经注意到, 图 8.8 所示的图 $H$ 不包含 1 因子. 若它包含 1 因子 $F$, 则 $F$ 中恰有一条与 $v$ 关联的边. 由于 $H-v$ 包含 3 个奇数阶的连通分支, 则这些分支中的两个分支必须包含 1 因子, 导致矛盾. 这就意味着, 若 $G$ 为偶数阶图, 且包含 $V(G)$ 的一个非空真子集 $S$, 使得 $G-S$ 的奇数阶连通分支个数超过 $|S|$, 则 $G$ 不含 1 因子. 我们将看到, 这是一个非常关键的发现. 图的一个连通分支称为是**奇的 (odd)**或**偶的 (even)**, 若该连通分支的阶数是奇数或偶数. 记 $k_o(G)$ 为图 $G$ 的奇连通分支的个数. 特别地, 若 $G$ 为偶数阶 $n$ 的 Hamilton 图 (因而,$G$ 包含 1 因子), 则对于 $V(G)$ 的任意非空真子集 $S$, $k_o(G-S) \leqslant |S|$. 下面的定理刻画了包含 1 因子的图.

**定理 8.10**　图 $G$ 包含 1 因子当且仅当对于 $V(G)$ 的任意真子集 $S$, $k_o(G-S) \leqslant |S|$.

**证**　[直接证法, 归纳证法, 反证法] 首先假设 $G$ 包含 1 因子 $F$. 设 $S$ 为 $V(G)$ 的真子集. 若 $G-S$ 不包含奇连通分支, 则 $k_o(G-S)=0$, 显然 $k_o(G-S) \leqslant |S|$. 下面假设 $k_o(G-S)=k \geqslant 1$. 设 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 是 $G-S$ 的奇连通分支.(当然,$G-S$ 可能还有偶连通分支. ) 由于 $G$ 包含 1 因子 $F$, 且每个子图 $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的阶均为奇数, $F$ 的某条边必须关联 $G_i$ 中的一个顶点和 $S$ 中的一个顶点. 故 $k_o(G-S) \leqslant |S|$.

下证充分性. 假设对于 $V(G)$ 的任意真子集 $S$, $k_o(G-S) \leqslant |S|$. 特别地, 对于 $S=\emptyset$, 我们有 $k_o(G-S)=k_o(G)=0$, 即 $G$ 的任一连通分支均为偶的, 进而 $G$ 的阶为偶数. 下面, 我们将用归纳法证明：任意满足上述性质的偶数阶图有 1 因子. 具有偶连通分支的 2 阶图仅有一个, 即 $K_2$, 显然有 1 因子. 对于偶数 $n \geqslant 4$, 假设满足下述条件的所有阶小于 $n$ 的偶数阶图 $H$ 都有 1 因子, 要求对 $V(H)$ 的任意真子集 $S$, $k_o(H-S) \leqslant |S|$. 设 $G$ 为 $n$ 阶图, 且对于 $V(G)$ 的任意真子集 $S$, $k_o(G-S) \leqslant |S|$. 因而, $G$ 的任一连通分支都有偶数阶.

首先, 我们对图 $G$ 进行观察. 由于 $G$ 的任一非平凡连通分支必包含一个非割点的顶点 (见推论 5.6), 则 $V(G)$ 有一些子集 $R$, 使得 $k_o(G-R)=|R|$.(这样的集合必定存在, 例如我们可选择 $R=\{v\}$, 其中 $v$ 不是 $G$ 的割点.) 在所有满足上述条件的集合中, 设 $S$ 为具有最大基数的一个, 同时设 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 是 $G-S$ 的 $k$ 个奇连通分支. 因而, $k=|S| \geqslant 1$.

通过观察不难发现,$G_1, G_2, \cdots, G_k$ 是 $G-S$ 仅有的连通分支. 否则,$G-S$ 必包含一个偶连通分支 $G_0$, 且 $G_0$ 包含非割点的顶点 $u_0$. 此时, 集合 $S_0=S \cup \{u_0\}$ 的基数为 $k+1$, 且

$$k_o(G-S_0)=|S_0|=k+1,$$

导致矛盾. 因此, 如前面断言, 奇连通分支 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 是 $G-S$ 仅有的连通分支.

对于任一整数 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 设 $S_i$ 为满足下面条件的 $S$ 中顶点的集合, 其中这些顶点与 $G_i$ 中至少一个顶点邻接. 由于 $G$ 仅有偶连通分支, 故每个 $S_i$ 非空. 下面

我们断言：对于任一整数 $\ell$ $(1 \leqslant \ell \leqslant k)$, $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 中任意 $\ell$ 个集合的并至少包含 $\ell$ 个顶点. 假设断言不成立, 则存在整数 $j$, 使得 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 中 $j$ 个集合之并 $T$ 中的元素个数少于 $j$. 不失一般性, 我们可假设 $T = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_j$, $|T| < j$. 则

$$k_o(G - T) \geqslant j > |T|,$$

从而导致矛盾. 因此, 对于任一整数 $\ell$ $(1 \leqslant \ell \leqslant k)$, 集合 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 中任意 $\ell$ 个集合的并至少包含 $\ell$ 个顶点.

由定理 8.4, 存在由 $k$ 个不同顶点构成的顶点集 $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$, 使得 $v_i \in S_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. 由于每个图 $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 都包含顶点 $u_i$, 使得 $u_iv_i \in E(G)$, 则 $\{u_iv_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 是 $G$ 的匹配.(如图 8.9 所示)

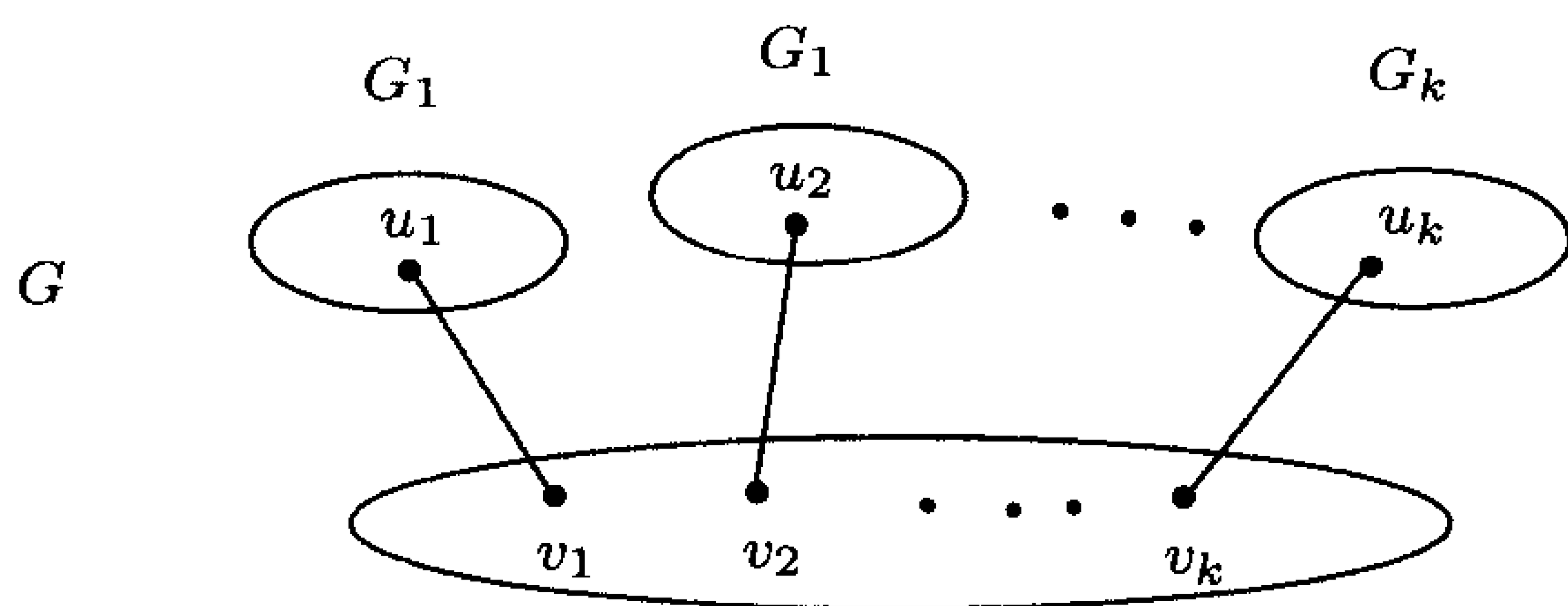



图 8.9 定理 8.10 证明的一个步骤

接下来我们将证明, 若 $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 是非平凡的, 则 $G_i - u_i$ 有 1 因子. 设 $W$ 是 $V(G_i - u_i)$ 的一个真子集, 我们断言：

$$k_o(G_i - u_i - W) \leqslant |W|.$$

假设断言不成立, 即 $k_o(G_i - u_i - W) > |W|$. 由于 $G_i - u_i$ 的阶为偶数, 则 $k_o(G_i - u_i - W)$ 和 $|W|$ 必都为偶数或都为奇数. 因此, $k_o(G_i - u_i - W) \geqslant |W| + 2$. 设 $S' = S \cup W \cup \{u_i\}$, 注意到

$$\begin{aligned} |S'| &\geqslant k_o(G - S') = k_o(G - S) + k_o(G_i - u_i - W) - 1 \\ &\geqslant |S| + (|W| + 2) - 1 = |S| + |W| + 1 = |S'|, \end{aligned}$$

这意味着 $k_o(G - S') = |S'|$, 与 $S$ 的选取矛盾. 故断言 $k_o(G_i - u_i - W) \leqslant |W|$ 成立.

由归纳假设, 若 $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 是非平凡的, 则 $G_i - u_i$ 有 1 因子. 对所有非平凡图 $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $G_i - u_i$ 的 1 因子的并集与边 $\{u_iv_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 即可构成 $G$ 的 1 因子. ■

定理 8.10 归功于 William Thomas Tutte. 1917 年 5 月 14 日, Tutte 出生于英国的纽马克特. Tutte 的父亲是一名园丁, 母亲是一名保管员. 由于他的父亲想获得一份稳定的工作, 他们经常搬家, 但他的父亲最终也只是一名旅馆的园丁. 他们生活在 Cheveley 的一个小村庄的石屋里. 在 6~11 岁之间,Tutte 在村里的小学读书.

鉴于 Tutte 在竞赛中的优秀表现, 他在 10 岁时获得奖学金, 并可以前往剑桥的一所学校读书. 他的父母觉得学校离家太远, 于是 Tutte 被留在家中. 但是, 第二年他再次参加了考试并且这次, 他被允许去剑桥的那所学校读书, 尽管他每天要往返于家和学校之间.

1935 年, Tutte 进入了剑桥大学三一学院学习. 在那里他学习化学专业, 并继续攻读化学专业的研究生, 而且还写了两篇化学方面的论文. 尽管如此, 化学不是他的最爱. 他的第一兴趣是数学. Tutte 活跃于三一学院数学会. 在那里他遇到了 3 名数学专业的本科生, Cedric Smith, R. Leonard Brooks 和 Arthur Stone; 他们成为了 Tutte 的终生朋友. 他们四人合作一篇论文, 应用电网络解决了一个几何问题. 这篇文章成为该领域的基础参考文献.

此后 Tutte 的学术生涯由于二战被迫中断. 1941 年 1 月, Tutte 接受他导师的邀请, 前往布莱切利公园 (英国密码破译组织) 工作. 1941 年 10 月, Tutte 首次接收到来自柏林代号为 Fish 的一组机器代码信息. 在当时布莱切利的密码破译者中, Alan Turing 是最为优秀的. 他成功地破译了 Enigma 代码的海军和空军版本, 但唯独对陆军版本无能为力. 基于此, 他们将研究重点放在了仅用于陆军的 Fish 代码上. Fish 代码是用于柏林和野战司令官之间的高级通讯代码. 仅仅利用代码信息的样本, Tutte 便发现了产生这种代码的机器结构. Tony Sale, 一个最早描述 Tutte 及其同事工作的人, 称该工作是 " 整个战争中最为伟大的智力壮举".

二战后, Tutte 回到了剑桥大学, 开始读数学系的研究生. 在研究生期间, 他发表了他早期研究的一些成果, 例如图包含 1 因子的刻画 (定理 8.10). 在他的博士论文中, Tutte 复兴了一门数学, 即我们现在熟知的*拟阵理论*. 拟阵理论通常认为是由 Hassler Whitney 引入的, 它是从不同组合对象 (包括图与矩阵) 抽象出来的.

1948 年, Tutte 在他导师 Shaun Wylie 的极少帮助下, 完成了剑桥大学博士学业. 毕业后, Tutte 应 H. S. M. (Donald) Coxeter (1907—2003, 20 世纪伟大的几何学家之一) 的邀请前往多伦多大学任教. 在多伦多大学期间, Tutte 成为了在组合论领域杰出的学者之一. 1957 年, 加拿大的滑铁卢大学成立. 五年后, Ralph G. Stanton (滑铁卢大学数学系主任, 组合设计领域知名学者) 成功地引进 Tutte 来该校工作. Tutte 的到来是确立滑铁卢大学声誉的一个主要因素. Tutte 于 1984 年退休, 之后他仍然工作在图论和离散数学的相关领域. 1998 年, 在他出版的著作*Graph Theory As I Have Known It*中, Tutte 阐述了他是如何得到一些基础结果的. Tutte 于 2002 年 5 月 2 日去世.

图 8.7 给出了某些包含 1 因子的 3 正则图. 图 8.8 则给出了一个不含 1 因子的 3 正则图. 尽管图 8.8 所示的图含有割边, 但不存在不含割边且也不含 1 因子的 3 正则图. 这就是 Julius Petersen 的结果, 通常称为 Petersen 定理. 尽管从历史上, 该定理早于定理 8.10, 但利用定理 8.10, 我们可以很简单地给出证明.

**定理 8.11** (**Petersen 定理**) 任一不含割边的 3 正则图都包含 1 因子.

**证** [直接证法] 设 $G$ 为 3 正则无割边图, $S$ 为 $V(G)$ 的基数为 $k \geqslant 1$ 的子集. 下面我们将证明, $G-S$ 的奇连通分支数 $k_o(G-S)$ 至多是 $|S|$. 若 $G-S$ 没有奇连通分支, 则命题显然成立. 因此, 我们可以假设 $G-S$ 有 $\ell \geqslant 1$ 个奇连通分支, 分别为 $G_1, G_2, \cdots, G_\ell$. 设 $X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant \ell)$ 为连接 $S$ 中顶点和 $G_i$ 中顶点的边构成的集合. 由于 $G_i$ 中任一顶点在 $G$ 中的度为 3, 且 $G_i$ 中所有顶点的度和为偶数, 故 $|X_i|$ 为奇数. 因为 $G$ 不含割边, 所以对于任意 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant \ell)$, $|X_i| \neq 1$, 进而 $|X_i| \geqslant 3$. 因此, 连接 $S$ 中顶点和 $G-S$ 中顶点的边至少有 $3\ell$ 条. 注意到 $|S| = k$, 且 $S$ 中任一顶点在 $G$ 中的度为 3, 故连接 $S$ 中顶点和 $G-S$ 中顶点的边至多有 $3k$ 条. 因此,

$$3k_o(G-S) = 3\ell \leqslant 3k = 3|S|,$$

即 $k_o(G-S) \leqslant |S|$. 由定理 8.10, 图 $G$ 包含 1 因子. ■

事实上, Petersen 证明了如下一个稍强的结果 (证明留作习题).

**定理 8.12** 任一至多含有两条割边的 3 正则图包含 1 因子.

从图 8.8 中的图 $H$ 我们可以看出, 定理 8.12 中割边的个数不能增加到 3, 否则我们不能得到相同的结论.

若 3 正则图 $G$ 包含 1 因子 $F_1$, 在 $G$ 上移除 $F_1$ 的边 (即在 $G$ 中移除一个完美匹配), 则可得到一个 2 正则图 $H$. 若 $H$ 包含 1 因子 $F_2$, 在 $H$ 上移除 $F_2$ 的边, 则得到的图 $F_3$ 本身即为 1 因子. 若上述情形发生, 则 $G$ 包含三个边互不相交的 1 因子. 由此, 我们可以引出下面定义.

图 $G$ 称为是**可 1 因子分解的 (1-factorable)**, 若 $G$ 有 1 因子 $F_1$, $F_2$, $\cdots$, $F_r$, 使得 $\{E(F_1), E(F_2), \cdots, E(F_r)\}$是 $E(G)$ 的一个划分. 此时, 我们称 $G$ 被**因子分解 (factored)**成 1 因子 $F_1$, $F_2$, $\cdots$, $F_r$; 这些 1 因子构成了 $G$ 的**1 因子分解 (1-factorization)**. 不难发现, $G$ 的任一条边必属于某个 1 因子. 由于任意 $E(F_i)(1 \leqslant i \leqslant r)$ 均为完美匹配, 则 $G$ 的任一顶点 $v$ 必与 $F_1, F_2, \cdots, F_r$ 中的每个 1 因子的恰好一条边关联, 从而 $\deg_G v = r$, 这就意味着 $G$ 是 $r$ 正则的. 因此任一可 1 因子分解的图是正则的, 反之不真. 例如, 图 8.8 中的图 $H$ 是 3 正则的, 但 $H$ 不含 1 因子. 此外, 定理 8.11 仅能保证不含割边的 3 正则图包含 1 因子.

1884 年, Peter Tait 在一本书中注释到, 他已经证明了, 任一个 3 正则图是可 1 因子分解的, 但该结果在没有任何限制的情形下并不正确. Petersen 将 Tait 含糊的注释理解为: 任一不含割边的 3 正则图是可 1 因子分解的. 然而, 在 1898 年 Petersen 证明了, 尽管一个 3 正则图不含割边, 也并不意味着该图是可 1 因子分解的. 他给出了一个反例, Petersen 图是 3 正则的且不含割边, 但它并不是可 1 因子分解的.

**定理 8.13** Petersen图不是可 1 因子分解的.

**证** [反证法] 假设结论不成立, Petersen 图 PG 是可 1 因子分解的. 那么 PG 可因子分解成 3 个 1 因子 $F_1, F_2, F_3$. 因此, 由边集 $E(F_1) \cup E(F_2)$ 所生成 (PG 的) 子图 $H$ 是 2 正则的, 故 $H$ 或为一个圈, 或为两个以上圈的并. 另一方面, 因为 PG 的最小圈长为 5, 所以 $H \cong 2C_5$. 由于 $2C_5$ 不包含 1 因子, 从而导致矛盾. ■

或许, 最为熟知的可 1 因子分解图是偶数阶完全图.

**定理 8.14** 对于任一正整数 $k$, 完全图 $K_{2k}$ 是可 1 因子分解的.

**证** [直接证法] 由于 $k=1$, $k=2$ 时结论显然成立, 我们假设 $k \geqslant 3$. 设 $G \cong K_{2k}$, 其中 $V(G)=\{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{2k-1}\}$. 设 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k-1}$ 是正 $(2k-1)$ 边形的顶点, 且将 $v_0$ 放置在正 $(2k-1)$ 边形的中心, 用直线段表示 $G$ 的每条边. 设 $F_1$ 为 $G$ 的 1 因子, 它是由边 $v_0v_1$ 以及所有与 $v_0v_1$ 垂直的边构成, 即 $v_2v_{2k-1}$, $v_3v_{2k-2}, \cdots, v_kv_{k+1}$. 一般地, 对于 $1 \leqslant i \leqslant 2k-1$, 设 $F_i$ 是 $G$ 的 1 因子, 它是由边 $v_0v_i$ 以及所有与 $v_0v_i$ 垂直的边构成. 因此, $G$ 可因子分解成为 1 因子 $F_1, F_2, \cdots, F_{2k-1}$. ■

定理 8.14 的证明给出了 $K_{2k}$ 的具体的 1 因子分解. 可以发现, 1 因子 $F_2$ 可通过 $F_1$ 沿顺时针方向旋转角度 $2\pi/(2k-1)$ 而得到. $F_1$ 沿顺时针方向旋转上述角度两次即可得到 $F_3$, 依次类推. 因此, 上述证明中的 1 因子分解称为是**循环因子分解 (cyclic factorization)**. $k=3$ 时,$K_6$ 的 1 因子分解可如图 8.10 所示.

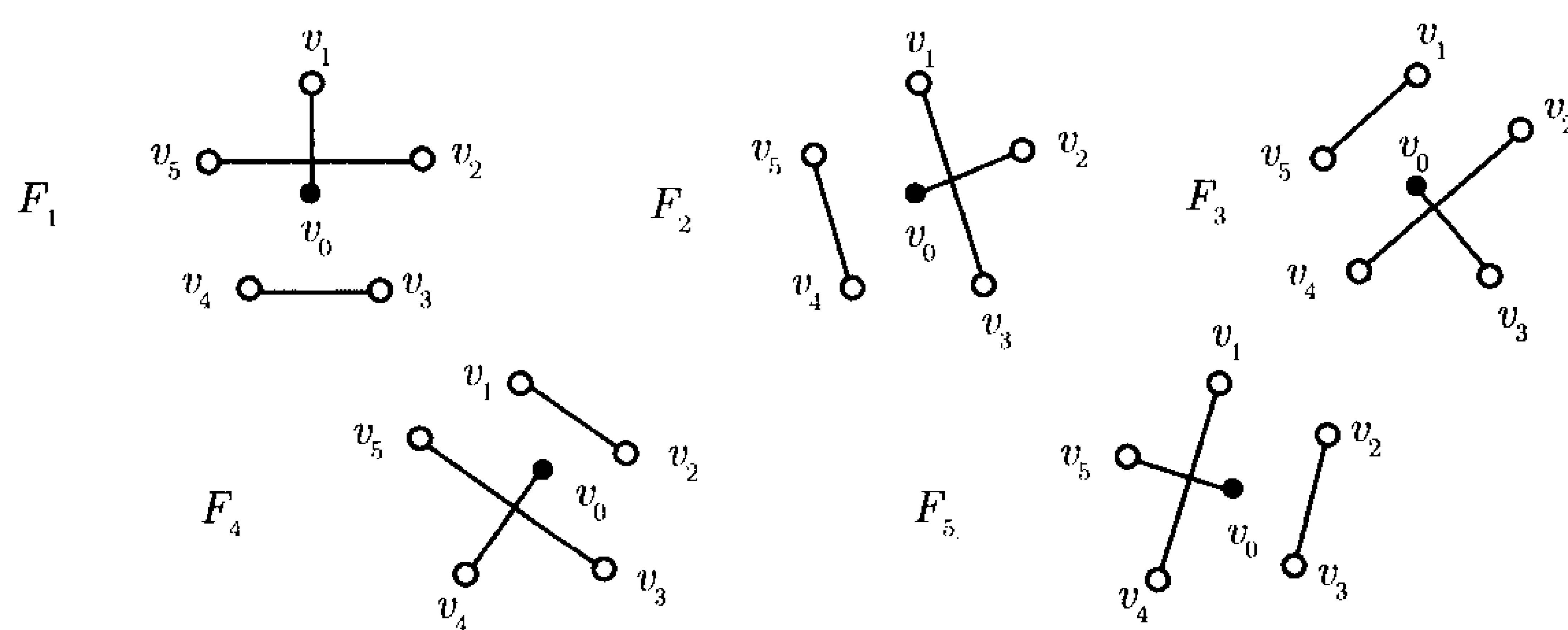



图 8.10 $K_6$ 的循环因子分解

在定理 8.6 的帮助下, 我们可以得到另外一类可 1 因子分解的图.

**定理 8.15** 任意 $r$ 正则的二部图 $(r \geqslant 1)$ 是可 1 因子分解的.

**证** [直接证法] 设 $G$ 为 $r$ 正则二部图, 其中 $r \geqslant 1$. 由定理 8.6, $G$ 包含一个完美匹配 $M_1$. 因此,$G-M_1$ 是 $(r-1)$ 正则的. 若 $r \geqslant 2$, 则 $G-M_1$ 包含完美匹配 $M_2$. 继续上述过程, 应用 $r$ 次定理 8.6 , 我们发现 $E(G)$ 可被划分为完美匹配的并, 从而给出了 $G$ 的一个 1 因子分解. ■

类似地, 图 $G$ 的 2 正则生成子图称为是 $G$ 的一个**2 因子 (2-factor)**. 不难发

现, 2 因子的任一连通分支是一个圈. 图 $G$ 称为是**可 2 因子分解的 (2-factorable)**, 若 $G$ 有 2 因子 $F_1, F_2, \cdots, F_k$, 使得 $\{E(F_1), E(F_2), \cdots, E(F_k)\}$构成 $E(G)$ 的一个划分. 此时, 图 $G$ 是 $2k$ 正则的. 也就是说, 若 $G$ 是可 2 因子分解图, 则存在正偶数 $r$, 使得 $G$ 是 $r$ 正则的. 可能出乎大家的意料, Petersen 证明了该命题的逆也是正确的.

**定理 8.16** *图 $G$ 是可 2 因子分解的当且仅当存在某个正偶数 $r$, 使得 $G$ 是 $r$ 正则的.*

**证** [直接证法] 通过观察我们已经发现, 任一可 2 因子分解图是 $r$ 正则的 ($r$ 为某一正偶数). 故我们只需证明充分性即可. 设 $G$ 是 $r$ 正则图, 其中 $r = 2k$, $k \geqslant 1$. 不失一般性, 我们假设 $G$ 是连通的. 由定理 6.1, $G$ 是 Euler 的, 因此包含一条 Euler 回路 $C$. (当然, $G$ 的顶点可以不止一次地出现在 $C$ 上. 事实上,$G$ 的任一顶点在 $C$ 上出现 $k$ 次.)

设 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 我们构造二部图 $H$, 使得其部集为

$$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\},\ W = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\},$$

其中, 顶点 $u_i$ 和 $w_j$ 在 $H$ 中邻接, 若在圈 $C$ 上 $v_j$ 紧随 $v_i$ 之后 ($1 \leqslant i, j \leqslant n$). 由于 $G$ 的任一顶点在 $C$ 上出现 $k$ 次, 因此图 $H$ 是 $k$ 正则的. 由定理 8.15, $H$ 是可 1 因子分解的, 故 $H$ 可因子分解成 $k$ 个 1 因子 $F_1', F_2', \cdots, F_k'$.

下面我们证明,$H$ 的每个 1 因子 $F_i'$ ($1 \leqslant i \leqslant k$) 均对应着 $G$ 的一个 2 因子 $F_i$. 不妨以 1 因子 $F_1'$ 为例. 由于 $F_1'$ 是 $H$ 的一个完美匹配, 则 $E(F_1')$ 是 $H$ 中由 $k$ 条边构成的独立集, 记为

$$E(F_1') = \{u_1 w_{i_1}, u_2 w_{i_2}, \cdots, u_n w_{i_n}\},$$

其中整数 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是整数 $1, 2, \cdots, n$ 的重新排列, 且对任意 $j$ ($1 \leqslant j \leqslant n$), $i_j \neq j$. 假设 $i_t = 1$, 则 1 因子 $F_1'$ 可产生一个圈 $C^{(1)}: v_1, v_{i_1}, \cdots, v_t, v_{i_t} = v_1$. 若 $C^{(1)}$ 的长度为 $n$, 则 $G$ 的 Hamilton 圈 $C^{(1)}$ 是 $G$ 的一个 2 因子. 若 $C^{(1)}$ 长度小于 $n$, 则存在 $H$ 的某个顶点 $v_\ell$, 使得 $v_\ell$ 不在圈 $C^{(1)}$ 上的. 假设 $i_s = \ell$. 此时 $F_1'$ 可产生另一个圈 $C^{(2)}: v_\ell, v_{i_\ell}, \cdots, v_{i_s} = v_\ell$. 继续上面的操作, 我们可获得一族顶点互不相交的圈. 注意到, 该圈族包含 $H$ 的任一顶点仅一次, 故构成了 $G$ 的 2 因子 $F_1$. 按上述方法, 由 $H$ 的 1 因子分解 $F_1', F_2', \cdots, F_k'$ 可得到 $G$ 的 2 因子分解 $F_1, F_2, \cdots, F_k$, 即为所求. ■

下面我们举例说明定理 8.16, 考虑 4 正则图 $G \cong K_{2,2,2}$, 如图 8.11(a) 所示. 不难发现, $G$ 的一个 Euler 回路为

$$C: v_1, v_2, v_3, v_1, v_4, v_5, v_6, v_4, v_2, v_5, v_3, v_6, v_1.$$

由于 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$, 我们构造二部图 $H$ (见图 8.11(b)), 其部集为 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_6\}$ 和 $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_6\}$. 因为 $v_1v_2$, $v_2v_3$ 是 $C$ 上的边, 所以 $u_1w_2$, $u_2w_3$ 是 $H$ 上的边. 图 8.11(c) 所示为 $H$ 可能的 1 因子分解 $F_1'$, $F_2'$, 其对应的 $G$ 的 2 因子分解如图 8.11(d) 所示.

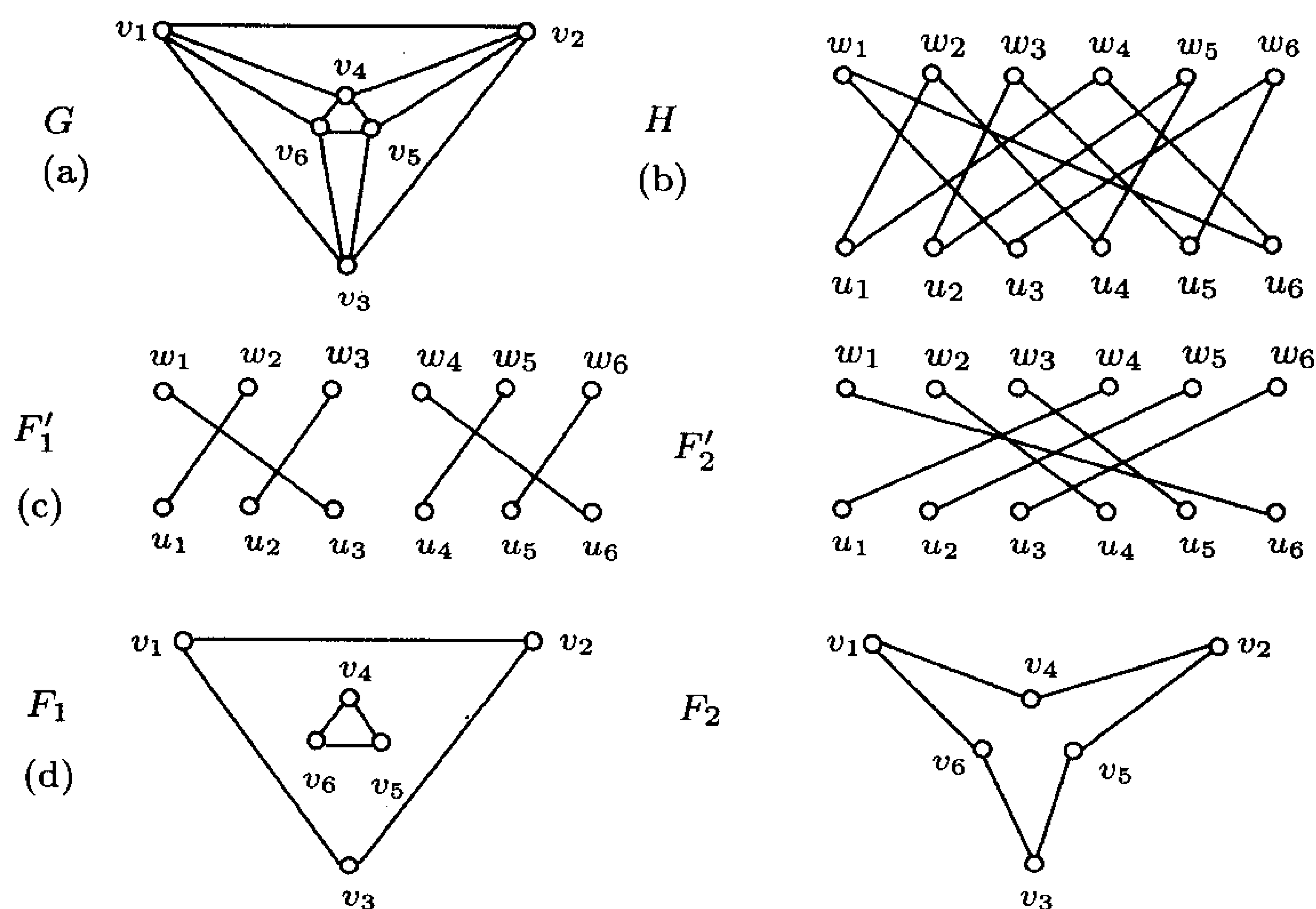



图 8.11　构造 4 正则图的 2 因子分解

由于完全图 $K_{2k+1}(k \geqslant 1)$ 是 $2k$ 正则的, 故 $K_{2k+1}$ 是可 2 因子分解的. $K_3$, $K_5$, $K_7$ 的 2 因子分解可如图 8.12 所示. 注意到, 不仅 $K_3$, $K_5$, $K_7$ 中每个图均有 2 因子分解, 而且对每个图均存在一个 2 因子分解, 使得其中每个 2 因子是 Hamilton 圈. 对于 $K_3$ 和 $K_5$, 这一情形更加明显. 图 $G$ 的一个**Hamilton 因子分解 (Hamiltonian factorization)**是指 $G$ 的一个 2 因子分解, 且满足该分解中所有 2 因子均是 Hamilton 圈. 图 $G$ 称为是**可 Hamilton 因子分解的 (Hamiltonian-factorable)**, 若 $G$ 有一个 Hamilton 因子分解. 下面我们将证明, 对于任一奇数 $n \geqslant 3$, 完全图 $K_n$ 是可 Hamilton 因子分解的. 在证明这一定理之前, 我们先来看几个关于完全图的注释, 它们将对该定理和后面一些定理的证明很有帮助.

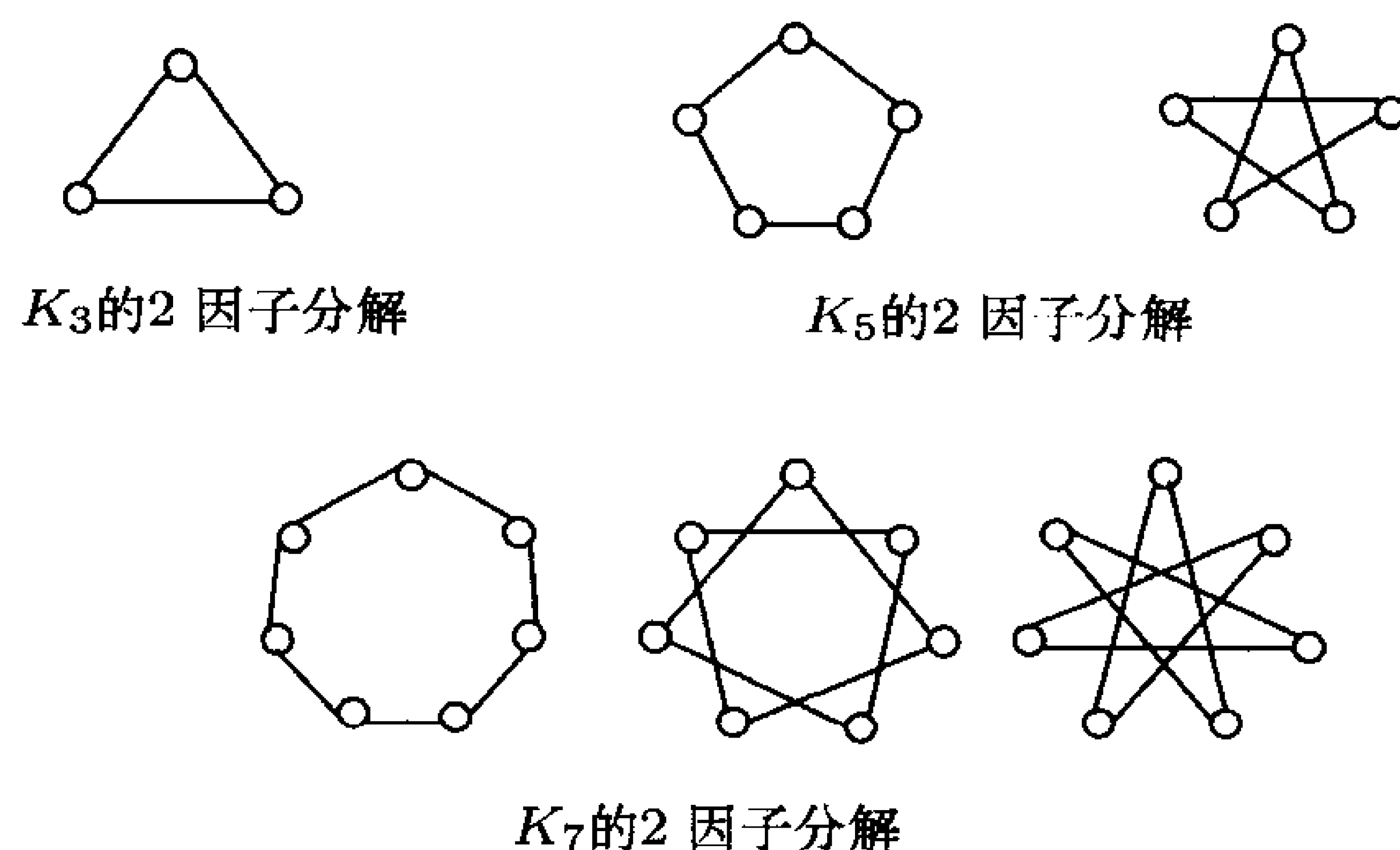



图 8.12　$K_3$, $K_5$, $K_7$ 的一些 2 因子分解

对于图 $G \cong K_n(n \geqslant 4)$, 其顶点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$. 不难发现, $G$ 包含 Hamilton 圈 $C: v_1,v_2,\cdots,v_n,v_1$. 对于 $G$ 中任意两个不同的顶点 $v_i$ 和 $v_j$(当然它们都在圈 $C$ 上), 记 $d_C(v_i,v_j)$ 为 $v_i$ 和 $v_j$ 在圈 $C$ 上的距离. 当 $n$ 为偶数时, $d_C(v_i,v_j)$ 为整数 $1,2,\cdots,n/2$ 中之一; 当 $n$ 为奇数时, $d_C(v_i,v_j)$ 为整数 $1,2,\cdots,(n-1)/2$ 中之一. 在讨论 $K_n$ 的构造时, 用 $d_C(v_i,v_j)$ 对边 $v_iv_j$ 标号很有用. 若 $n \geqslant 3$ 为奇数, 对任意 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant (n-1)/2)$, $G$ 有 $n$ 条标号为 $k$ 的边; 若 $n \geqslant 4$ 为偶数, 对于任意 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant (n-2)/2)$, $G$ 同样有 $n$ 条标号为 $k$ 的边, $n/2$ 条标号为 $n/2$ 的边. 如图 8.13 所示, 我们给出了 $K_4$ 和 $K_5$ 中所有边的标号, 以及 $K_6$ 中标号为 1 或 3 的边. 有些时候, 这种标号方式使用起来是非常方便的. 例如, 由 $K_n$ 构造 $K_{n+1}$ 时, 我们采用的办法是增加一个新的顶点, 再连接该顶点到 $K_n$ 的所有顶点. 此时, 我们只需将新添加的边标号为 0 即可.

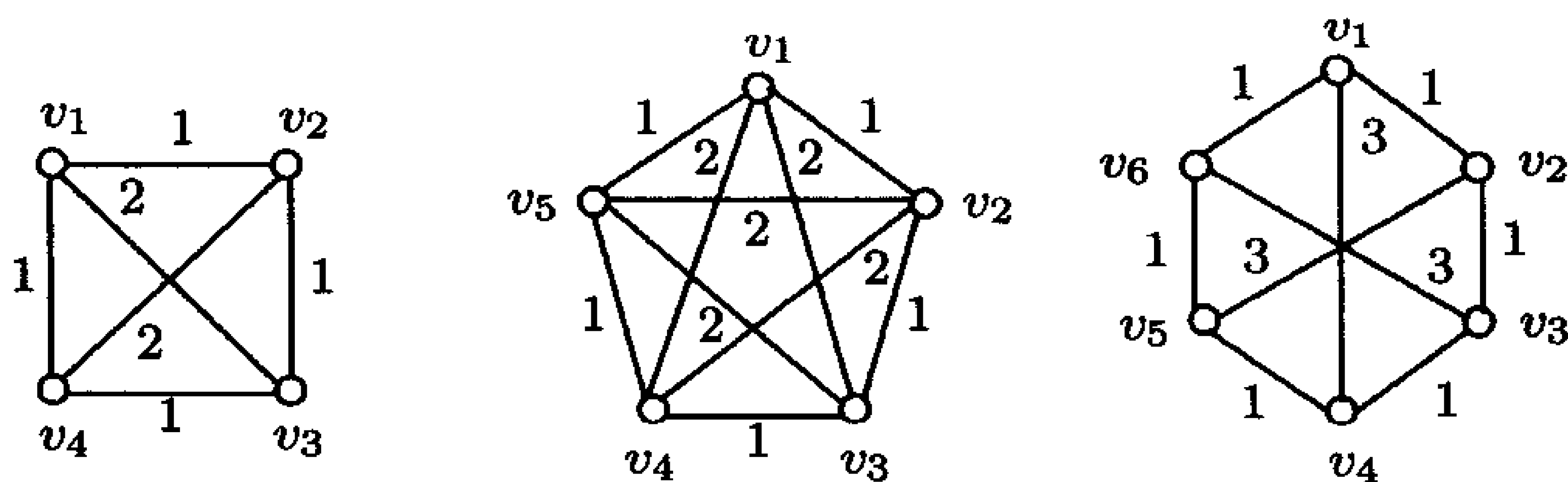



图 8.13 完全图的边标号

**定理 8.17** 对于任一整数 $k \geqslant 1$, 完全图 $K_{2k+1}$ 是可Hamilton因子分解的.

**证** [直接证明] 当 $1 \leqslant k \leqslant 3$, 定理显然成立. 下面假设 $k \geqslant 4$. 设 $G \cong K_{2k+1}$, $H \cong K_{2k}$, 其中 $V(H)=\{v_1,v_2,\cdots,v_{2k}\}$, $V(G)=V(H)\cup\{v_0\}$. 设 $H$ 的顶点为正 $2k$ 边形的顶点, $H$ 的边为连接对应顶点之间的直线段 ($k=4$ 时, 如图 8.14(a) 所示). 下面, 我们通过 $H$ 的 Hamilton 路 $P$ 来构造 $G$ 的 Hamilton 圈 $C$, 具体方法如下: 构造 $H$ 的 Hamilton 路 $P$ 开始于 $v_1,v_2,v_{2k},v_3,v_{2k-1}$, 通过 "之" 字形路线到达顶点 $v_{k+1}$, 路 $P$ 是一条 $v_1-v_{k+1}$ 路, 且 $P$ 的每条边或平行于 $v_1v_2$, 或平行于 $v_2v_{2k}$; 将顶点 $v_0$ 放置在正 $2k$ 边形内部一个合适的位置, 连接 $v_0$ 到 $v_1$ 和 $v_{k+1}$, 即可得到 $G$ 的 Hamilton 圈 $C$ ($k=4$ 时, 如图 8.14(b) 所示).

注意到, 按上述方法构造的 Hamilton 圈 $C$ 包含如下的边: 对 $0,1,\cdots,k-1$ 中每个整数, $C$ 有两条以该整数标号的边, $C$ 有一条标号为 $k$ 的边. 将 $H$ 的 Hamilton 路沿顺时针方向旋转角度 $\pi/k$, 即可得到 $H$ 的一条新 Hamilton 路 $P'$, 且 $P'$ 与 $P$ 是边不相交的. 显然, 路 $P'$ 是一条 $v_2-v_{k+2}$ 路. 通过连接 $v_0$ 到 $v_2$ 和 $v_{k+2}$, 即可得到 $G$ 的一条与 $C$ 边不相交的 Hamilton 圈 $C'$. 我们继续上述操作, 直到构造出 $G$ 的 $k$ 个 Hamilton 圈, 这 $k$ 个 Hamilton 圈构成了 $G$ 的 Hamilton 因子分解. (完全图 $K_9$ $(k=4)$ 的 Hamilton 因子分解如图 8.15 所示.) 一般地, 对于任一 $i(1 \leqslant i \leqslant k)$,

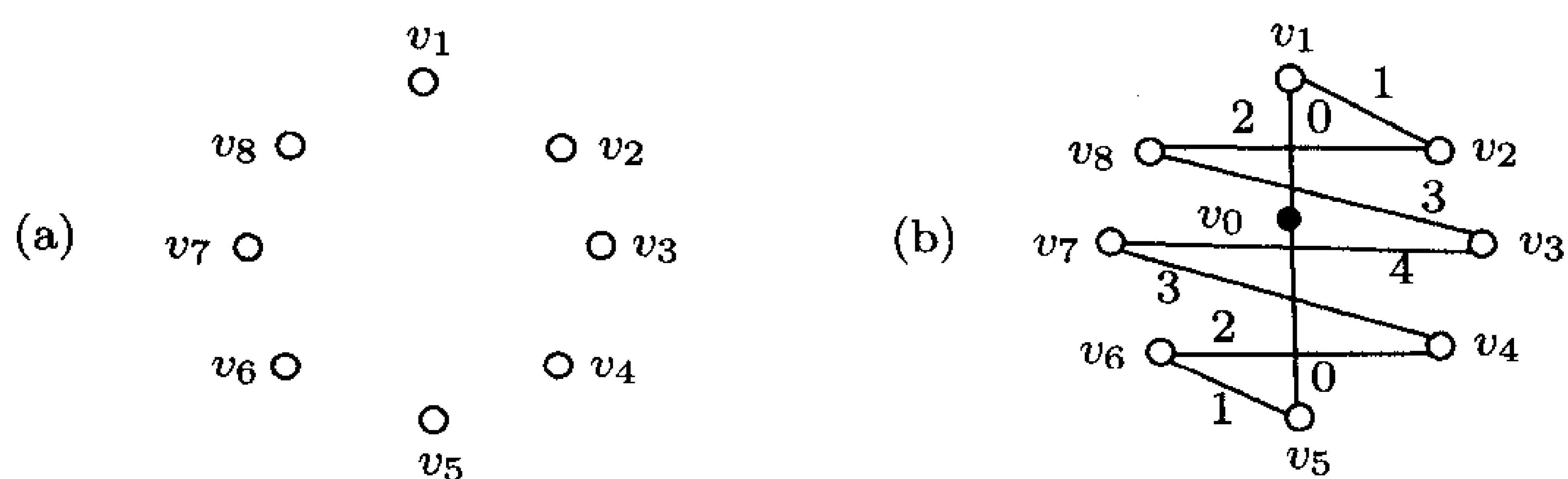



图 8.14　$K_9$ 中 Hamilton 圈的构造过程

$G$ 的第 $i$ 个 Hamilton 圈为

$$v_0, v_i, v_{i+1}, v_{i-1}, v_{i+2}, v_{i-2}, \cdots, v_{k+i+1}, v_{k+i-1}, v_{k+i}, v_0,$$

其中下标实施了模 $2k$ 的运算. ■

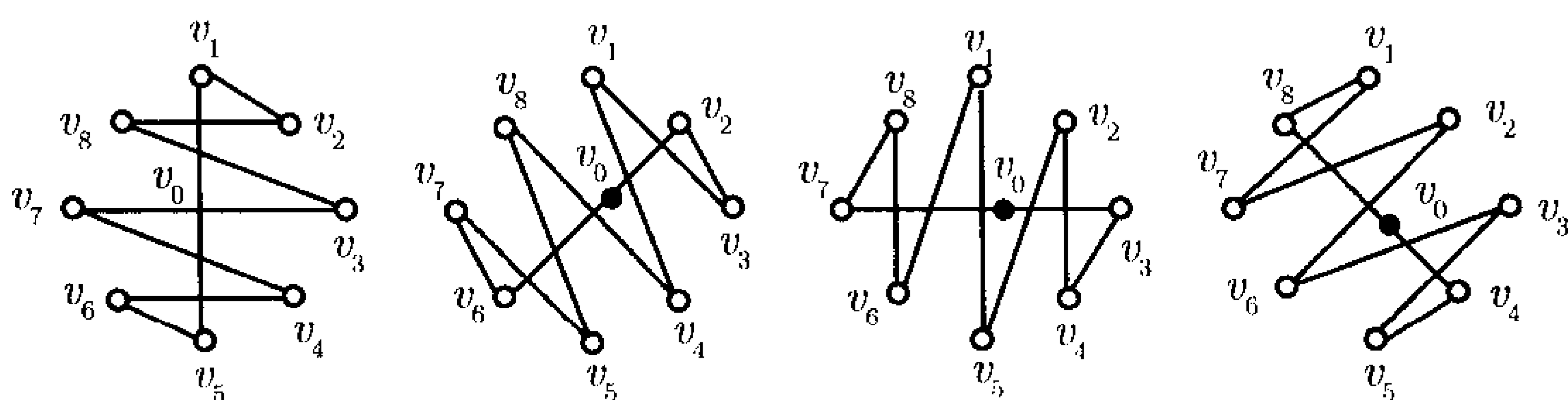



图 8.15　$K_9$ 的 Hamilton 因子分解

更为一般地, 图 $G$ 不含有孤立点的生成子图 $F$ 称为是 $G$ 的**因子 (factor)**. 图 $G$ 称为是**可因子分解 (factorable)**为因子 $F_1$, $F_2$, $\cdots$, $F_k$, 若 $\{E(F_1), E(F_2), \cdots, E(F_k)\}$ 是 $E(G)$ 的一个划分. 若存在某个图 $F$, 使得每个因子 $F_i \cong F$, 则称 $G$ 是**可 $F$ 因子分解的 ($F$-factorable)**. 不难看出, 对于 $n$ 阶图 $G$, $G$ 是可 $(n/2)K_2$ 因子分解的当且仅当 $G$ 是可 1 因子分解的; $G$ 是可 $C_n$ 因子分解的当且仅当 $G$ 是可 Hamilton 因子分解的.

我们已经知道, $K_9$ 是可 Hamilton 因子分解的 (分解为四个 Hamilton 圈). 此外, 由定理 8.16, 我们知道 $K_9$ 是可 2 因子分解的. 事实上, $K_9$ 因子分解为 Hamilton 圈仅仅是 $K_9$ 一种类型的 2 因子分解. 例如, $3K_3$ 是 $K_9$ 的另外一个 2 因子.

**例 8.18**　图 $K_9$ 是可 $3K_3$ 因子分解的.

**解**　如图 8.16 所示, 我们将顶点 $v_1$, $v_2$, $\cdots$, $v_8$ 循环地放置在正 8 边形的顶点处, 将 $v_0$ 放置在正 8 边形内部某个适当的位置. $K_9$ 的一个 $3K_3$ 因子 $F_1$ 如图 8.16 所示, 其中标号为 0, 1, 2, 3 的边各有两条, 标号为 4 的边有一条. 我们将 $F_1$ 沿顺时针方向旋转角度 $\pi/4$ 三次, 即可得到三个新的 $3K_3$ 因子 $F_2$, $F_3$, $F_4$, 从而得到 $K_9$ 的 $3K_3$ 因子分解. ◇

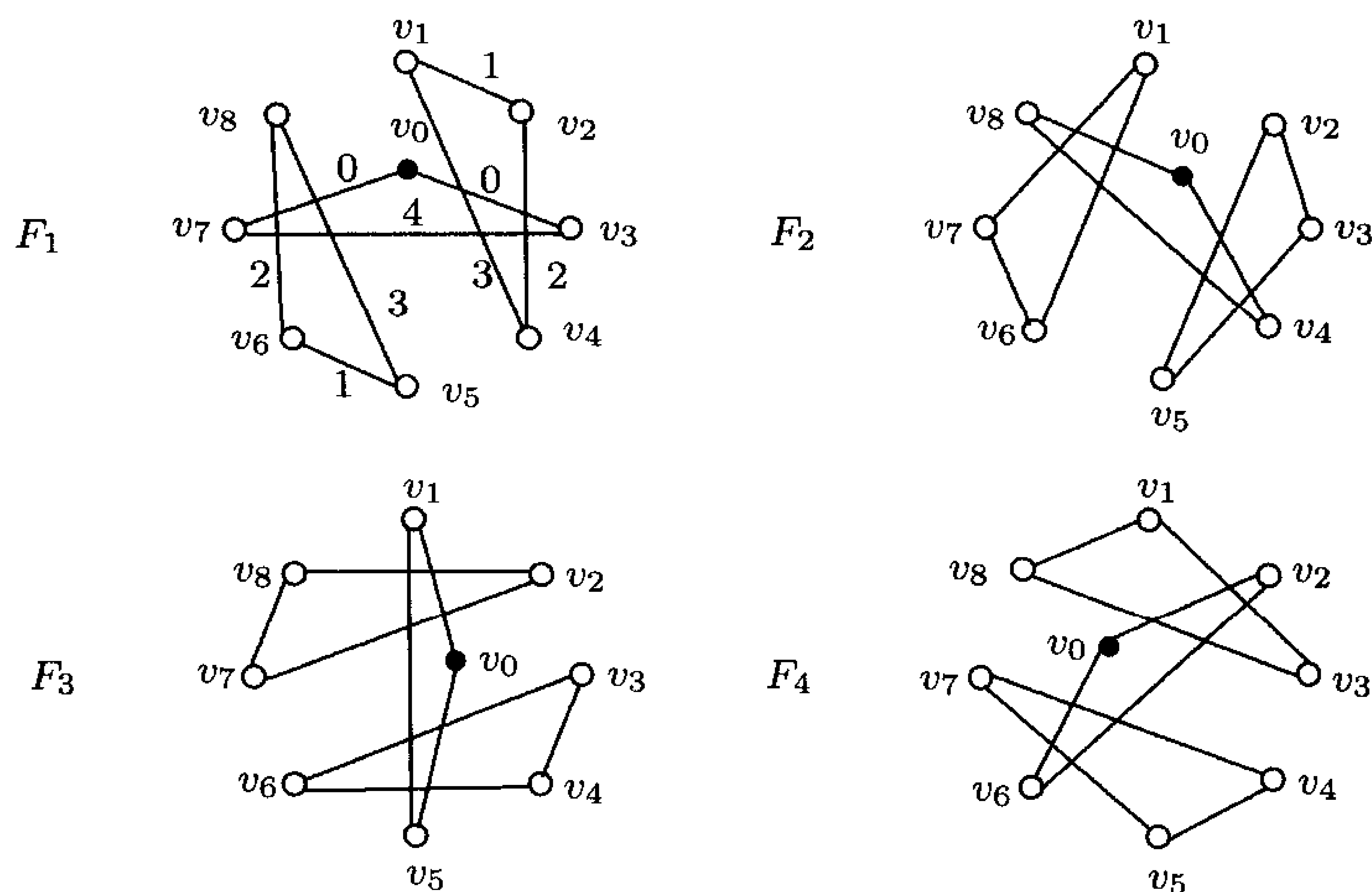



图 8.16 图 $K_9$ 的 $3K_3$ 因子分解

下面的问题是由 Thomas Kirkman 于 1950 年提出的, 后来常被人们称为是**Kirkman 女生问题 (Kirkman's Schoolgirl Problem)**:

学校的某名女老师有 15 名女生, 该女老师想安排这些女生承担值日巡逻工作. 巡逻时, 要求排成 5 行, 每行 3 人. 要求在一周之内, 任意两个女生排在同一行巡逻的次数不超过一次. 问: 是否能够找到上述安排方案?

如果我们仔细考虑, 不难发现该问题可改述为: 是否存在 $K_{15}$ 的 $5K_3$ 因子分解? 若我们将 $K_{15}$ 的顶点标号为这些女生, 记为 $1,2,\cdots,15$, 则下表给出安排方案.

| 第 1 天 | 第 2 天 | 第 3 天 | 第 4 天 | 第 5 天 | 第 6 天 | 第 7 天 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| {1, 2, 3} | {1, 4, 5} | {1, 6, 7} | {1, 8, 9} | {1, 10, 11} | {1, 12, 13} | {1, 14, 15} |
| {4, 8, 12} | {2, 9, 11} | {2, 8, 10} | {2, 5, 7} | {2, 12, 15} | {2, 5, 6} | {2, 4, 7} |
| {5, 10, 14} | {3, 13, 15} | {3, 12, 14} | {3, 13, 14} | {3, 4, 6} | {3, 9, 10} | {3, 8, 11} |
| {6, 9, 15} | {6, 8, 14} | {4, 9, 13} | {4, 10, 15} | {5, 8, 13} | {4, 11, 14} | {5, 9, 12} |
| {7, 11, 13} | {7, 10, 12} | {5, 11, 15} | {6, 11, 12} | {7, 9, 14} | {7, 8, 15} | {6, 10, 13} |

尽管 $K_{15}$ 有 $5K_3$ 因子分解, 但可以证明, $K_{15}$ 没有循环的 $5K_3$ 因子分解 (很难去构造这样的因子分解). 从图 8.16 中, 我们可以看出 $K_9$ 是可 $3K_3$ 因子分解的. 因此, 下面的命题是正确的.

9 个女生参加 4 天的道路巡逻, 巡逻时, 要求排成 3 行, 每行 3 人. 且任意两个女生排在同一行巡逻的次数不超过一次. 我们可以给出满足上述要求的安排方案.

若 $n$ 阶完全图 $G$ 有一个 2 因子分解, 且其中每个 2 因子的任一连通分支均为三角形, 则对于某个正整数 $t$, $G$ 是可 $tK_3$ 因子分解的. 从而, $n = 3t$. 由于 $G$ 中任一顶点 $v$ 在 $G$ 的每个 2 因子中的度均为 2, 故 $v$ 在 $G$ 中的度为偶数. 因此, $n-1$

是偶数, 从而 $n=3t$ 是奇数, 这就意味着 $t$ 是奇数. 因此, 存在某个非负整数 $k$, 使得 $t=2k+1$, $n=6k+3$. 故 $G$ 是可 $(2k+1)K_3$ 因子分解的.

一个 $n$ 阶的**Kirkman 三元系 (Kirkman triple system)**是由一个基数为 $n$ 的集合 $S$, 和 $S$ 的三元子集 (称为**三元组 (triple)**) 族 $T$, 以及 $T$ 的一个划分 $\mathcal{P}$ 构成, 且满足如下性质:

(1) $S$ 中任意两个不同的元素属于 $T$ 中唯一的三元组,

(2) $S$ 中任一元素属于划分 $\mathcal{P}$ 的每一元素的唯一的三元组.

不难发现, 若存在一个 $n$ 阶的三元组, 则对于某个非负整数 $k$, $n=6k+3$. 事实上, 存在一个 $6k+3$ 阶 Kirkman 三元系当且仅当存在一个 $K_{6k+3}$ 的 $(2k+1)K_3$ 因子分解. 1971 年, Dijen Ray-Chaudhuri 和 Richard Wilson 给出了 $n$ 阶 Kirkman 三元系存在性的刻画.

**定理 8.19** *$n(n\geqslant 3)$ 阶的Kirkman三元系存在当且仅当 $n\equiv 3 \pmod 6$.*

对于 $K_{2k}$ $(k\geqslant 2)$, 由于 $K_{2k}$ 是 $(2k-1)$ 正则的, 故 $K_{2k}$ 不是可 Hamilton 因子分解的. 但由下面定理可以看出, $K_{2k}$ 的因子分解已经非常接近Hamilton因子分解了.

**定理 8.20** *对于每个整数 $k\geqslant 1$, 完全图 $K_{2k}$ 可因子分解为 $k-1$ 个Hamilton圈和一个 1 因子.*

**证** [直接证法] 由于 $k=1$ 和 $k=2$ 时, 结论显然成立. 下面假设 $k\geqslant 3$. 设 $G\cong K_{2k}$, 其中 $V(G)=\{v_0,v_1,\cdots,v_{2k}\}$. 令 $v_1,v_2,\cdots,v_{2k}$ 是正 $(2k-1)$ 边形的顶点, 我们将 $v_0$ 放置在正 $(2k-1)$ 边形的中心位置, 同时用直线段连接 $G$ 的任意两个顶点. 设 $G_1$ 为 $G$ 的生成子图, 其边集为 (1) $v_0v_1$ 和 $v_0v_{k+2}$, (2) 所有与 $v_0v_1$ 平行的边, (3) 所有与 $v_0v_{k+2}$ 平行的边. 故 $G_1\cong C_{2k}$. 对于 $1\leqslant i\leqslant k-1$, 设 $G_i$ 为 $G$ 的生成子图, 其边集为 (1) $v_0v_i$ 和 $v_0v_{k+i+1}$, (2) 所有与 $v_0v_i$ 平行的边, (3) 所有与 $v_0v_{k+i+1}$ 平行的边. 不难发现, 对于任一 $i$ $(1\leqslant i\leqslant k-1)$, $G_i\cong C_{2k}$; 且除了边 $v_1v_{2k-1},v_2v_{2k-2},\cdots,v_{k-1}v_{k+1},v_0v_k$ 之外, $G$ 的任一条边均属于某个子图 $G_i$ $(1\leqslant i\leqslant k-1)$, 而 $v_1v_{2k-1},v_2v_{2k-2},\cdots,v_{k-1}v_{k+1},v_0v_k$ 恰为 $G$ 的 1 因子, 记为 $G_k$. 因而, $G$ 可因子分解成 $G_1,G_2,\cdots,G_k$. (当 $k=4$ 时, 如图 8.17 所示.) ■

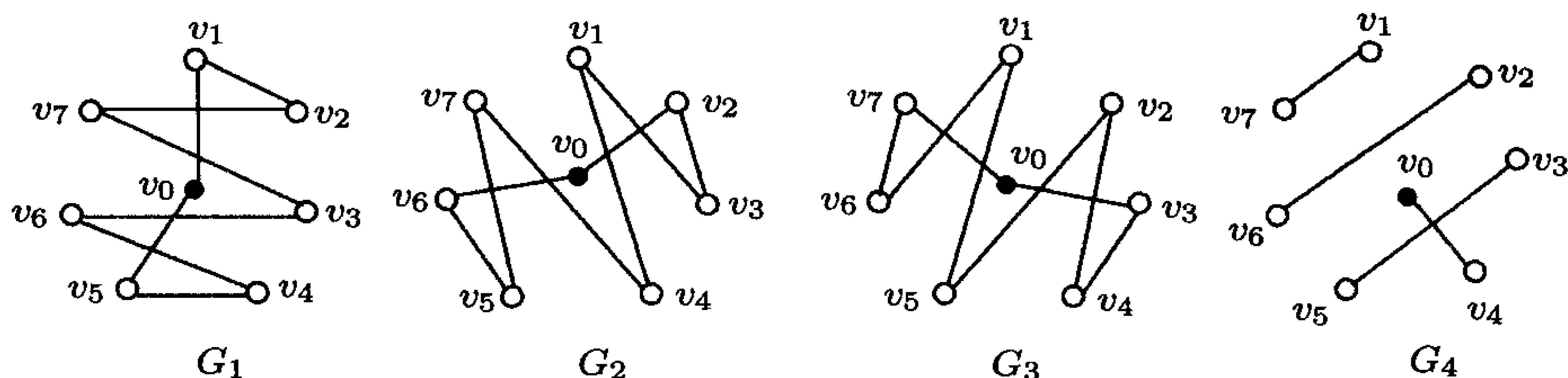



图 8.17 $K_8$ 的因子分解

## 习题

8.17 判断图 8.18 所示的 3 正则图 $G_1, G_2, G_3$

(a) 是否有 1 因子?

(b) 是否可 1 因子分解?

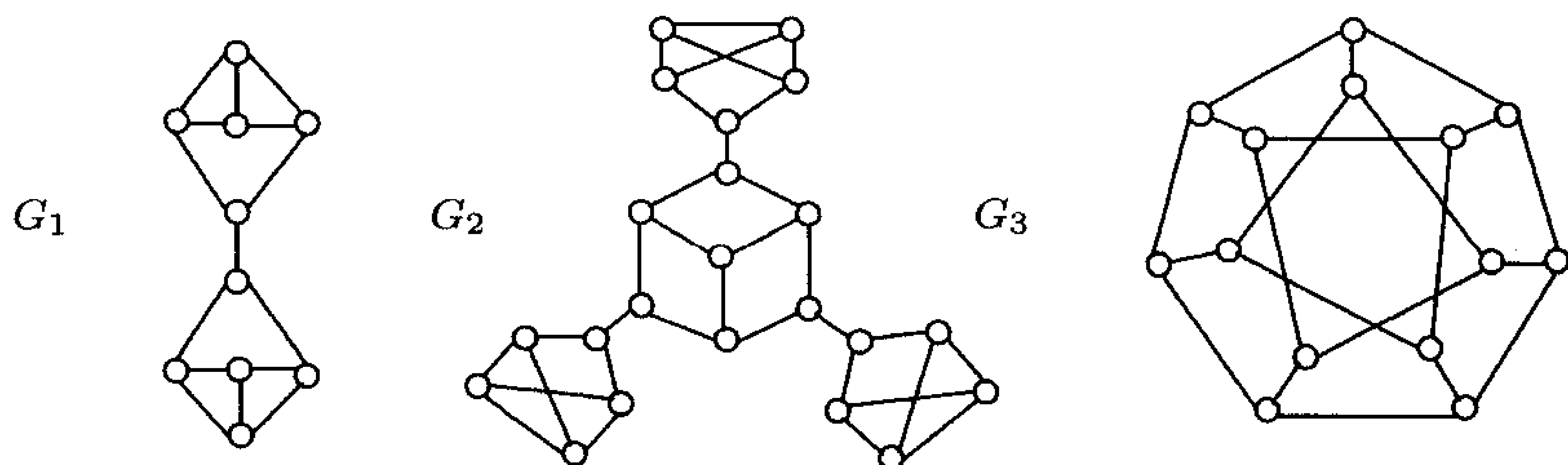



图 8.18 习题 8.17 的图

8.18 列举一个不含 1 因子的 5 正则图.

8.19 图书俱乐部的 9 名会员通过每周一次的聚餐来讨论上周他们看过的书. 聚餐时使用圆形的餐桌. 怎样安排每次的位置才能使得一个月之内 (每月聚会四次) 任意两个会员恰好有一次在餐桌上彼此相邻?

8.20 利用在定理 8.11 证明中的技巧证明定理 8.12: 任一至多含两条割边的 3 正则图包含 1 因子.

8.21 利用 Tutte 关于图有 1 因子的刻画 (即定理 8.10), 证明: $K_{3,5}$ 没有 1 因子.

8.22 (a) 说明 Petersen 定理 (定理 8.11) 可被推广到: 若图 $G$ 不含割边, 且任一顶点的度只可能是 3 或 5, 且度为 5 的顶点至多有两个, 则 $G$ 包含 1 因子.

(b) 说明 (a) 中的结果不能被进一步推广, 即构造一个不含割边的图 $G$, 使得 $G$ 恰包含 3 个度为 5 的顶点, 其余顶点的度为 3, 但 $G$ 不含 1 因子.

8.23 证明: 若 3 正则图的所有割边均位于同一条路上, 则 $G$ 包含 1 因子.

8.24 证明: 任一不含割边的 3 正则图包含 2 因子.

8.25 证明: $C_n \times K_2 (n \geqslant 4)$ 是可 1 因子分解的.

8.26 对于图 8.19 所示的 4 正则图 $G$, 证明: 对 $G$ 的任意 2 因子分解, 都恰好包含一个 2 因子, 使得该 2 因子为 $G$ 的 Hamilton 圈.

8.27 如图 8.11 所示, 图 $G \cong K_{2,2,2}$ 被 2 因子分解成 2 因子 $F_1 \cong 2C_3$ 和 $F_2 \cong C_6$. 列举 $G \cong K_{2,2,2}$ 的另一个 2 因子分解, 使得该图被 2 因子分解成 2 因子 $F_1^*$ 和 $F_2^*$, 其中 $F_i^* \cong C_6 (i = 1, 2)$. 利用定理 8.16 的证明方法, 列举 $G$ 的一条 Euler 回路 $C^*$ 以及由此产生的 2 因子分解.

8.28 设 $G$ 为 6 正则图, 证明: 若 $G$ 包含两个边不相交的 1 因子, 则 $G$ 是可 3 因子分解的.

8.29 证明: 对于任一正偶数 $n$, 完全图 $K_n$ 可因子分解成 Hamilton 路.

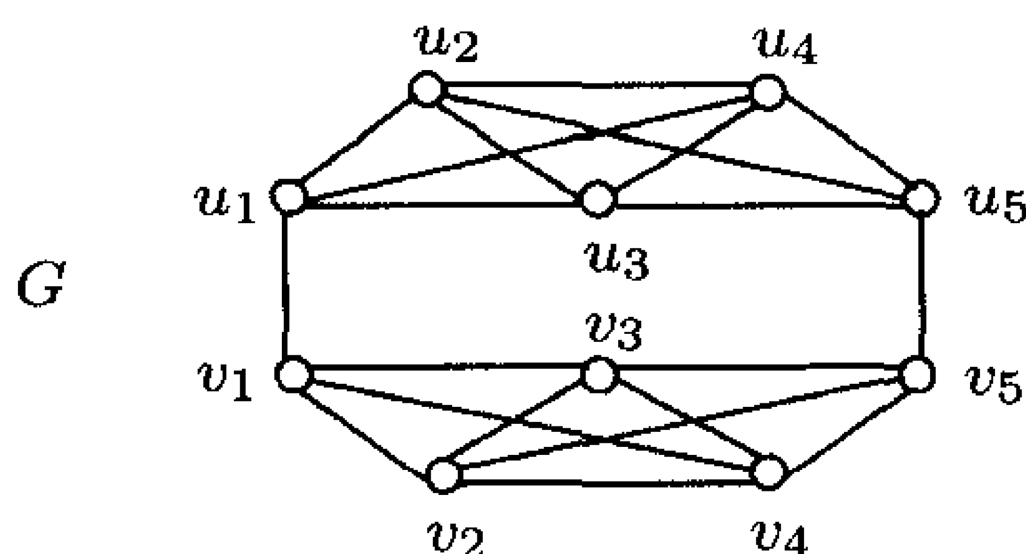



图 8.19　习题 8.26 的图 $G$

8.30　解决下面 27 个女生的巡逻问题：学校的某名女老师有 27 名女生，她们要承担学校的值日巡逻工作. 巡逻时，要求每 3 个人一组，排成 9 行. 证明：可以给出满足下述要求的巡逻方案，即在 13 天之内，任意两个女生排在同一行巡逻的次数不超过一次.

8.31　是否存在 $K_7$ 的 2 因子分解，使得该 2 因子分解的所有 2 因子均不是 Hamilton 圈?

8.32　是否存在 $K_9$ 的 2 因子分解，使得该 2 因子分解中任意两个 2 因子都不同构?

## 8.3　分解与优美标号

若图 $G$ 可因子分解成子图 $F_1, F_2, \cdots, F_k$，根据定义，任意子图 (因子) $F_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 均不包含孤立点且是 $G$ 的生成子图. 本节，我们将继续讨论与因子分解相关的一些概念.

称图 $G$**可分解 (decomposable)**成子图 $H_1$, $H_2$, $\cdots$, $H_k$，若任一子图 $H_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 不含孤立点，且 $\{E(H_1), E(H_2), \cdots, E(H_k)\}$是 $E(G)$ 的一个划分. 此时，子图 $H_i$ 并不要求是 $G$ 的生成子图. 当然，若每个 $H_i$ 均为 $G$ 的生成子图，则上述分解即是 $G$ 的因子分解. 若存在某个子图 $H$，使得 $H_i \cong H(1 \leqslant i \leqslant k)$，则 $G$ 是**可 $H$ 分解的 ($H$-decomposable)**，对应的分解是一个**$H$ 分解 ($H$-decomposition)**.

涉及上述概念的一个引人注意的问题是：哪些完全图 $K_n$ 是可 $K_3$ 分解的? 我们对该问题很感兴趣. 为了保证完全图 $K_n$ 是可 $K_3$ 分解的，$K_n$ 的边数必须可被 3 整除，即 3 可整除 $\binom{n}{2}$，从而 $n(n-1)/6$ 为整数. 故 $3 \mid n$ 或 $3 \mid (n-1)$. 进一步分析，由于 $K_n$ 任一顶点的度为 $n-1$，则 $K_n$ 的任一顶点必须位于 $(n-1)/2$ 个三角形上，故 $n$ 必为奇数. 这就是说，$n = 3p$(对于某个奇数 $p$) 或者 $n = 3q + 1$(对于某个偶数 $q$). 从而，对于某个整数 $k$，$n = 6k + 1$ 或 $n = 6k + 3$，即 $n \equiv 1 \pmod 6$ 或 $n \equiv 3 \pmod 6$.

一个 $n$ 阶的**Steiner 三元系 (Steiner triple system)**是由一个基数为 $n$ 的集合 $S$，以及 $S$ 的三元子集 (称为**三元组 (triples)**) 族 $T$ 构成，且满足如下性质：$S$ 的任意两个不同的元素属于 $T$ 中唯一的三元组. 不难发现，存在 $n$ 阶 Steiner 三元系当且仅当 $K_n$ 是可 $K_3$ 分解的. 因而，为了保证 $n$ 阶Steiner三元系存在，则 $n \equiv 1 \pmod 6$ 或 $n \equiv 3 \pmod 6$. 1846 年，Kirkman 证明了该命题的逆同样成立.

**定理 8.21** $n \geqslant 3$ 阶的Steiner三元系存在当且仅当 $n \equiv 1 \pmod 6$ 或 $n \equiv 3 \pmod 6$.

对于平凡情形, 由于 $K_3$ 显然是可 $K_3$ 分解的, 故阶为 3 的 Steiner 三元系是存在的. 第一个有趣且非平凡情形为 $K_7$. 为判断 $K_7$ 是否是可 $K_3$ 分解的, 我们采用如下方式: 令 $v_1, v_2, \cdots, v_7$ 是正 7 边形的顶点, 任意两个顶点之间用一条直线段连接, 并记由顶点 $v_1, v_2, v_4$ 构成的三角形为 $H_1$(如图 8.20 所示). 参考上节中类似问题的处理方法, 我们发现 $H_1$ 的三条边分别标号为 1, 2, 3. 将 $H_1$ 沿顺时针方向旋转角度 $2\pi/7$, 即可得到三角形 $H_2$. 重复上面的操作, 我们即可得到 $K_7$ 的 $K_3$ 分解. 从 $K_7$ 的 $K_3$ 分解中, 我们已经获得来自于集合 $\{1, 2, \cdots, 7\}$ 的一个 7 阶 Steiner 三元系, 如下所示:

$$\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}.$$

该 $K_3$ 分解称为是 $K_7$ 的**循环分解 (cyclic decomposition)**.

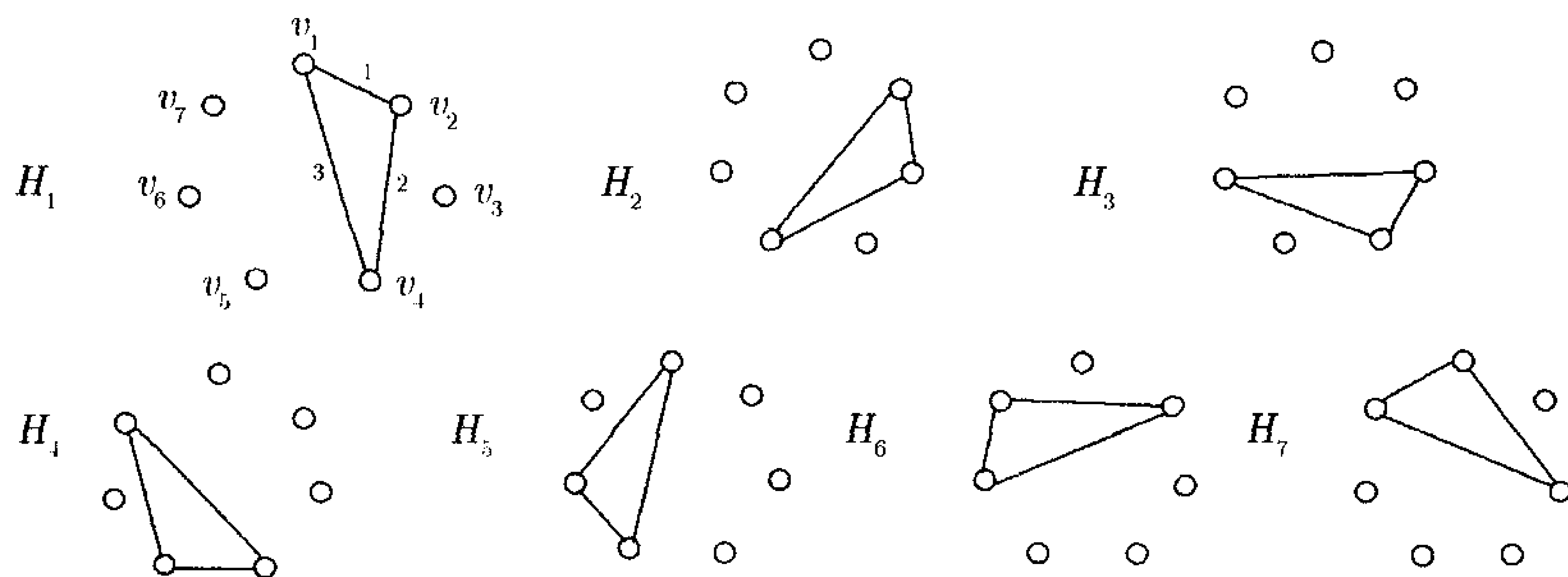



图 8.20 $K_7$ 的循环 $K_3$ 分解

Steiner 三元系是以 Jakob Steiner 来命名的. 1796 年 3 月 18 日, 他出生于瑞士的 Utzenstorf. Steiner 是农民夫妇的儿子, 一直到他 14 岁还没有读过书. 在随后的 4 年里, 他的数学天赋得到了人们的承认. 因此, 在 18 岁时, 他被允许到瑞士一所很有声望的学校读书, 尽管这违背了他父母的意愿. 1818 年, Steiner 进入了海德堡大学, 在此他开设数学方面的私人课程. 1821 年, 他前往柏林大学, 且继续依靠教书维持生计. 在柏林期间, 他结识了 Niels Abel(阿贝尔群以他命名), Carl Jacobi(雅可比行列式以他命名) 和 August Crelle.

在那个时代, 尽管 August Crelle 并不像另外两名数学家那样才华横溢、那样著名, 但他仍然对数学作出了重要贡献. Crelle 是一名非常狂热的数学家, 他有很好的组织天赋和人们公认的数学能力. Crelle 全身心地投入数学, 他擅长发现别人的数学能力. 1826 年 Crelle 创办了一份纯数学杂志 (通常也称为是*Crelle's Journal*), 名为*Journal für reine und angewandte Mathematik* (该杂志依然存在). 1826 年之前, 其他的数学杂志一般报道在学术和学会会议消息, 而*Crelle's Journal*则着重于数学.

Crelle 全面负责杂志工作, 并担任前 52 卷的总编辑.

Crelle 意识到 Abel 研究工作的重要性, 在他杂志的第一卷中便刊登了 Abel 的关于五次方程根式不可解性的证明. Steiner 也是该杂志第一卷的主要投稿者. 除了 Abel 和 Steiner, 其他一些数学家也是通过在该杂志上发表第一篇文章而使他们的早期工作非常著名, 包括 Lejeune Dirichlet 和 August Möbius. 事实上, Möbius 的几乎所有的研究成果都发表在*Crelle's Journal*上.

Kirkman 三元系比 Steiner 三元系的要求更为苛刻. 由定理 8.21, 若 $n \equiv 1 \pmod 6$, 则 $n \geqslant 7$ 阶的 Steiner 三元系是存在的; 但这些都不是 Kirkman 三元系, 因为 $n \equiv 3 \pmod 6$ 是 Kirkman 三元系存在的必要且充分条件, 参见定理 8.19. Kirkman 的首篇文章发表于 1846 年. 在这篇文章中, Kirkman 解决了早年出现在女士和绅士的日记中的一个问题, 即 Steiner 三元系的存在性被验证了 (定理 8.21). 令人奇怪的是, 这篇文章比 Steiner 在*Crelle's Journal* 发表的一篇相关文章早了七年, Steiner 在他的文章中问到, 是否存在这样的一个系统 (即 Steiner 三元系)? 尽管 Kirkman 的工作先于 Steiner, 但这个三元系是以 Steiner 命名的, 而不是以 Kirkman 命名的. 事实上, Kirkman 考虑 Hamilton 圈的概念也先于 Hamilton. 这就是 Kirkman 的命运.

1806 年 3 月 31 日, Thomas Penyngton Kirkman 出生于英国的 Bolton. 尽管 Kirkman 的父亲并不想让他去读大学, 但他还是进入了爱尔兰的都柏林三一学院. 1835 年, Kirkman 回到了英国, 并加入了英国国教. 1839 年, 他成为了 Lancashire 郡 Southworth 教区的一名教区牧师. 在这一岗位上, 他度过了 52 年. 令人尊敬的 Thomas Kirkman 对数学的兴趣日益变得浓厚. 他在组合论、四元数、几何学和纽结理论上都作出了很多贡献, 尽管他最被人们记得的是他的那个女生问题. 1895 年 2 月 4 日, Kirkman 在英国 Bowdon 去世.

分解问题的另外一种重要类型涉及到树. 1967 年, Gerhard Ringel 猜想: 若 $T$ 为边数为 $k$ 的树, 则 $K_{2k+1}$ 是可 $T$ 分解的. 这个猜想至今没有被解决, 但它与另外一个猜想相关.

设 $G$ 是阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图. 一一映射 $f: V(G) \to \{0, 1, 2, \cdots, m\}$称为是 $G$ 的**优美标号 (graceful labeling)**, 若诱导的边标号 $f'$: $E(G) \to \{1, 2, \cdots, m\}$也为一一映射, 其中, 对于 $G$ 每条边 $e = uv$,

$$f'(e) = |f(u) - f(v)|.$$

$f$ 的**补标号 (complementary labeling)**定义为 $g$: $V(G) \to \{0, 1, 2, \cdots, m\}$, 其中, 对于任意 $v \in V(G)$, $g(v) = m - f(v)$. 因此, 对应于补标号 $g$ 所诱导的边标号为: 对于 $e = uv$,

$$g'(e) = |g(u) - g(v)| = |(m - f(u)) - (m - f(v))| = |f(u) - f(v)| = f'(e).$$

所以, 若 $f$ 是 $n$ 阶图 $G$ 的优美标号, 则其补标号 $g$ 也是优美标号. 拥有优美标号的图 $G$ 称为是**优美图 (graceful graph)**.

图 8.21 给出了 5 个优美图, 其中包括完全图 $K_3$ 和 $K_4$, 圈 $C_4$. 这 5 个图连同其优美标号可如下所示:

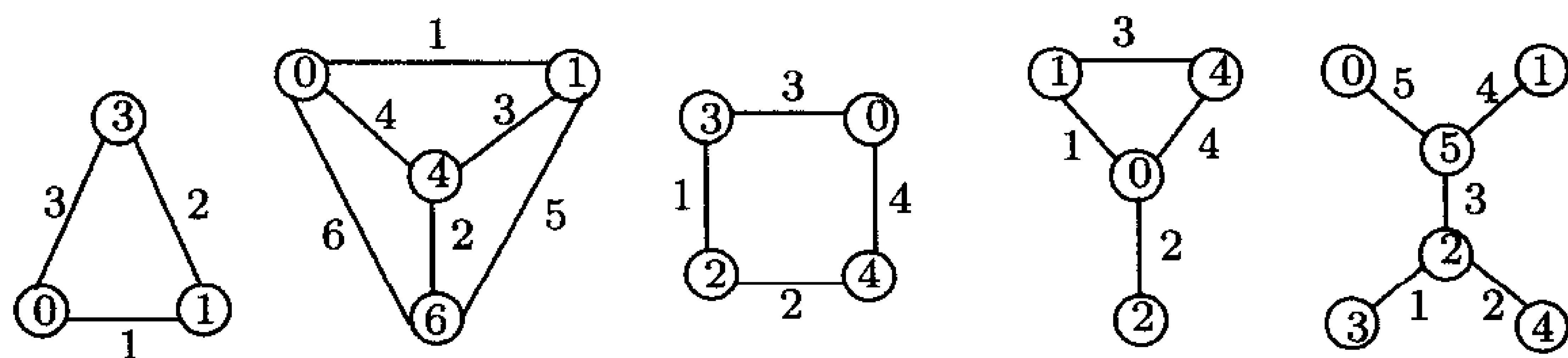


图 8.21 优美图

然而, 同样存在很多图, 它们不是优美的.

**例 8.22** 圈 $C_5$ 不是优美图.

**解** 设 $H \cong C_5$(如图 8.22(a) 所示). 假设结论不成立, 即 $H$是优美的. 则存在优美标号 $f : V(H) \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. 由于 $H$ 的某条边在诱导的边标号中标号为 5, 则 $H$ 中存在两个标号分别为 0 和 5 的邻接顶点.

$H$ 中标号为 4 的边仅可能存在下面两种情形: 与其关联顶点的标号或为 0 和 4, 或为 1 和 5. 因为 $f$ 或其补标号必有其一可使得这对邻接的顶点标号为 0 和 4, 所以我们可以假设 $H$ 的 5 个顶点中, 3 个顶点的标号情形可如图 8.22(b) 所示. 由于已经存在一条标号为 4 的边, 故顶点 $w$ 不能标号为 1. 若 $x$ 的标号为 1, 则 $w$ 必须标 2 或 3, 无论是哪种标号均不能构成 $H$ 的优美标号. 因此, $x$ 和 $w$ 中必存在一个标号为 2 的顶点, 一个标号为 3 的顶点. 然而, 这也不能构成 $H$ 的优美标号. ◇

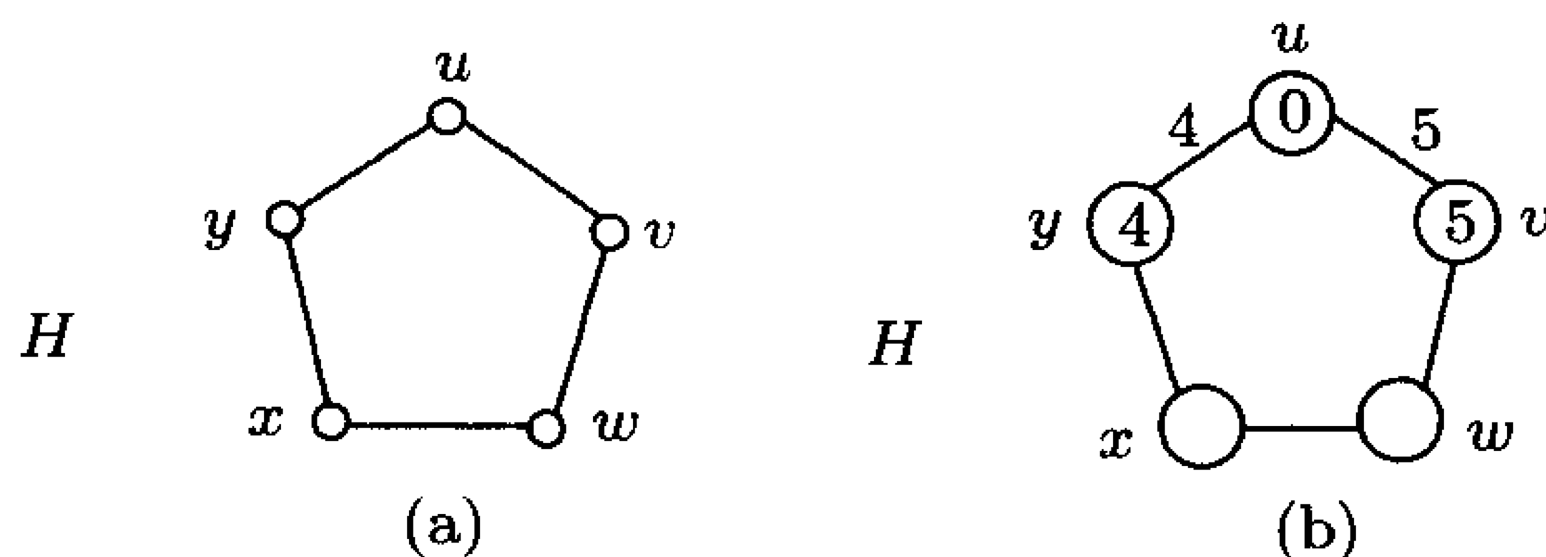



图 8.22 例 8.22 的图 $H$

图 8.21 中最右边的图是树, 不难看出它是一个双星图. 图中给出的标号表明, 该树是一个优美图. 事实上, 关于树有一个著名的猜想, 它归功于 Gerhard Ringel 和 Anton Kotzig.

**猜想 8.23** 任意树是优美的.

若猜想 8.23 是正确的，则对于任意 $n$ 阶树 $T$，存在优美标号 $f: V(T) \to \{0,1,2,\cdots,n-1\}$. 显然，该标号必为双射函数. 对该猜想的兴趣在于：该猜想的正确可推出 Ringel 的一个早期分解猜想的正确. 它们之间的关系是由 Alexander Rosa 建立的.

**定理 8.24** *若 $T$ 是边数为 $k$ 的优美树，则 $K_{2k+1}$ 是可 $T$ 分解的.*

**证** [直接证法] 由于 $T$ 是优美树，则存在优美标号 $f: V(T) \to \{0,1,2,\cdots,k\}$. 设 $V(T)=\{v_0,v_1,\cdots,v_k\}$，对于 $0 \leqslant i \leqslant k$，我们可以假设 $f(v_i)=i$. $f$ 诱导的边标号将标号 $1,2,\cdots,k$ 分配给 $T$ 的每条边. 设 $G \cong K_{2k+1}$，其中 $V(G)=\{v_0,v_1,\cdots,v_{2k}\}$. 令 $G$ 的顶点为正 $(2k+1)$ 边形的顶点，用连接两顶点之间的直线段表示 $G$ 的每条边. 不难发现，$T$ 是 $G$ 的一个子图，其中对每个整数 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$，$T$ 有一条标号为 $i$ 的边. 将 $T$ 沿顺时针方向旋转角度 $2\pi/(2k+1)$，共操作 $2k$ 次便可得到与 $T$ 同构的 $2k+1$ 个树，从而构成了 $K_{2k+1}$ 的循环 $T$ 分解. ■

为了阐述定理 8.24 的证明，我们考虑图 8.23 中的树 $T$，其优美标号如图所示. 在图 $G \cong K_9$ 中，同构于 $T$ 的子图 $T_1$ 也可如图 8.23 所示. 同构与 $T$ 的另一个子图 $T_2$(其边由虚线标记) 可以由 $T_1$ 沿顺时针方向旋转角度 $2\pi/9$ 获得.

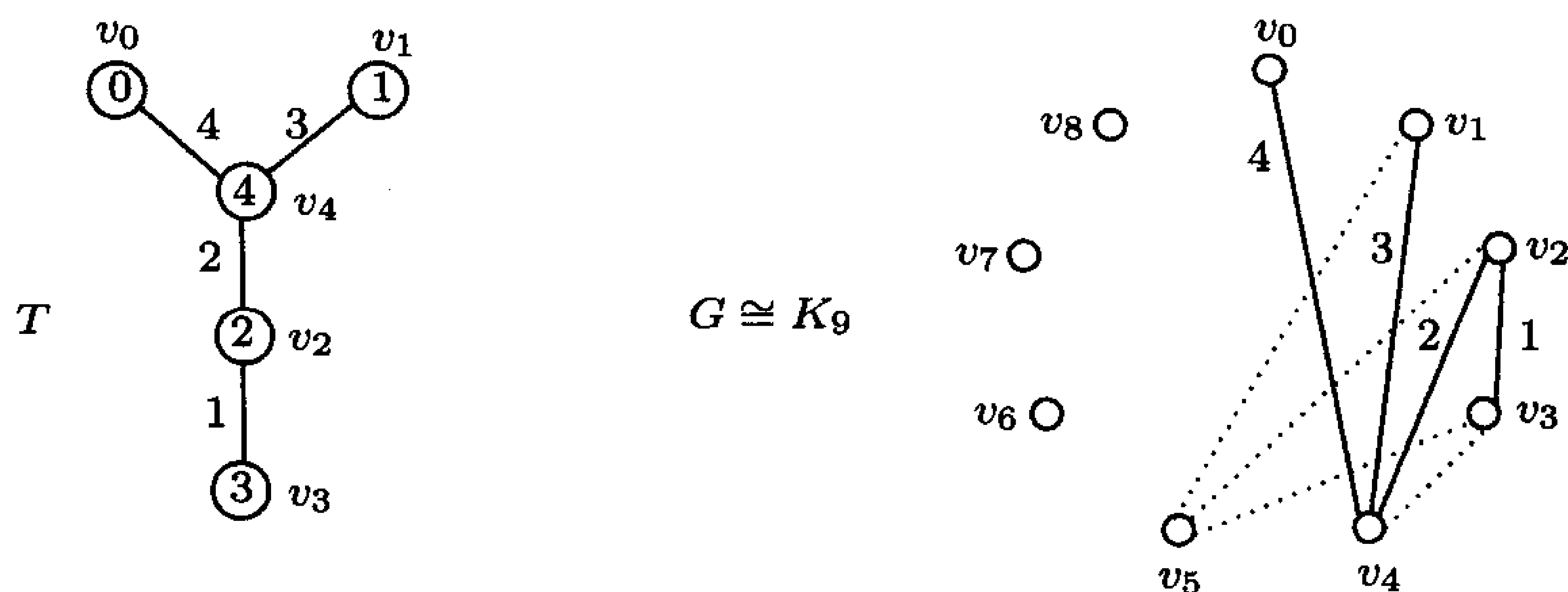



图 8.23 $K_9$ 的一个循环 $T$ 分解

## 习题

8.33 证明：图 $K_{2,2,2}$ 不是可 $K_{1,4}$ 分解的.

8.34 找出 $K_7$ 的 $P_4$ 分解.

8.35 判断 $C_6$ 和 $C_8$ 是否是优美的.

8.36 判断图 8.24 中的图是否是优美的.

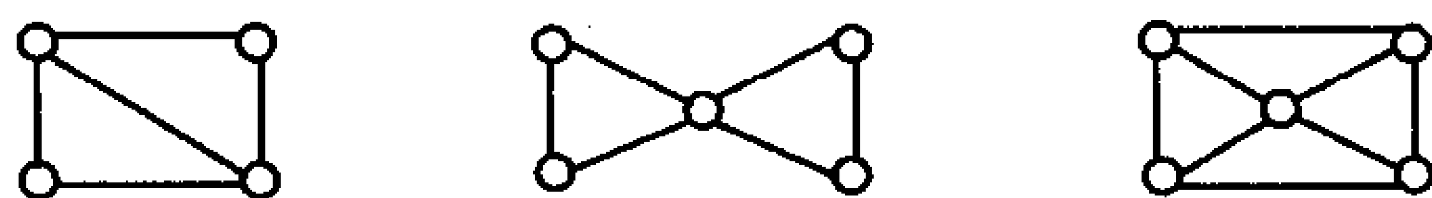


图 8.24 习题 8.36 的图

8.37 对于图 8.25 中的树 $T$, 证明 $K_{11}$ 是可 $T$ 分解的.

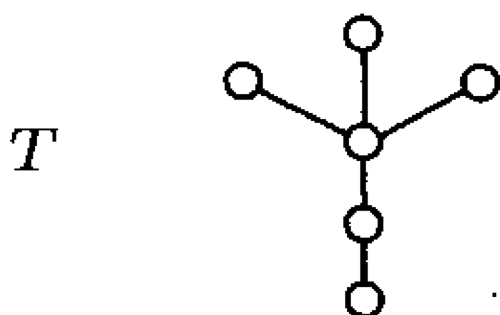



图 8.25 习题 8.37 的树

8.38 设 $G$ 是边数为 $m$ 的优美图. 证明：$K_{2m+3}$ 可被分解成 $G$ 的 $2m+3$ 个拷贝和 $K_{2m+3}$ 的一个 Hamilton 圈.

## 8.4 延伸阅读：立即疯游戏

*打开包装, 可以看到这堆木块的每一侧上都有四种不同的颜色. 你可能从来没有看到过, 或曾经看到过这种情形出现. 现在, 我们将这堆木块打乱并重新堆放, 使其每侧再次出现四种不同的颜色.*

上面这段说明出现在一个包装盒的说明书上, 盒内由四个多色立方块构成了一个名为**立即疯游戏**的智力玩具, 这种玩具是 Hasbro 公司 (一个开发玩具和游戏的公司) 的产品. 每个立方块的每个面都被涂上红 (R)、蓝 (B)、绿 (G)、黄 (Y) 四种颜色中的一种. 这个智力玩具的最终目的是将立方块堆放成图 8.26 中的形状, 一个立方体在另一个的上面, 使其每侧上出现所有四种不同的颜色.

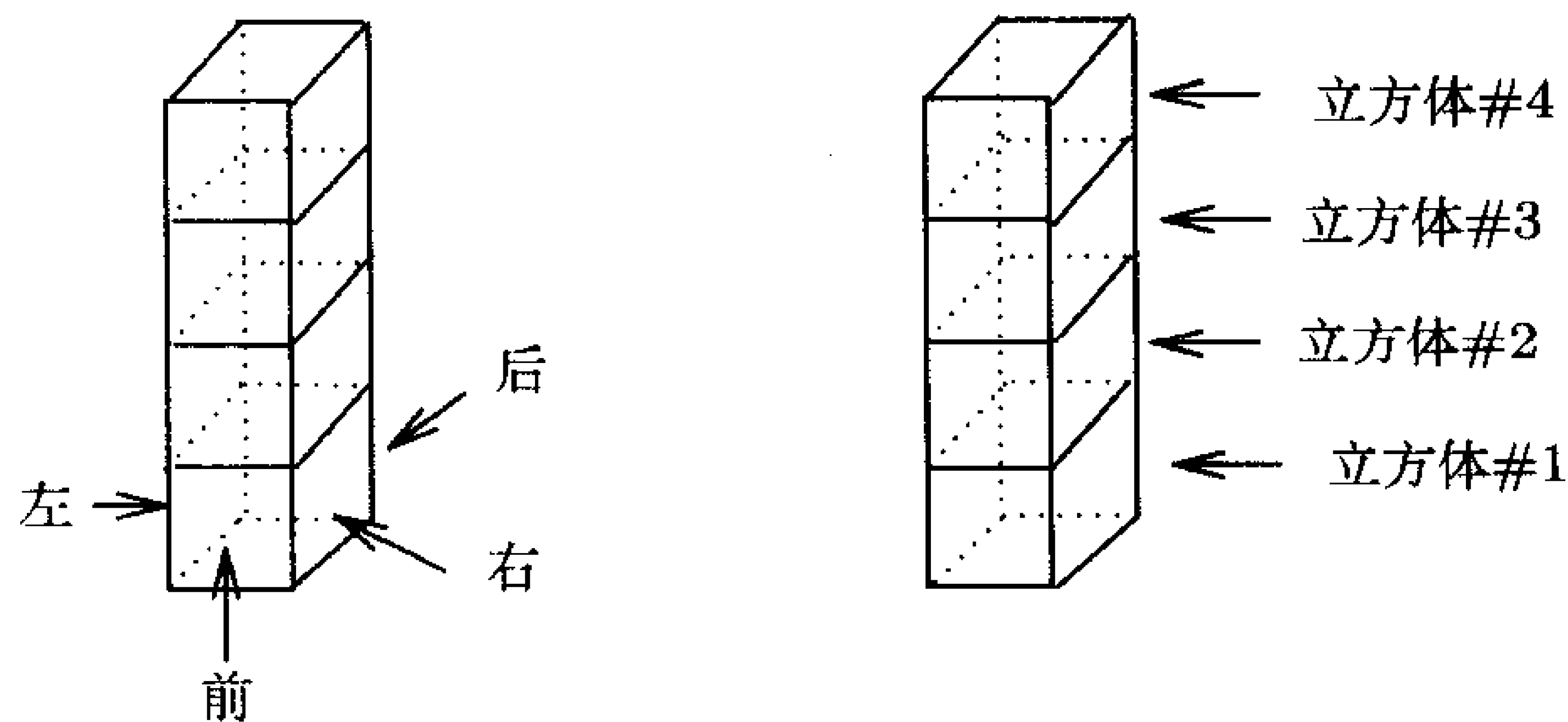



图 8.26 四个立方体的一种堆放方法

在说明书的背面写着：*想放弃吗?* 并且提供了一种解决方案. 在读了所有内容以后, 我们可能会被吓倒. 事实上, 在试图解决该问题之前, 我们可能已经被告知这未必能够成功. 下面让我们计算一下四个立方体可能的堆放方式.

我们先选择一个立方体 (将称它为第一个立方体), 将其放置在桌子上. 我们不难发现, 第一个立方体的放置方式有三种, 主要根据哪两个对立面是立方体的顶面

和底面, 这些面是被 "隐藏的" 面. 选择其余四个面中的一个面作为前侧. 现在将第二个立方体放到第一个的顶部, 则它的六个面中任一面都可被选来放在第一个立方体前侧的正上方, 而且可以采用四种方法来放置 (通过旋转). 也就是说, 有 $6\times4=24$ 方法来将第二个立方体放置到第一个的顶部. 因此, 将四个立方体像这样一个接一个堆放在一起的方法有 $3\times(24)^3=41\ 472$ 种. 假若只有唯一的方法来堆放这些立方体, 使得每侧出现所有的四种颜色, 那么使用反复试验的方法来解决问题似乎有些令人泄气, 并且很可能导致 …… 立即疯.

图论可以帮助我们解决这个棘手的难题. 现在让我们来看看这个问题该怎样解决. 为了这个目的, 我们找到一种表示立方体及其各个面上颜色的方法. 这对解决该问题是非常有帮助的, 如图 8.27 所示.

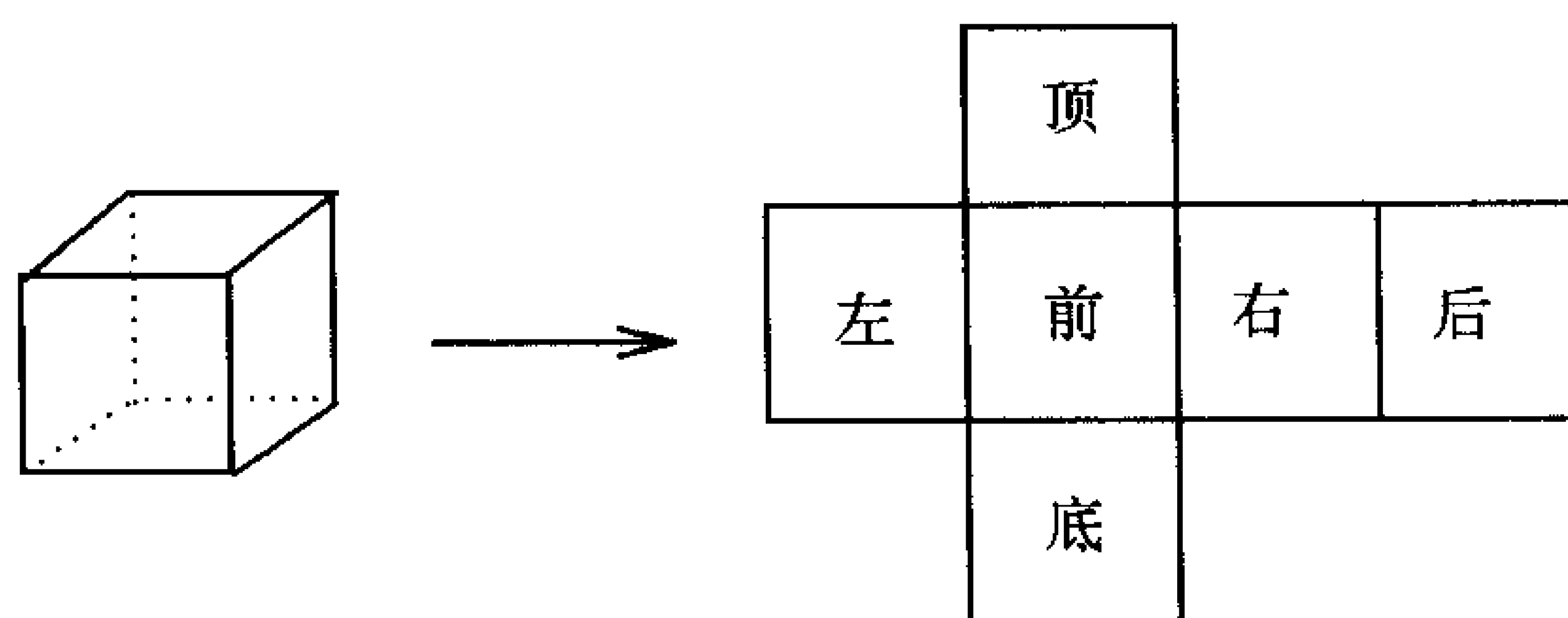



图 8.27 立方体的六个面

下面, 我们给出一个例子.

**例 8.25** 考虑图 8.28 中的四个多色立方体.

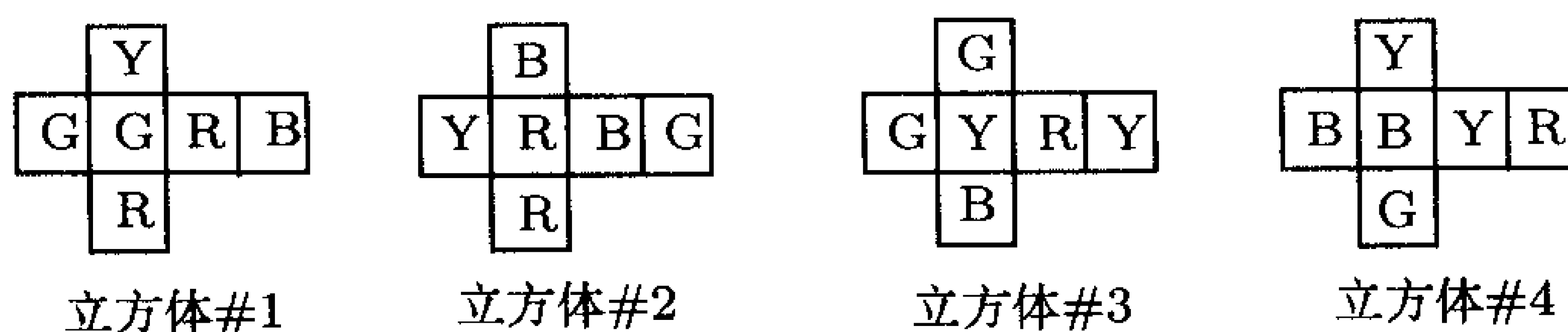



图 8.28 立即疯游戏中的四个立方体

**解** 对于图 8.28 中的每个立方体, 我们构造一个阶为 4 且边数为 3 的多重图 (允许有环) 与其相对应. 每个多重图的顶点集是由四种颜色 {R, B, G, Y}构成, 颜色 $c_1$ 和 $c_2$ 之间存在一条边 (可能 $c_1=c_2$), 若 $c_1$ 和 $c_2$ 出现在两个对立面上. 假若颜色 $c_1$ 和 $c_2$ 出现在两对 (或三对) 对立面上, 则多重图有两 (或三) 条连接顶点 $c_1$ 和 $c_2$ 的平行边. 如果 $c_1=c_2$, 那么在 $c_1$ 上有一个环. 图 8.28 中的立方体对应的多重图可如图 8.29 所示.

构造一个 4 阶的复合多重图 $M$, 其顶点集为 {R, B, G, Y}, 其边集是图 8.29 中的四个多重图边集的并, 共有 12 条边. 为了辨别 $M$ 中哪些边来自于立方体 $\#i$

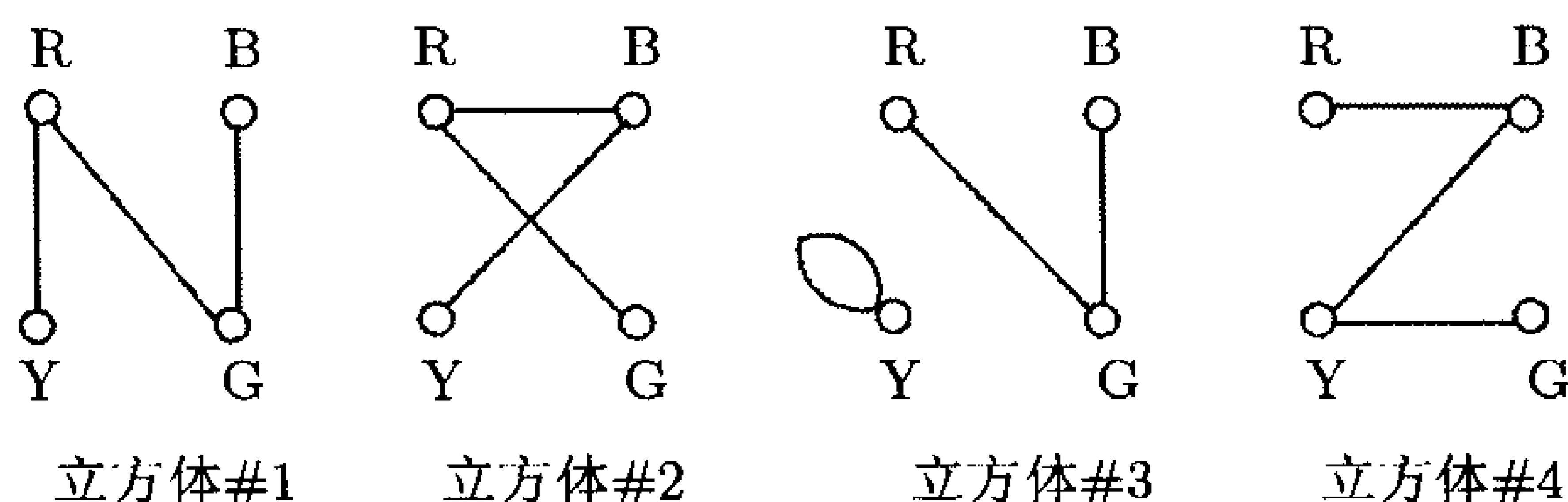



图 8.29 例 8.25 中的四个多重图

($i = 1, 2, 3, 4$), 我们将这些边用 $i$ 标号. 通过图 8.29 中的四个多重图构造而得多重图 $M$ 可如图 8.30 所示.

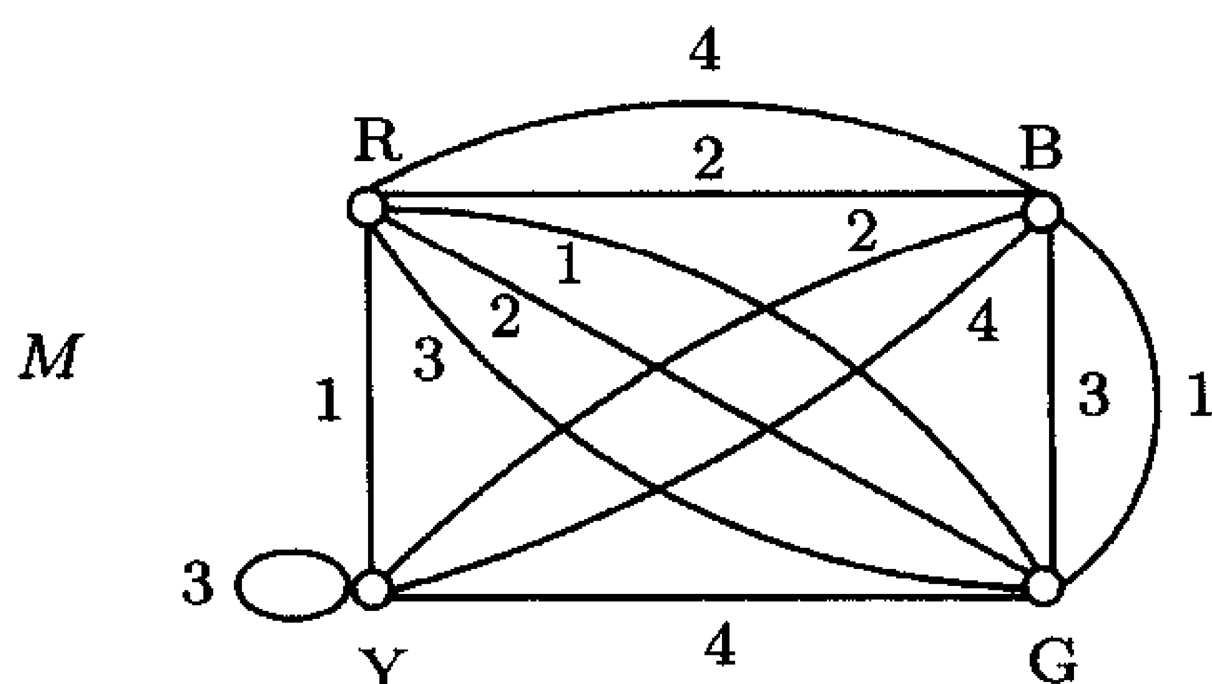



图 8.30 例 8.25 中复合的多重图

现在, 让我们暂时停下来, 回顾一下我们正在探索的问题. 我们的目的是将四个立方体叠放在一起, 使得每侧都出现所有四种不同的颜色. 当然这四种颜色必定同时出现在这堆立方体的前侧及后侧. 如果立方体 #i ($i = 1, 2, 3, 4$) 前面的颜色是 $c_1$, 其背面 (在这堆立方体的后面) 的颜色是 $c_2$, 那么在多重图 $M$ 上, 必定有一条标号为 $i$ 的边连接 $c_1$ 和 $c_2$. 若 $c_1 = c_2$, 则在顶点 $c_1$ 上必有一个标号为 $i$ 的环. 由于每种颜色在这堆立方体的前侧和后侧均恰好出现一次, 则 $M$ 必存在一个 2 正则多重生成子图 $M'$(为一个 2 因子), 且 $M'$ 中标号为 1, 2, 3, 4 的边各有一条, 其中一个环对度的贡献为 2. 类似地, 对应于这堆立方体的右侧和左侧, 存在 $M$ 的一个 2 正则多重生成子图 $M''$, 其边集与 $M'$ 的边集不相交. 基于以上观察, 我们找到了两个边不交的 2 正则多重生成子图, 并且每个子图中标号 1, 2, 3, 4 的边各有一条. 如果这样的一对多重子图不存在, 那么该问题无解. 如果 $M'$, $M''$ 存在, 它们就可被用来解决上述问题. 即, 可以恰当地堆放这些立方体. 任意 2 正则多重生成子图必定是图 8.31 所示的 17 个多重图之一.

再回到例 8.25, 我们可以看出图 8.30 中的多重图 $M$ 包含两个边不相交的 2 正则多重生成子图 $M'$ 和 $M''$, 每个多重图的边被标号为 1, 2, 3, 4(如图 8.32(a) 所示). 多重图 $M'$ 对应着这堆立方体的前侧和后侧, $M''$ 对应着右侧和左侧. (如有必要, 可对换 $M'$ 和 $M''$.) 为了堆放立方体, 我们给 $M'$ 和 $M''$ 的每个连通分支中的每条

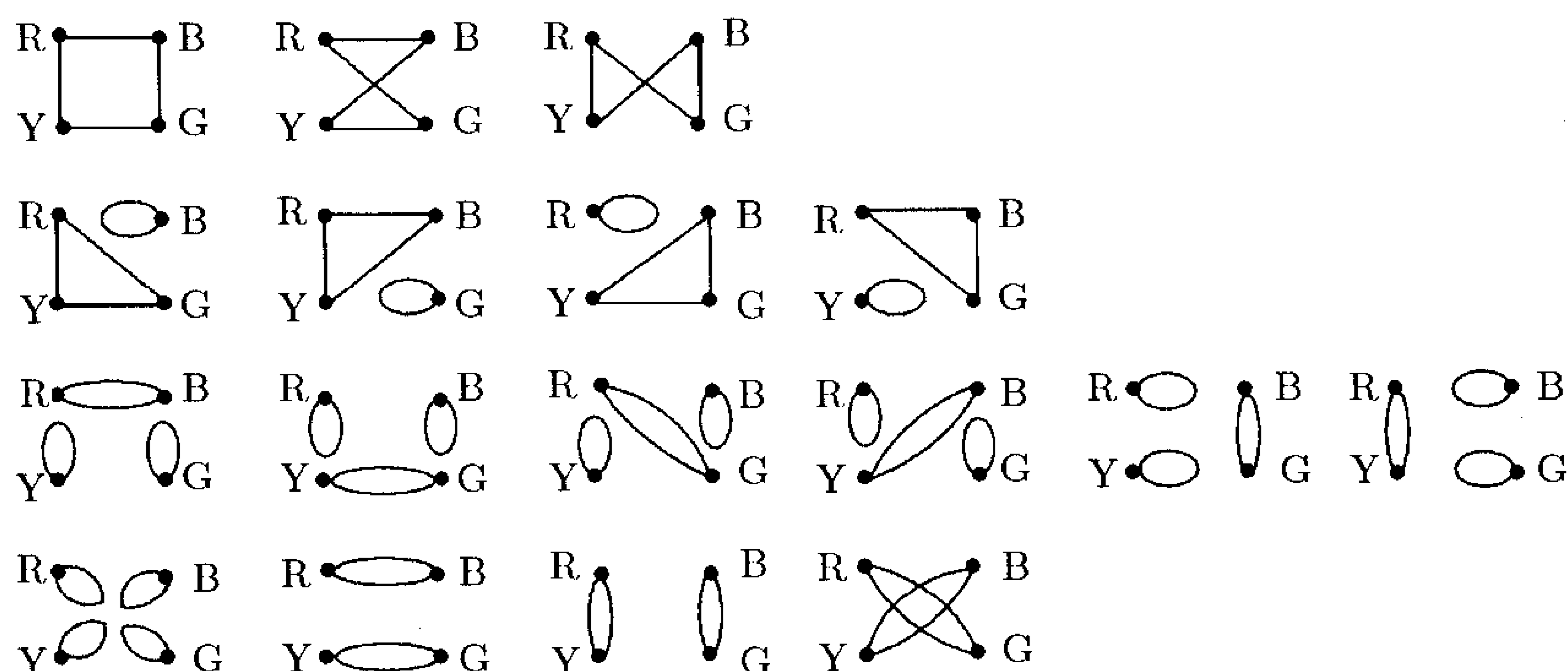



图 8.31　17 个 2 正则多重生成子图

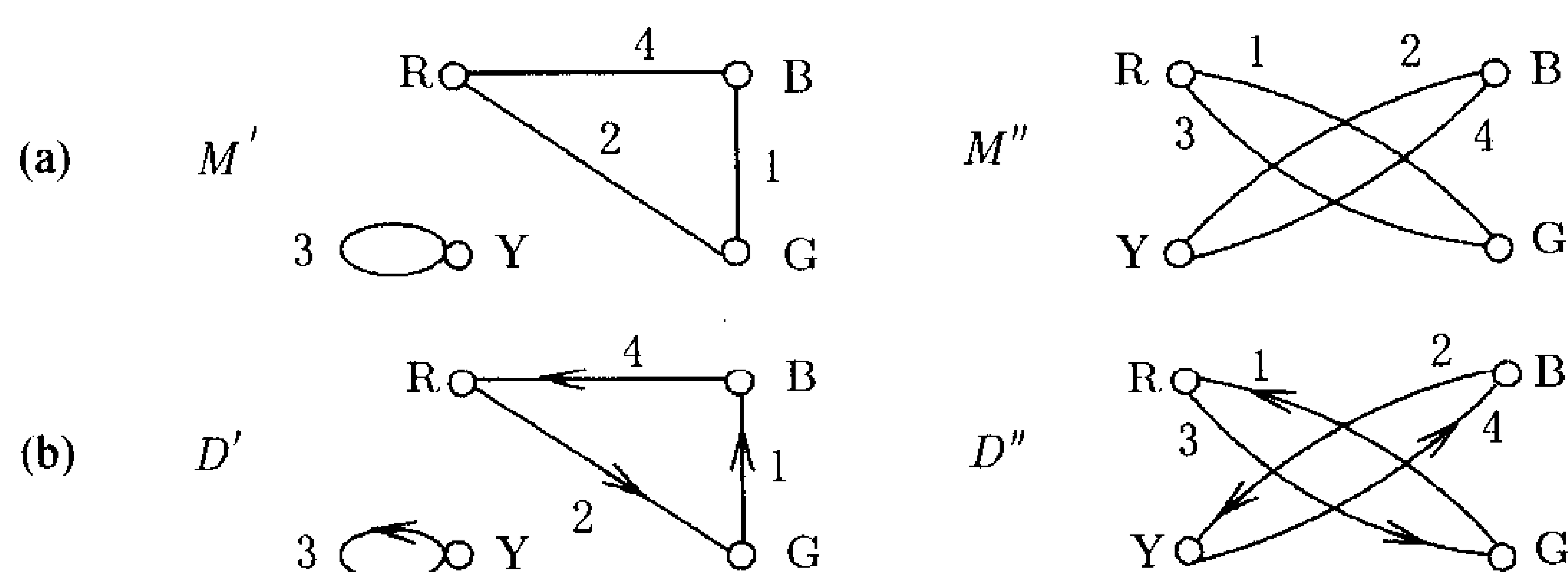



图 8.32　例 8.25 中的两个 2 正则多重生成子图

边一个定向, 即可得到一个有向圈. 因而, 我们得到了两个 (有向) 多重图 $D'$ 和 $D''$, 如图 8.32(b) 所示.

借助于图 8.32(b) 中 (有向) 多重图 $D'$ 和 $D''$, 我们便可以堆放这些立方体了. 由于在 $M'$ 中, 弧 (G, B) 标号为 1, 我们放置立方体 #1 使得绿色出现在前侧, 蓝色出现在后侧. 由于在 $M''$ 中, 弧 (G, R) 标号为 1, 我们旋转这个立方体 (保持绿色在前, 蓝色在后) 直到绿色出现在右侧, 红色出现在左侧. 我们用同样的方法堆放其余三个立方体 $\cdots\cdots$ 瞧! 难题就这样被成功地解决了 (如图 8.33 所示). ◇

这个问题是由 Fredrick Schossow 于 1900 年构想的, 他在木块的表面上放置了四套扑克牌 (红桃、方片、梅花、黑桃). 在第一次世界大战时期, 他又提出了该问题的另一种版本, 即用同盟国的国旗来装饰木块的面. 1900 年, 这个问题被称为挑逗高手. 然而, 对于该问题, 人们最为熟悉且最流行的版本是基于 Franz (Frank) Armbruster 在 1965 年中期设计的智力玩具, 它由四个塑料立方体组成, 每个立方体的每面涂有一种颜色.(那时采用的颜色是红、蓝、绿、白.)

1960 年, Frank Armbruster 开始担任教育顾问. 在从事教学工具设计的工作中,

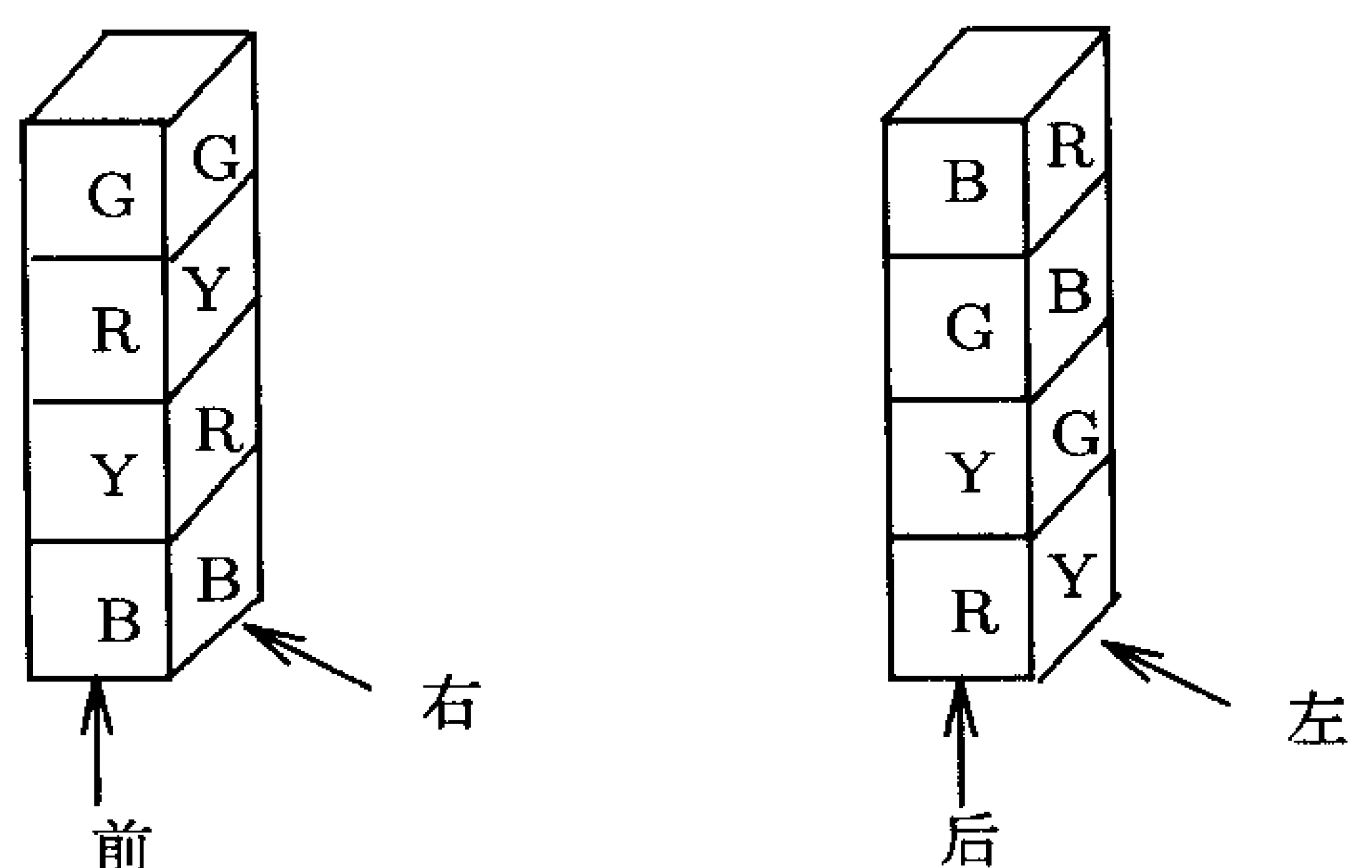



图 8.33 例 8.25 中问题的解决方案

他发现教学工具和游戏之间存在着类似的地方. 特别地, 如果将游戏的规则按照课题的规定来制定, 那么游戏也可以达到很好的教学效果. 每个游戏都有一套规则, 以及目标和实现目标所需要把握的机会.

Armbruster 在其一生的大部分时间里都热衷于智力玩具, 并于 1965 年开始设计用作教学工具的游戏. 他认为立即疯游戏非常有助于高中水平的置换和组合教学. 起初, 立方体是用木材制作的. 考虑到木块的纹理会给解题者无意的暗示, 他开始采用塑料来制作立方体. 找到一个将这些塑料立方体堆放在一起的方法, 并适当地放置它们的六个面, 这显然是个很大的挑战. 最终, Armbruster 设计出一种方法解决了上述问题, 这种智力玩具便随之问世. 在旧金山, Armbruster 与 Macy 公司的代表共进午餐, 并讨论了他的方案, 这就是这种智力玩具进军商业的开始.

这个著名的智力玩具立即疯游戏的第一个版本被授权给 Parker 兄弟游戏公司. 1966 到 1967 年期间, 立即疯游戏的销量超过了一千两百万, 比棋盘类玩具Monopoly更为畅销. 作为年度玩具销量的冠军, 它被载入了 1966 年的吉尼斯记录大全. 然而, Armbruster 依然是一名教育家, 尽管他因为智力玩具**立即疯游戏**而闻名. 作为一名讲师, 他在洛克希德公司工作了 15 年. 在此期间, 他不断地开发新的训练方法, 继续设计具有教育意义的玩具、游戏和智力问题.

## 习题

8.39 解决图 8.34 所示的立即疯游戏问题, 并给出

(a) 每个立方体对应的多重图,

(b) 这些立方体对应的复合多重图,

(c) 前后侧对应的多重生成子图与左右侧对应的多重生成子图,

(d) 解决方案.

8.40 解决图 8.35 所示的立即疯游戏问题, 并给出类似于习题 8.39 中的 (a)~(d).

8.41 解决图 8.36 所示的立即疯游戏问题, 并给出类似于习题 8.39 中的 (a)~(d).

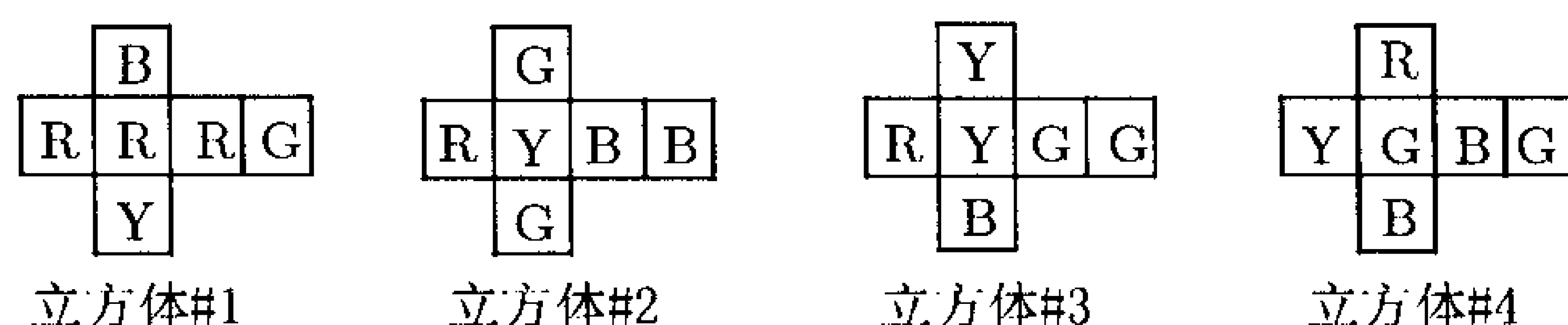



图 8.34　习题 8.39 中的立即疯游戏问题

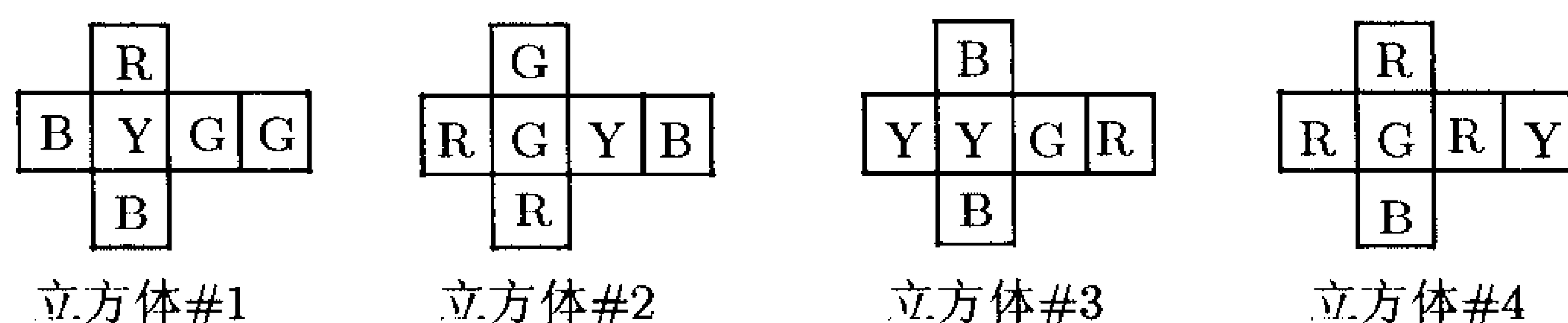



图 8.35　习题 8.40 中的立即疯游戏问题

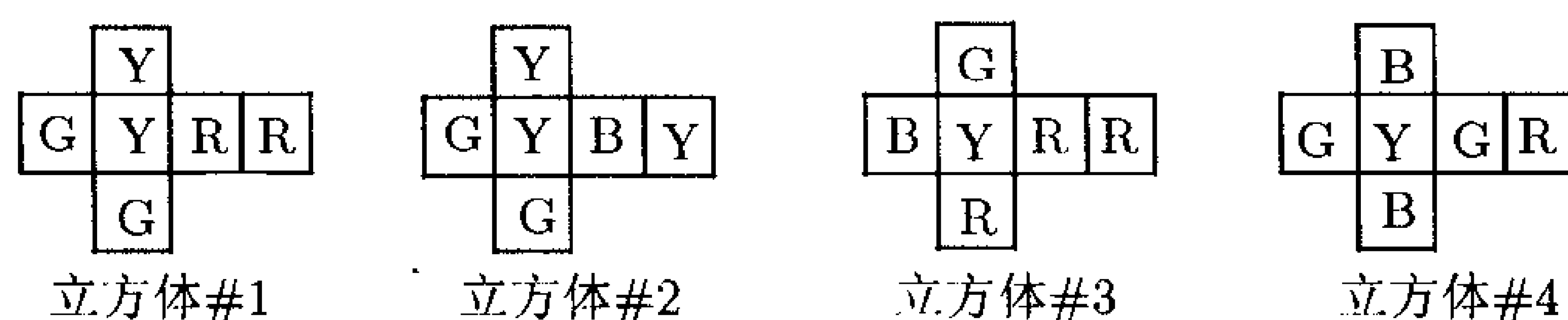



图 8.36　习题 8.41 中的立即疯游戏问题

8.42　证明：图 8.28 中的立方体可用不同于图 8.33 中所示的方式堆放, 使得每侧出现所有的四种颜色.

8.43　构造一套四个多色立方体的装置, 使得每个立方体出现所有的四种颜色, 并使其对应的立即疯游戏问题无解.

8.44　构造一套有四个多色立方体的装置, 使得每个立方体出现所有的四种颜色, 并使其对应的立即疯游戏问题有唯一解.

## 8.5　延伸阅读：Petersen 图

1839 年 6 月 16 日, Peter Christian Julius Petersen 出生于丹麦的 Sorø. 少年时期, Petersen 在一家私立学校读书. 后来, 他进入了由丹麦国王 Petersen 二世于 1586 年创办的 Sorø 学院.

由于他的父亲支付不起昂贵的学费, 1854 年, Petersen 离开学校, 为自己的叔叔打工. 在他的叔叔去世时, Petersen 获赠了足够的钱, 于是他到哥本哈根工学院重新开始了学业. 1858 年, Petersen 就已经出版了一本关于对数的书. 尽管 Petersen 于 1860 年通过了全国工程学初级考试, 但他还是决定在大学里研究数学, 而不是继续工程学的学习. 此时, 他叔叔留给他的钱已被花光, 因此 Petersen 到一所私立学校谋取一份教师工作. 接下来的几年里, Petersen 承担着繁重的教学任务, 并且结了婚, 成了家, 但他仍然刻苦研究数学.

1866 年,Petersen 获得数学教师资格. 在作为中学教师期间, Petersen 认识到几何推理的重要性, 也意识到自己在编写教科书方面所具有的才能. 事实上, 他在 19 世纪 60 年代编写了五本教科书, 都是关于几何方面的. 30 岁时, Petersen 开始认真地撰写自己的博士论文.

1871 年, Petersen 在哥本哈根大学获得了博士学位. 在博士学位授予仪式上, Petersen 说道 (从丹麦语中翻译)：

> 从我接触到数学的那一刻起, 数学夺取了我全部的兴趣. 我的大部分工作都是在解决自己和朋友的难题, 在探求角度的三等分. 后者对我的整个发展产生了巨大的影响.

不久, Petersen 成为哥本哈根大学的一名教师. 作为一名杰出的老师, 他被人们熟知. 下面是他在教学方面的一段轶闻. 当他讲解课本遇到困难时, Petersen 经常会用 “这是显而易见的” 来解释, 并让学生参考他编写的某本书. Petersen 被认为是个有经验的作家. 就他的研究而言, 有些时候, 其形式的优雅之处已经超过了研究本身的严密性. Petersen 是个独立的思想者, 为了工作的原创性, 他很少学习和理解他人的成果. 因此, 他偶尔会得到一些已知的结论. 此外, Petersen 也很少引用他人的成果.

尽管 Petersen 在数学的很多领域都参与研究并作出了贡献, 但只有图论使他声名远扬, 并且当时在国际上享有声誉. Julius Petersen 对图论的贡献主要来自于他的一篇名为*Die Theorie der regulären graphs*论文, 发表于 1891 年. 1891 年以前, 图论方面的重要结果 (包括 Leonhard Euler 在 Euler 图上的成果和 Gustav Kirchhoff 在生成树上的成果) 都不能算作图理论上的成果, 因为那时还没有真正的图论. 有一点可以肯定, Petersen 的这篇论文是第一篇包含了图论方面基本结论的文章. 这篇论文包括的重要结论有定理 8.11, 即 Petersen 定理 (任一不含割边的 3 正则图包含 1 因子), 以及定理 8.16 (图 $G$ 是可 2 因子分解的当且仅当对于某个正偶数 $r$, $G$ 是 $r$ 正则图), 尽管这些定理在 Petersen 的论文以相反的次序出现.

Petersen 在 1891 年的论文几乎是与数学家 James Joseph Sylvester(在第 10 章, 我们将再次提及此人) 合作的. 两人研究相同的问题并经常交流. Sylvester 善于提出猜想,Petersen 善于给出证明. Sylvester 能给 Petersen 的研究工作带来必要的刺激. 显然, Petersen 和 Sylvester 在朝着一篇他们合著的文章努力着. 事实上,Sylvester 曾写信给*Mathematische Annalen*的主编 Felix Klein, 表达过他们想在该刊物上发表合著论文的意愿. 但当 Petersen 到牛津拜访 Sylvester 时, 两个数学家已经从不同角度考察问题了. 于是两人决定各自单独写作, 尽管 Petersen 不太情愿. 在拜访期间, Petersen 发现 Sylvester 在身体和心理上均遭受疾病的困扰. Sylvester 再也没有撰写论文, 也没有再次回到图论的研究工作中去.

Sylvester 是第一个使用术语图(正如目前所用) 的人. 该术语最早出现在他于

1878 年发表的一篇文章里. 然而, 由于 Petersen 对该术语的使用而导致了它的广泛流行, 并最终被数学界接受.

尽管 Petersen 对图论的主要贡献是他在 1891 年写的那篇论文, 但这并不是他为人熟知的原因. 他的主要名望不在于那篇论文, 而是来自于他的一篇论文里出现的一个图: **Petersen 图**. 这个图我们已经遇到几次, 后面还将遇到. Petersen 首次提到此图, 并不在 1891 年的那篇长达 28 页的经典论文里, 而在 1898 年的一篇长仅为 3 页的论文 "Sur le théorème de Tait" 里. 这篇论文中, Petersen 将这个图作为 Peter Guthrie Tait"定理" 的一个反例, 即*任一不含割边的 3 正则图都是可 1 因子分解的*. 当时, 这个图并不是以常见的赋予美感的画法出现的, 如图 8.37(a) 所示, 而是以一种缺乏吸引力的方式给出的, 如图 8.37(b) 所示. 1910 年 8 月 5 日, Petersen 在丹麦的哥本哈根去世.

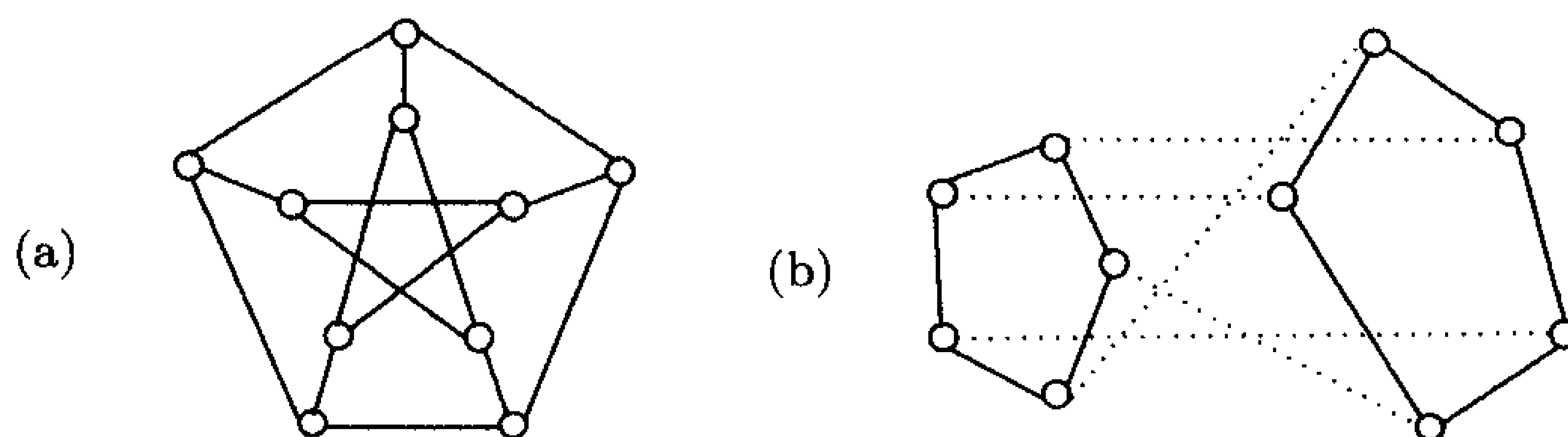



图 8.37　Petersen 图

令人惊奇的是, Petersen 并不是第一个使用 Petersen 图的人. 事实上, Petersen 图的首次出现是在 1898 年的 12 年之前, 即 1886 年 Alfred Bray Kempe 的一篇论文里.(第 10 章, 我们将再次介绍 Kempe 和 Tait.) 前文我们已经提到 Petersen 图是由两个顶点不相交的 5 圈和一个基数为 5 的特定匹配构成. 若我们分别记两个 5 圈为 $C: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$ 和 $C': v_1', v_2', \cdots, v_5', v_1'$, 则匹配的边为 $v_1v_1', v_2v_3', v_3v_5', v_4v_2', v_5v_4'$. Petersen 图有许多有趣的画法, 图 8.38 所示的是另外两种.

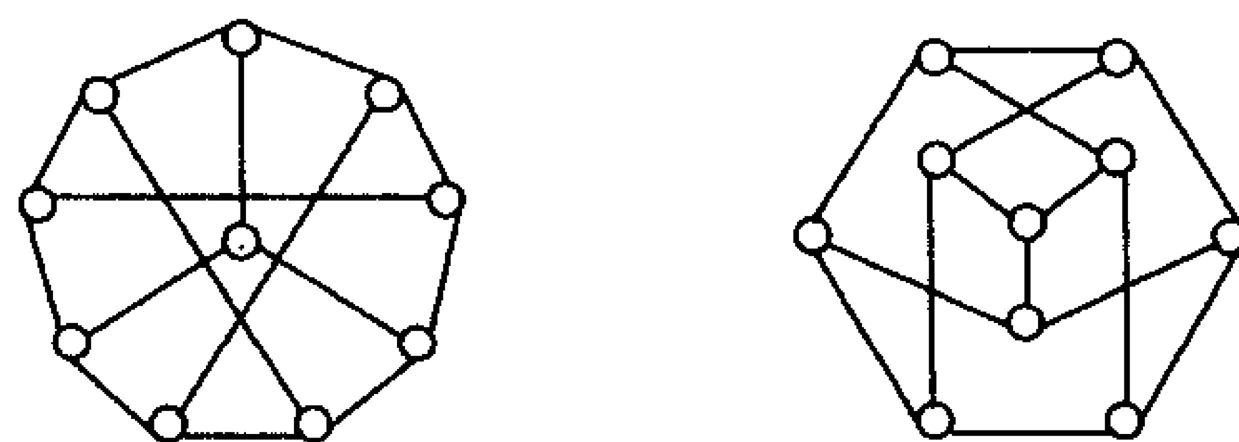


图 8.38　Petersen 图的另外两种画法

Petersen 图被 Petersen 作为反例引出, 从而拉开了该图被广泛应用的序幕. 事实上, Petersen 图经常作为反例在图论中出现.

下面, 我们将介绍 Petersen 图的一些刻画. Petersen 图是一个 10 阶的 3 正则图, 因而边数为 15; 其最小圈长为 5. 图的最小圈长称为是图的**围长 (girth)**. 对于

整数 $g \geqslant 3$, 一个**$g$ 笼** (**$g$-cage**)定义为一个具有围长 $g$ 且阶数最小的 3 正则图. 不难发现, $K_4$ 是唯一的 3 笼, $K_{3,3}$ 是唯一的 4 笼. 我们将证明,Petersen 图是唯一的 5 笼. 上述三个图如图 8.39 所示.

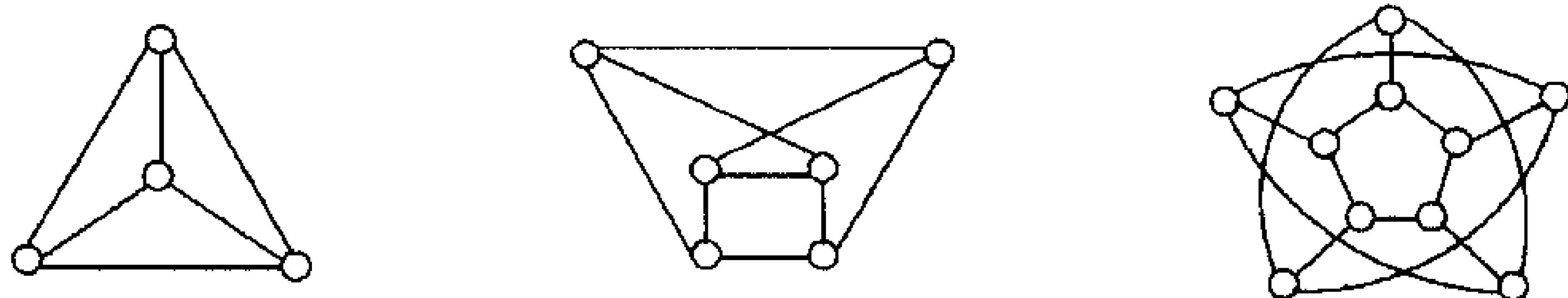


图 8.39　3 笼、4 笼和 5 笼

**定理 8.26**　Petersen图是唯一的 5 笼.

**证**　[直接证法] 设 $G$ 是一个 5 笼, $v_1$ 是 $G$ 的一个顶点. 由于 $\deg v_1 = 3$, 则顶点 $v_1$ 有三个邻点, 记为 $v_2, v_3, v_4$. 因为 $G$ 不包含三角形, 所以集合 $\{v_2, v_3, v_4\}$ 是独立的. 由于顶点 $v_2, v_3, v_4$ 的度同样为 3, 则它们的邻点除 $v_1$ 外还有两个, 分别记为：

$$N(v_2) = \{v_1, v_5, v_6\},\ N(v_3) = \{v_1, v_7, v_8\},\ N(v_4) = \{v_1, v_9, v_{10}\}.$$

因为 $G$ 不包含 4 圈, 所以顶点 $v_5, v_6, \cdots, v_{10}$ 是不同的. 因此,$G$ 包含子图 $H_1$, 如图 8.40(a) 所示.

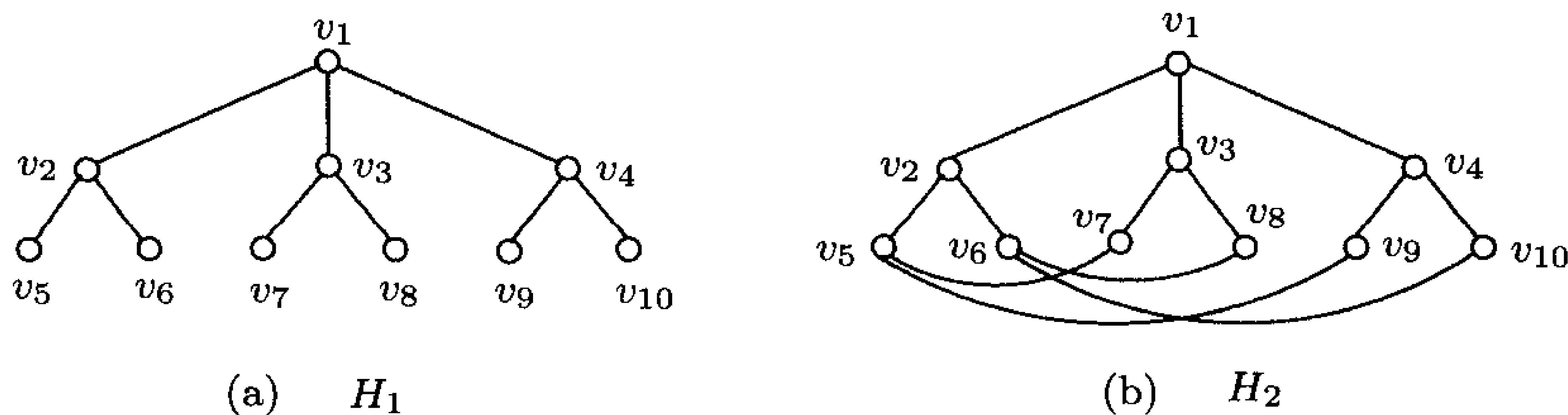



图 8.40　5 笼 $G$ 的子图

上述讨论意味着 $G$ 的阶至少为 10. 由于 Petersen 图 PG 是一个 10 阶的围长为 5 的 3 正则图, 因此任一 5 笼的阶为 10, 且 PG 是一个 5 笼. 下面我们只需证明 PG 是唯一的5 笼即可. 由于 $G$ 是 5 笼, 故其阶为 10, 顶点集 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{10}\}$. 考虑顶点 $v_5$, 它必须与集合 $\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$中某两个顶点相邻接. 由于 $G$ 不包含三角形或 4 圈, 则 $v_5$ 不能邻接于 $v_6$; 不能同时邻接于 $v_7$ 和 $v_8$; 不能同时邻接于 $v_9$ 和 $v_{10}$. 因此, $v_5$ 必须邻接于 $v_7$, $v_8$ 中的一个顶点和 $v_9$, $v_{10}$ 中的一个顶点. 我们可以假设 $v_5$ 邻接于 $v_7$ 和 $v_9$, 进而 $v_6$ 邻接于 $v_8$ 和 $v_{10}$. 故 $G$ 包含子图 $H_2$, 如图 8.40(b) 所示.

由于 $G$ 不包含三角形, 故顶点 $v_7$ 不能邻接于 $v_8$ 或 $v_9$. 因而, $v_7$ 必须邻接于 $v_{10}$. 同理可证, $v_8$ 和 $v_9$ 必须是邻接的 (如图 8.41(a) 所示). 因此, $G$ 仅有一种可能

性, 即同构于 Petersen 图 (如图 8.41(b) 所示). ■

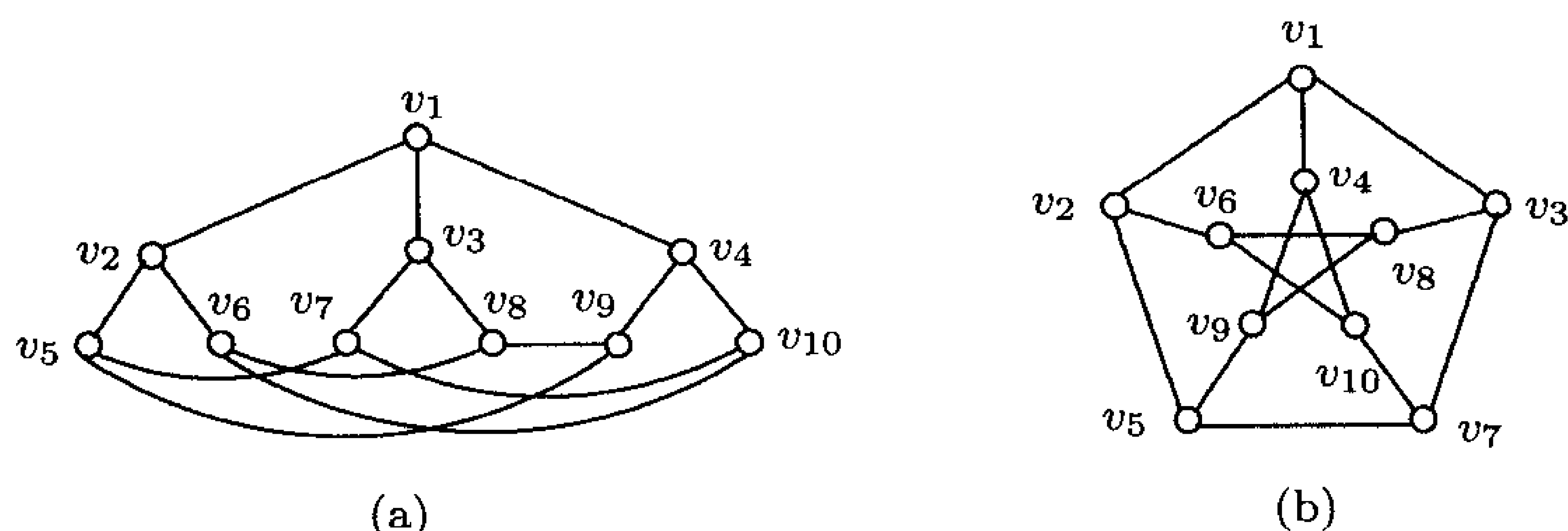



图 8.41　Petersen 图: 唯一的 5 笼

6 笼,7 笼,8 笼均是唯一的, 分别称为是**Heawood 图**、**McGee 图**和**Tutte-Coxeter 图**, 如图 8.42 所示.

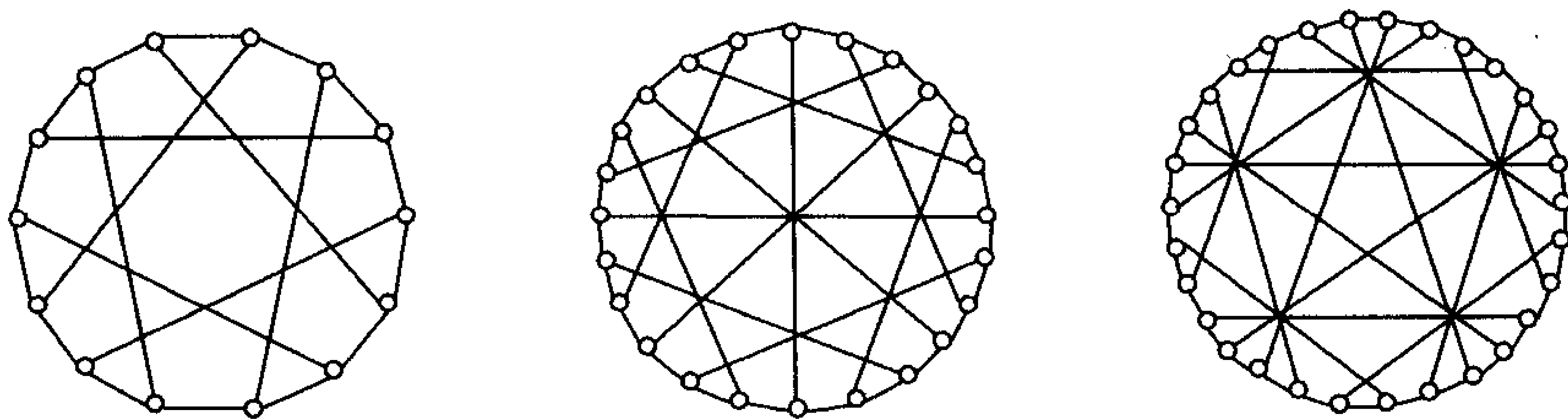


图 8.42　6 笼、7 笼和 8 笼

我们已经知道, Petersen 图不是可 1 因子分解的, 也不是 Hamilton 的. 尽管 Petersen 图 PG 不是 Hamilton 的, 但它已经非常接近了, 这是因为对于 PG 的任一顶点 $v$, PG $-v$ 是 Hamilton 的.

## 8.6　专题探索: 图的 $\gamma$ 标号

对于阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图 $G$, $G$ 的一个**$\gamma$ 标号 ($\gamma$-labeling)**定义为一个一一映射 $f: V(G) \to \{0,1,2,\cdots,m\}$, 它诱导出 $G$ 的一个边标号 $f': E(G) \to \{1,2,\cdots,m\}$, 即对于 $G$ 的任一条边 $e = uv$,

$$f'(e) = |f(u) - f(v)|.$$

由 8.3 节的讨论, 若 $f'$ 也为一一映射, 则 $\gamma$ 标号 $f$ 是一个优美标号.

优美标号的起源要追溯到 Alexander Rosa 于 1967 年的一篇论文, 当时 Alexander Rosa 使用的术语为 $\beta$ 赋值. 5 年后, Solomon Golomb 称该标号为 "优美的", 该术语一直沿用至今.

对于阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图 $G$, 其任一 $\gamma$ 标号 $f$ 都可以被赋予一个**值 (value)**, 记为 $\mathrm{val}(f)$, 定义为

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e\in E(G)} f'(e).$$

下面, 我们来考虑路 $P_5$ 的某些 $\gamma$ 标号 $f_1, f_2, \cdots, f_9$, 如图 8.43 所示, 其中顶点的标号在对应顶点的上方, 诱导的边标号在对应边的下方. 每个 $\gamma$ 标号的值也可如图所示.

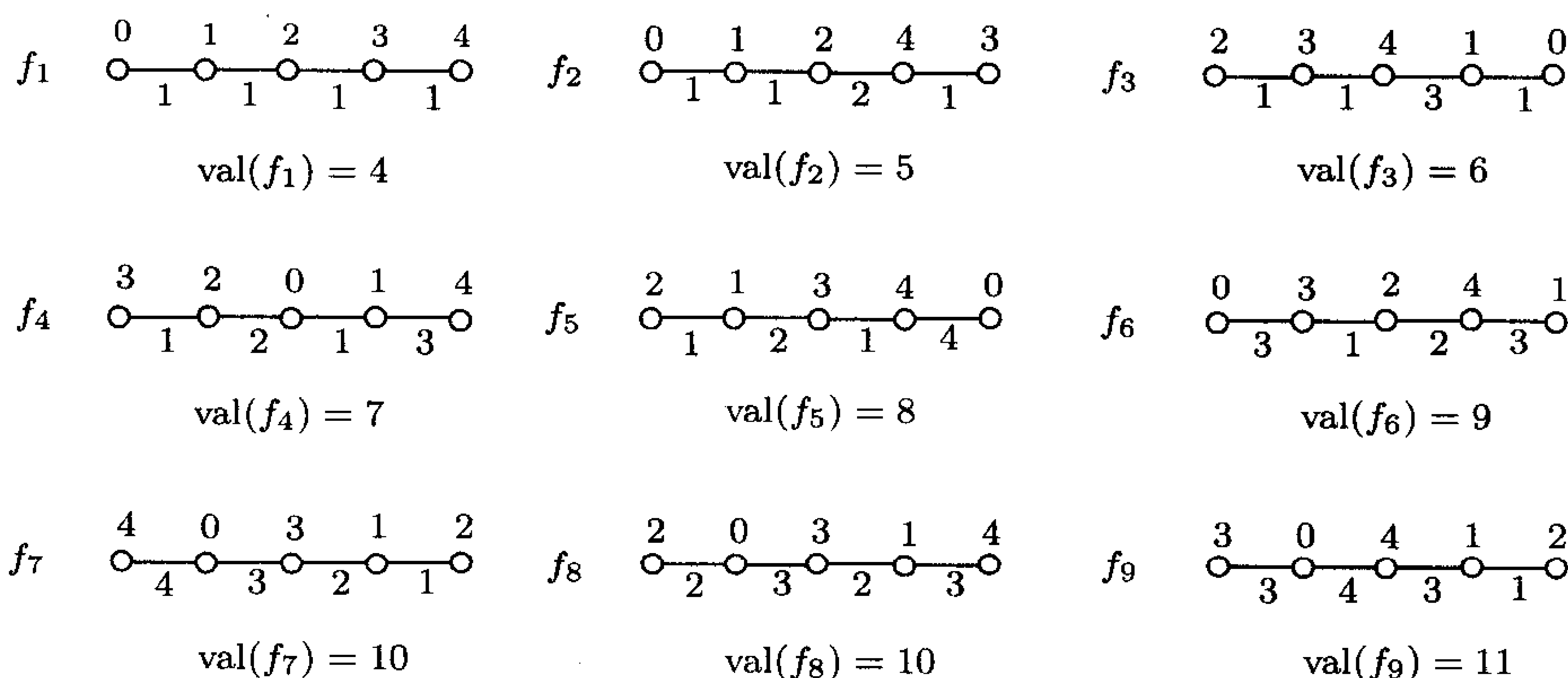



图 8.43 $P_5$ 的一些 $\gamma$ 标号

对于阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图 $G$, $G$ 的一个 $\gamma$ 标号 $f$ 称为是**二项式标号 (binomial labeling)**, 若它的值为 $\binom{m+1}{2}$, 即 $\mathrm{val}(f) = \binom{m+1}{2}$. 注意到图 8.43 中的 $\gamma$ 标号 $f_7$ 和 $f_8$ 是二项式标号, 这是因为 $\mathrm{val}(f_7) = \mathrm{val}(f_8) = \binom{5}{2} = 10$. $f_7$ 是二项式标号并不令人惊讶, 因为它是优美标号. 然而, $\gamma$ 标号 $f_8$ 则说明二项式标号未必是优美的.

对于阶为 $n$, 边数为 $m$ 的图 $G$, $G$ 的一个 $\gamma$ 标号 $g$ 称为是**$\gamma$ 最大标号 ($\gamma$-max labeling)**, 若

$$\mathrm{val}(g) = \max\{\mathrm{val}(f) : f \text{ 是 } G \text{ 的 } \gamma \text{ 标号}\};$$

$G$ 的一个 $\gamma$ 标号 $h$ 称为是**$\gamma$ 最小标号 ($\gamma$-min labeling)**, 若

$$\mathrm{val}(h) = \min\{\mathrm{val}(f) : f \text{ 是 } G \text{ 的 } \gamma \text{ 标号}\}.$$

对于图 8.43 中 $P_5$ 的 $\gamma$ 标号 $f_1$, 由于 $\mathrm{val}(f_1) = 4$, 且 $P_5$ 的边数为 4, 则 $f_1$ 是 $P_5$ 的 $\gamma$ 最小标号. 尽管没有证明, 事实上, 图 8.43 中 $\gamma$ 标号 $f_9$ 是 $\gamma$ 最大标号.

图 $G$ 的 $\gamma$ 标号的**跨距 (span)**是指集合

$$\mathrm{span}(G) = \{\mathrm{val}(f) : f \text{ 是 } G \text{ 的 } \gamma \text{ 标号}\}.$$

若 $G \cong P_5$, 则 $\mathrm{span}(G) = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. 此外, 若 $T$ 是边数为 $m$ 的优美树, 则 $\binom{m+1}{2} \in \mathrm{span}(T)$.

在前面, 我们已经讨论了 $\gamma$ 标号的定义. 事实上, 它是通过优美标号去除一个特定的限制 (虽然是一个主要的限制) 而得到的.

自 1967 年以来, 大量的顶点标号问题被提出和研究, 其中的大部分是 Rosa 优美标号的变形或者受 Rosa 优美标号的启发. 这些标号问题在一篇题为*A dynamic survey of graph labelings* 的综述论文中得到了描述. 这篇论文发表在电子期刊*Electronic Journal of Combinatorics* 组合论电子杂志上, 每年都有 2000 次左右的下载. 这篇论文每隔一段时间作一次修订, (截止这本书写作之时) 最新版本出现在 2002 年 10 月 30 日. 它的作者是 Joseph A. Gallian. 1971 年, Gallian 在美国圣母大学获得博士学位. 1972 年以来, 他一直是明尼苏达大学德卢斯分校的一名教员.

尽管 Gallian 是代数学、组合论和图论方面一名活跃的研究者, 也是畅销教材当代抽象代数的作者, 但他最为人们所知的还是他在其他方面的一些工作 (包括他在图标号问题上的那篇综述论文). Gallian 是一名通俗文学作家, 他的作品曾发表在华盛顿邮报上. 作为一名演讲者, 他很受欢迎. 不仅在数学方面, 而且在流行音乐组合披头士乐队方面他是一名权威.

或许, Gallian 最大的贡献是成为明尼苏达德卢斯大学大学生科研体验计划的主任. 这个计划的成功主要在于促使它能在全美地区贯彻落实.

### 习题

8.45　对于图 8.44 所示的每个图,

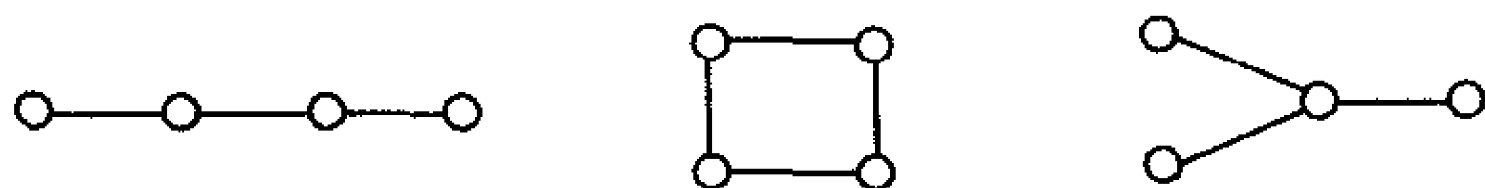


图 8.44　习题 8.45 的图

(a) 确定 span($G$), 从而获得 $G$ 的 $\gamma$ 最大标号和 $\gamma$ 最小标号.

(b) 判断 $G$ 是否存在非优美的二项式标号.

8.46　对于 $n \geqslant 3$, 证明: $P_n$ 的 $\gamma$ 最大标号值至少为 $\binom{n}{2} + \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$.

8.47　对于 $G \cong K_{1,t} (t \geqslant 2)$, 证明

$$\text{span}(G) = \left\{ \binom{t+1-k}{2} + \binom{k+1}{2} :\ 0 \leqslant k \leqslant t \right\}.$$

8.48　提出关于图 $\gamma$ 标号的另外一个问题, 并给予回答.

# 第9章 可平面性

## 9.1 平面图

某娱乐中心主任决定在中心开设一个新的主题公园. 主题公园的初步计划是建造 6 个景点, 临时记为 A1, A2, $\cdots$, A6. 图 9.1(a) 给出景点的初步位置.

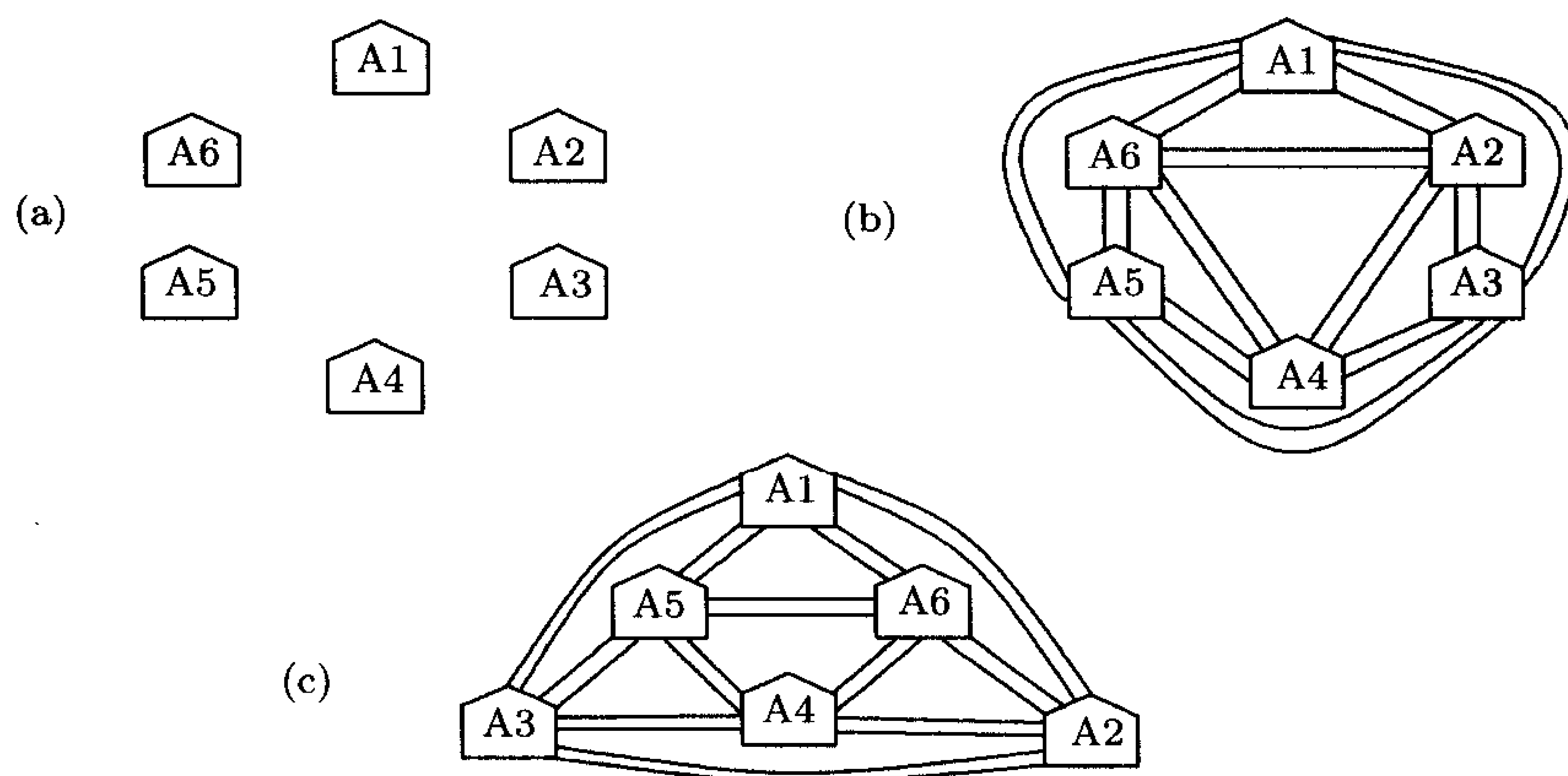



图 9.1 主题公园里的 6 个景点

夏天, 娱乐中心通常很炎热, 人们在景点之间散步会感到很不舒服. 初步研究显示, 在景点: (1) A1 和 A4, (2) A2 和 A5, 以及 (3) A3 和 A6 之间的交通流量最小. 设计者觉得, 尽管造价较高, 但如果在除去上面 (1)~(3) 之外的两两景点之间修建一条封闭的空调管道作为人行道是非常具有商业价值的. 人们所关心的一点是: 在要修建的管道中, 是否可以做到任何两个管道都不会相交. 从图 9.1(b) 可以看出, 确实可以做到这一点. 如果景点重新部署一下, 从图 9.1(c) 可以看出, 可以得到一个更好的管道位置设计方案.

过了一段时间, 娱乐中心决定把景点 A1, A2, $\cdots$, A6 的位置作些调整, 调整后的景点分别记为 B1, B2, $\cdots$, B6. 而且, 现在准备增加第七个景点 B7 (见图 9.2). 另外决定: 在除去景点对 {B1, B4}, {B1, B5}, {B2, B5}, {B2, B6}, {B3, B6}, {B3, B7} 和 {B4, B7}之外, 所有景点对之间均修建封闭的空调人行管道. 此时, 上面的想法还可以实现吗?

事实上, 上面这两个问题都是图论问题. 一个有 6 个景点的主题公园可以用图

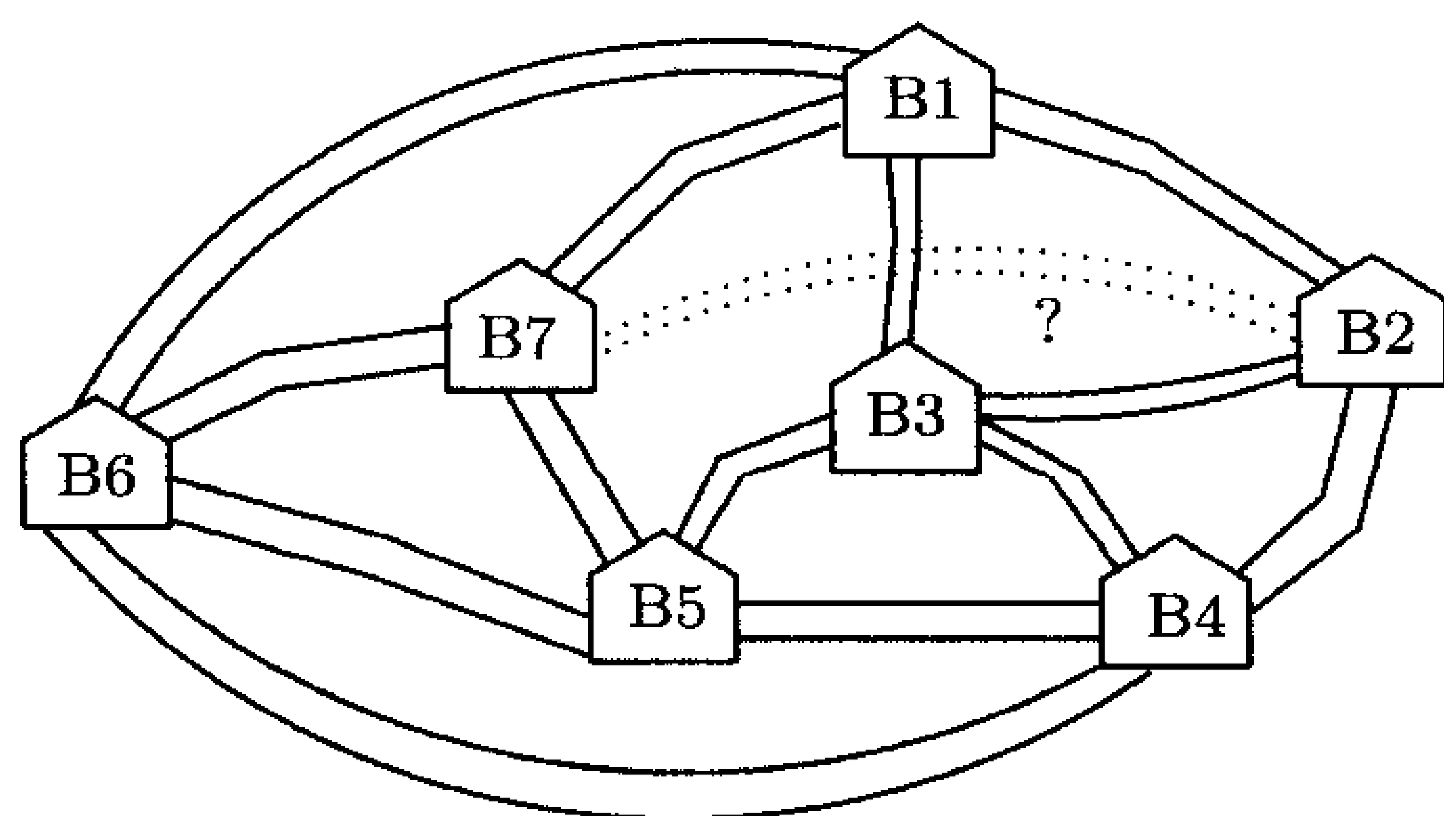



图 9.2 一个主题公园里的 7 个景点

9.3(a) 中图 $G_6$ 建立模型, 其中它的顶点代表景点, 它的边代表封闭的空调人行管道. 类似地, 一个有 7 个景点的主题公园可以用图 9.3(c) 中图 $G_7$ 建立模型. 这样, 上面问题的提法便转化为: 能否分别把 $G_6$ 和 $G_7$ 画在一个平面上而使得边两两不交叉. 对 $G_6$ 的回答当然是肯定的, 如图 9.3(b) 所示. 至于 $G_7$, 答案就不太明确了 (至少现在是这样).

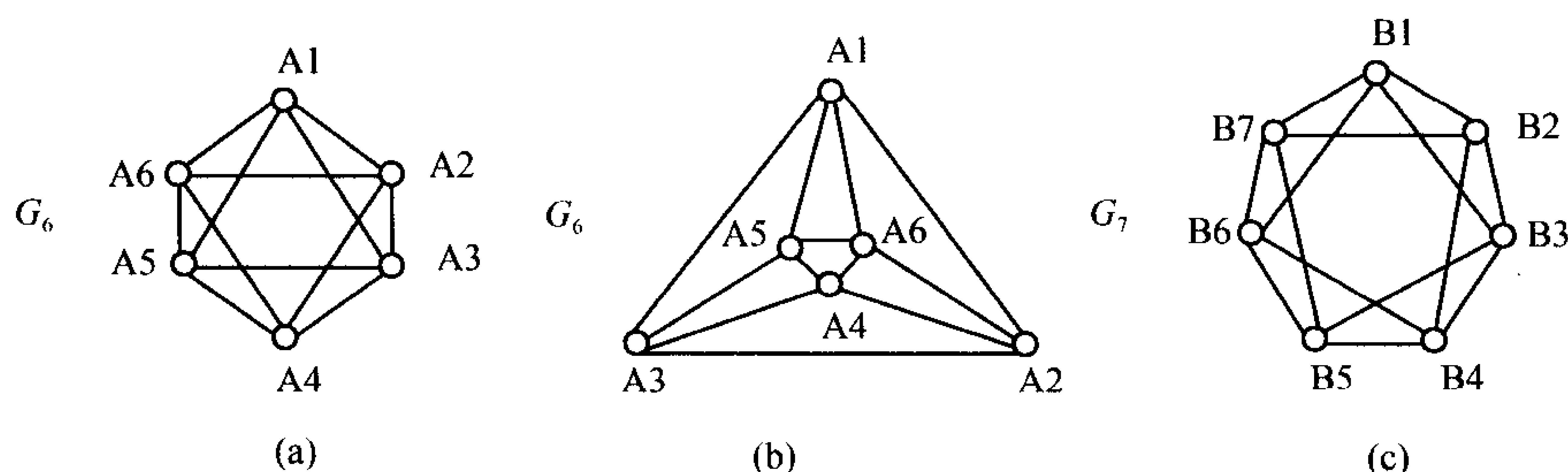



图 9.3 图 $G_6$ 和 $G_7$

图 $G$ 称为是一个**平面图 (planar graph)** 如果 $G$ 能够画在一个平面上而使得任何两条边都不会交叉. 因此, 图 9.3 中的图 $G_6$ 是平面的, 而至于图 $G_7$, 我们需要进一步研究它是否为平面的. 一个不是平面的图称为**非平面的 (nonplanar)**. 一个图 $G$ 称为是一个**平图 (plane graph)**, 如果 $G$ 已经画在一个平面上且 $G$ 的任何两条边都不交叉. 因此, 一个图即使是平面的, 也有可能不是平图, 如图 9.3(a).

我们经常会在教科书、杂志和故事书里见到这样一道有名的难题: 要求把三种公用设施 (煤气、水和电) 分别用煤气管道、水管和电线连接到三间房子里, 问能否实现任何一根线或管道不与另外线或管道相交? 这个问题常称为**三间房子和三种设施问题 (Three Houses and Three Utilities Problem)**. 如图 9.4(a) 所示, 可以建立图 9.4(b) 所示的图模型; 事实上, 这个图是 $K_{3,3}$. 因此, 用图论语言, 三间房子和三种设施问题就是问图 $K_{3,3}$ 是否为平面的.

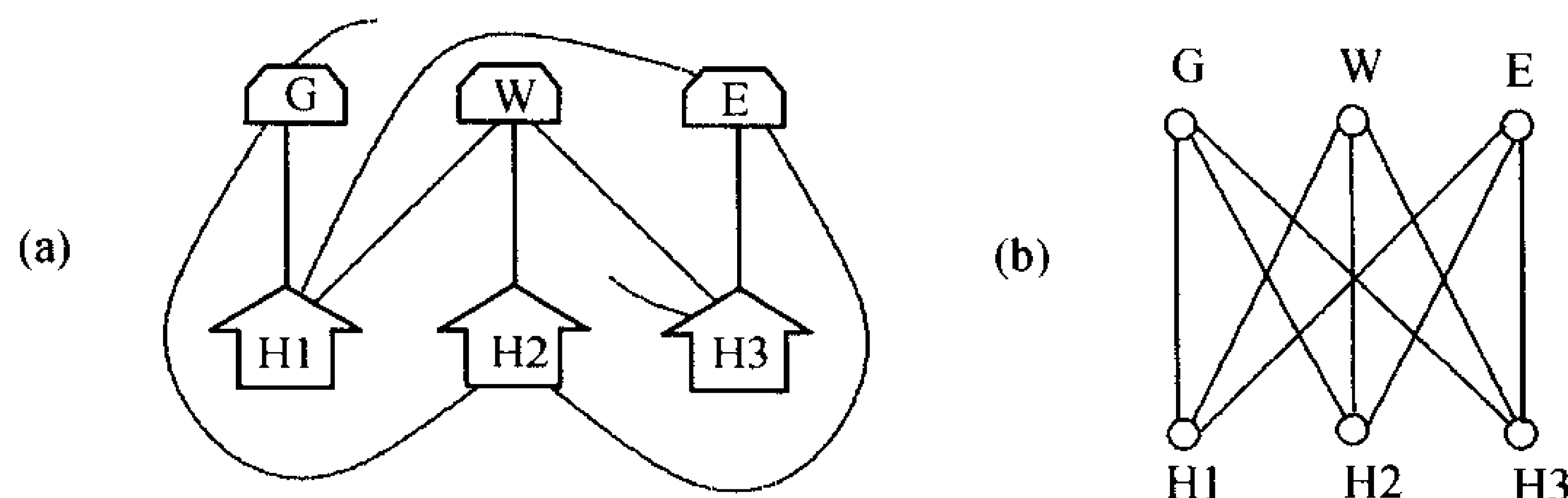



图 9.4 三间房子和三种设施问题

在回答上面问题之前，我们很有必要对平面图 (准确地说是，连通平面图) 进行一些观察. 首先，看几类大家熟知的平面图：每个圈都是平面的，每条路和每个星图也都是平面的. 事实上，每个树都是平面图. 当然，每个能画在一个平面上而使得它的边两两不交叉的图一定是平面的，因为这是平面图的定义. 这样看来，$K_{3,3}$ 好像是个非平面图. 然而，即使它是非平面的，那么又如何去证明这一点呢? 毕竟，不能因为我们看不出如何把一个图以边不相交的方式画在一个平面上，就确定这个图是非平面的. 下面我们将着手处理这类问题.

考虑图 9.5(a) 所示的图 $H$. 当然 $H$ 是连通的. 但同时 $H$ 也是平面的，因为我们可以从图 9.5(b) 中看出，$H$ 能画成了一个平图.

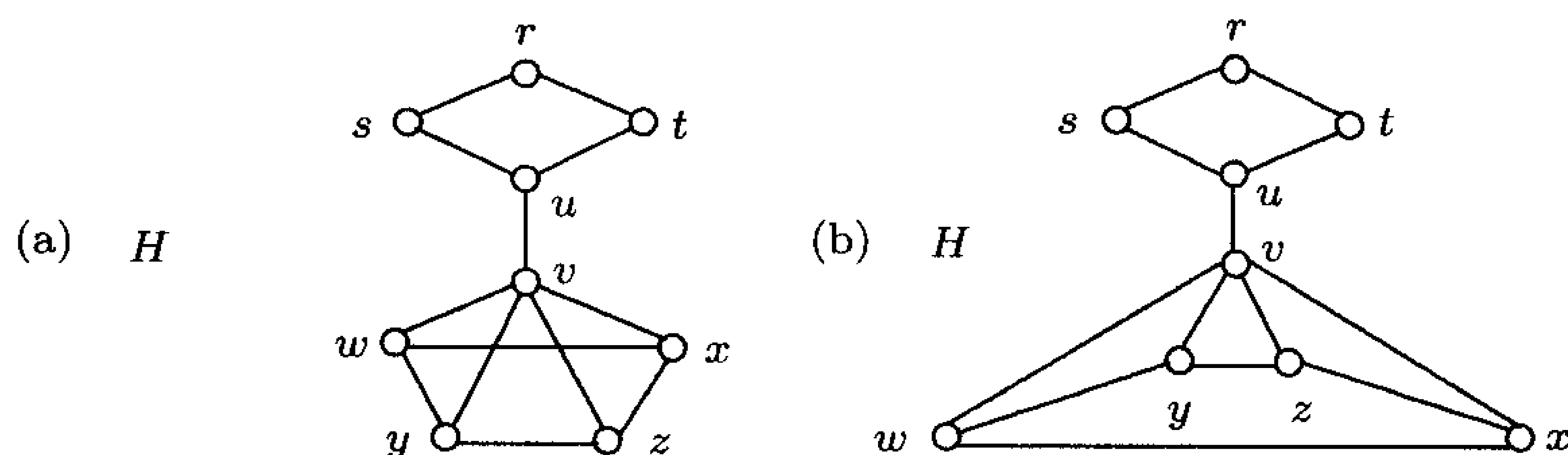



图 9.5 一个平面图和一个平图

一个平图把平面分成一些连通片，这些连通片称为**区域** (**regions**). 例如，对于图 9.5(b) 所示的图 $H$，有 6 个区域. 图 $H$ 被重新画在图 9.6 中，6 个区域分别记为 $R_1, R_2, \cdots, R_6$. 在每个平图中，总有一个区域是无界的，该区域称为是**外区域** (**exterior region**). 对于图 9.6 的 $H$ 而言，$R_6$ 是外区域. 在一个平图中，顶点和边都与某个给定区域 $R$ 关联的子图称为是 $R$ 的**边界** (**boundary**). 图 9.6 也分别表示出 $H$ 的 6 个区域的边界.

注意，边 $uv$ 是图 9.6 中图 $H$ 的一个割边，而且仅位于一个区域的边界上，也就是外区域. 事实上，一个割边总是恰好在一个区域的边界上 (尽管未必是外区域). 一个非割边的边一定位于两个区域的边界上. 例如，边 $vy$ 既位于 $R_2$ 的边界上，也

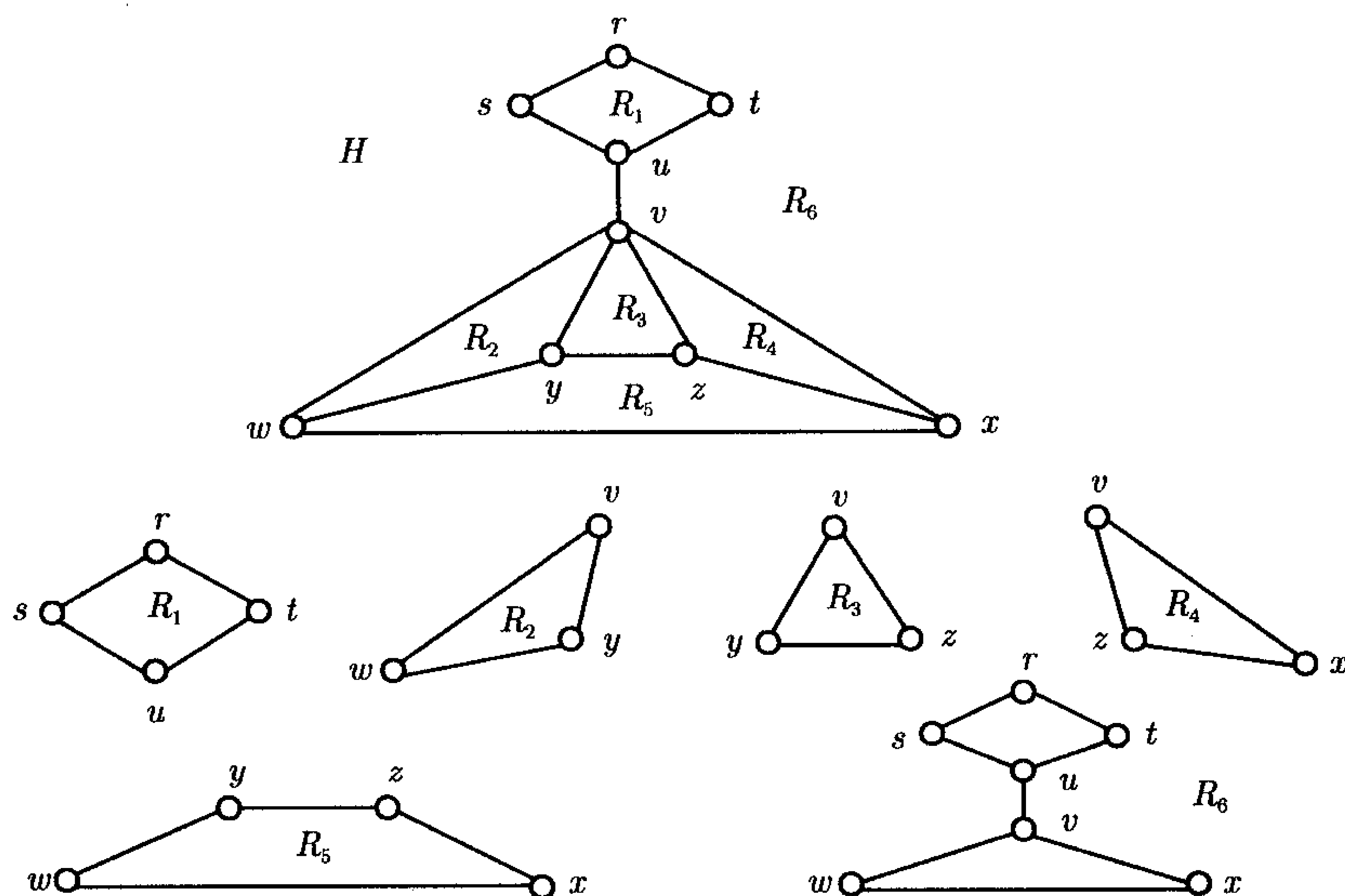



图 9.6　一个平图和它的区域

位于 $R_3$ 的边界上. 如果我们删除边 $vy$, 则所得的图仍然是一个平面图, 但是少了一个区域, 因为 $R_2$ 和 $R_3$ 已经成为另一个区域的一部分了. 另一方面,$H-uv$ 是不连通的, 但是区域个数没有发生变化. 还有一个观察也是很有用的.

如果 $G$ 是一个至少含有三条边的连通平图, 则 $G$ 的每个区域的边界至少含有三条边.

我们再看一下图 9.6 中的图 $H$, 它是一个阶为 9, 边数为 13 且含有 6 个区域的连通图. 更进一步地, 它的割边仅仅位于一个区域 (外区域) 的边界上, 而且所有其他边都位于 2 个区域的边界上. 设 $n, m, r$ 分别记作图的阶、边数和区域个数, 则有 $n=9$, $m=13$ 和 $r=6$. 我们注意到 $n-m+r=2$. Euler 发现这个等式对所有的连通平图都成立. 因此, 这个等式称为**Euler 恒等式 (Euler Identity)**.

**定理 9.1 (Euler 恒等式)**　如果 $G$ 是一个阶为 $n$, 边数为 $m$ 且含有 $r$ 个区域的连通平图, 则 $n-m+r=2$.

**证**　[最小反例证法] 首先, 如果 $G$ 是一个阶为 $n$ 的树, 则根据定理 4.4, 我们有 $m=n-1$, $r=1$, 所以, $n-m+r=2$. 因此, 我们只需要考虑不是树的连通图. 假设这个定理不成立. 则存在一个含有最少边数的连通平图 $G$, 使得它不满足 Euler 恒等式. 设图 $G$ 具有阶 $n$, 边数 $m$, 和区域数 $r$, 则 $n-m+r\neq 2$. 因为 $G$ 不是树, 因此存在一条不是割边的边 $e$. 易知, $G-e$ 是一个阶为 $n$, 边数为 $m-1$, 区域数目为 $r-1$ 的连通平图. 因为, $G-e$ 的边数小于 $m$, 所以 Euler 恒等式对 $G-e$ 是成立的. 故 $n-(m-1)+(r-1)=2$, 也就是 $n-m+r=2$, 从而导致矛盾. ∎

图 9.7 所示的是一个平面图 $G$, 以及把 $G$ 表示为平图的几种画法. 然而, 因为 $G$ 有固定阶数 $n=7$, 固定边数 $m=9$, 以及 Euler 恒等式是成立的 $(n-m+r=7-9+r=2)$, 所以, 把 $G$ 表示为平图的每一种画法都会产生相同个数的区域, 即 $r=4$.

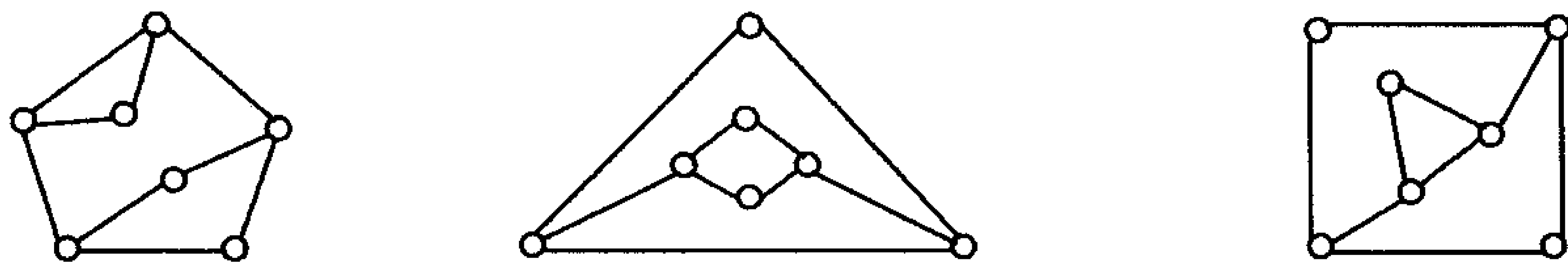


图 9.7 一个平面图的不同画法

Euler 恒等式有许多有用的并且十分有趣的推论. 其中的一个结论告诉我们平面图不能有太多的边 (这个结论可以证明有些图不是平面的).

**定理 9.2** 如果 $G$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 且边数为 $m$ 的平面图, 则

$$m \leqslant 3n-6.$$

**证** [直接证法] 首先, 假设 $G$ 是连通的. 如果 $G \cong P_3$, 显然不等式成立. 因此, 我们假设 $G$ 至少含有三条边. 把 $G$ 画成一个平图, 并分别标记 $G$ 的 $r$ 个区域为 $R_1, R_2, \cdots, R_r$. 注意到每个区域的边界至少含有三条边. 所以, 如果用 $m_i$ 表示区域 $R_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 边界上的边数, 则有 $m_i \geqslant 3$. 设

$$M=\sum_{i=1}^{r} m_i \geqslant 3r.$$

在 $M$ 中, 如果某条边是割边, 则它被计数一次; 如果这条边不是割边, 则它被计数两次, 所以 $M \leqslant 2m$. 从而,$3r \leqslant M \leqslant 2m$, 因此,$3r \leqslant 2m$.

对 $G$ 应用 Euler 恒等式, 有

$$6=3n-3m+3r \leqslant 3n-3m+2m=3n-m. \tag{9.1}$$

对 $m$ 解不等式 (9.1), 易知 $m \leqslant 3n-6$.

如果 $G$ 是非连通的, 则我们可以给 $G$ 增加一些边而产生一个阶为 $n$ 且边数为 $m'$ 的连通平图, 其中 $m'>m$. 从前面结果可以看出,$m' \leqslant 3n-6$, 因此,$m<3n-6$.

■

定理 9.2 给出了一个图是平面图的必要条件. 从另一个角度看, 这也是一个图是非平面图的充分条件. 特别地, 我们得到定理 9.2 的逆否命题:

如果 $G$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 且边数为 $m$ 的图, 且 $m>3n-6$, 则 $G$ 是非平面的.

下面给出定理 9.2 的一些有用且非常有趣的推论.

**推论 9.3** 每个平面图含有一个度小于或等于 5 的顶点.

**证** [逆否证法] 假设 $G$ 为每个顶点的度均大于或等于 6 的图. 设 $G$ 的阶是 $n$, 边数是 $m$, 显然,$n \geqslant 7$. 因此,

$$2m = \sum_{v \in V(G)} \deg v \geqslant 6n.$$

故 $m \geqslant 3n > 3n-6$. 根据定理 9.2, $G$ 是非平面的. ■

我们现在给出一个非平面图的例子.

**推论 9.4** 完全图 $K_5$ 是非平面的.

**证** [直接证法] 显然, 图 $K_5$ 的阶为 $n=5$, 边数为 $m=10$. 因为 $m=10>9=3n-6$, 故由定理 9.2 知,$K_5$ 是非平面的. ■

让我们回顾一下定理 9.2 的证明过程. 在该定理中, 我们已经讨论了平面图 $G$ 的 $r$ 个区域 $R_1, R_2, \cdots, R_r$, 还提到了区域 $R_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 的边界所含的边数 $m_i$ 至少为 3. 显然, 如果每个区域的边界的边数 $m_i$ 恰好为 3, 即, 对每个 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 有 $m_i = 3$. 因此,$M = 3r$. 我们还提到, 在计算 $M$ 的过程中, 每条割边计数一次而每条非割边计数两次. 这样,(9.1) 中的不等式成为等式仅当 $3r = M = 2m$, 即每个区域的边界恰好含 3 条边, 并且 $G$ 没有割边 (除去情形 $G \cong K_{1,3}$). 在这种情况下, $m = 3n-6$. 因此, 对一个阶为 $n \geqslant 3$ 且边数为 $m$ 的连通平图 $G$ 而言, 等式 $m = 3n-6$ 成立仅当 $G$ 的每个区域 (包括外区域) 的边界是一个三角形. 图 9.8 列出了三个这样的图.

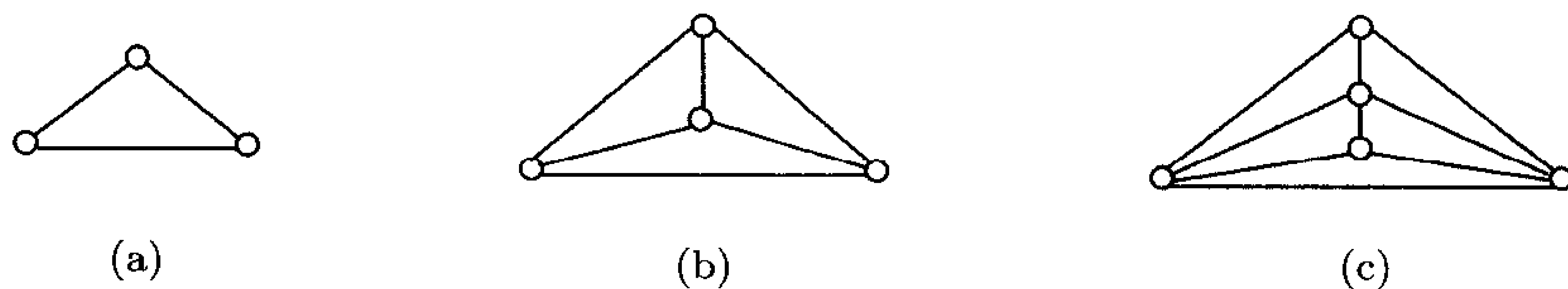



图 9.8 极大平面图

注意, 图 9.8(a) 和 9.8(b) 所示的图都是完全图, 然而图 9.8(c) 所示的图却是 $K_5 - e$, 其中 $e$ 是某条边. 事实上, 如果图 $G$ 是一个阶为 $n$ 边数为 $m$ 的连通平面图, 其中 $m = 3n-6$ 且 $n \geqslant 5$, 则 $G$ 一定不是完全图. 此时, 如果在 $G$ 的任意两个不邻接的顶点之间添加一条边 $e$, 则图 $G+e$ 不可能是平面的, 因为它的边数 $m+1$ 已经超过了 $3n-6$. 这进一步证实了我们所得到的推论 9.4, 即 $K_5$ 不是平面的.

图 $G$ 称为是**极大平面的 (maximal planar)**, 若 $G$ 是平面的, 且在 $G$ 的任意两个不邻接的顶点之间添加一条边即可产生一个非平面图. **极大平面图**的另一种

表述方式是：如果 $G$ 是平面的, 但 $G$ 不是其他任何平面图的一个生成子图. 对于 $1 \leqslant n \leqslant 4$, 仅有的 $n$ 阶极大平面图是 $K_n$. 因此, 图 9.8 的所有图都是极大平面的. 如果把一个阶为 $n \geqslant 3$ 边数为 $m$ 的极大平面图 $G$ 画为一个平图, 则 $G$ 的每个区域的边界必然为一个三角形且 $m = 3n - 6$.

我们现在已经得到了一个图是非平面的充分条件, 让我们再次回到三间房子和三种设施的问题. 前面已经说明, 这个问题等价于判断 $K_{3,3}$ 是否是平面的. 当然, 试图把 $K_{3,3}$ 边不交叉地画在一个平面上是不会成功的, 这让我们感觉 $K_{3,3}$ 是非平面的. 易知, 图 $K_{3,3}$ 的阶为 $n = 6$, 边数为 $m = 9$, 故 $3n - 6 = 12$. 即 $m \leqslant 3n - 6$, 而这又能说明什么呢. 因为我们仅知道, 如果 $m > 3n - 6$, 那么图是非平面的. 所以仅从定理 9.2 我们无法判断 $K_{3,3}$ 的平面性. 另一方面, 如果注意到 $K_{3,3}$ 是二部的 (从而不含奇圈), 再仔细观察定理 9.2 的证明, 那么最终可以证明我们的感觉是正确的.

**定理 9.5** 图 $K_{3,3}$ 是非平面的.

**证** [反证法] 假设 $K_{3,3}$ 是平面的, 把 $K_{3,3}$ 画成一个平图. 因为 $n = 6$ 以及 $m = 9$, 根据 Euler 恒等式有 $n - m + r = 6 - 9 + r = 2$, 所以 $r = 5$. 设 $R_1, R_2, \cdots, R_5$ 为其五个区域, $m_i$ 为区域 $R_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ 的边界上的边数. 因为 $K_{3,3}$ 不含三角形, 所以 $m_i \geqslant 4$, 其中 $1 \leqslant i \leqslant 5$. 又因为 $K_{3,3}$ 不含割边, 所以有

$$2m = \sum_{i=1}^{5} m_i \geqslant 20,$$

从而,$m \geqslant 10$, 导致矛盾. ∎

因此, 三间房子和三种设施的问题解决了. 我们不可能以煤气管道或电线或水管不交叉的方式分别把三种设施连接到三间房子.

定理 9.2 提供了一个图是平面的必要条件, 但它仅仅是一个必要条件. 这个定理有助于我们去证明一个图是非平面的, 但注意到, 存在一些非平面图, 它们是不能根据这个定理去证明其为非平面的, 例如 $K_{3,3}$. 幸运的是, 下面我们将介绍一个著名的定理, 它给出了一个图为平面图的必要和充分条件, 它归功于 Kazimierz Kuratowski.

Kazimierz Kuratowski 于 1896 年 2 月 2 日出生在波兰的华沙. 1913 年, 由于政治原因, Kuratowski 离开波兰, 前往苏格兰的格拉斯哥大学学习工程学. 他完成大学的第一年学业后, 正当他回家准备第二年的学业时, 第一次世界大战爆发了, 这使得他无法再回到苏格兰.

当时, 波兰的华沙大学已经被俄罗斯控制了几十年, 大学教学甚至只能秘密地进行. 1915 年, 华沙大学更名为波兰大学. 作为波兰大学的首届学生之一,Kuratowski 开始学习数学. 他深受老师们的影响, 这些老师中有几位非常喜爱拓扑学. Kuratowski 于 1917 年撰写了他的第一篇学术论文, 并于 1921 年被授予博士学位. 1927

年,Kuratowski 成为利沃夫技术大学的一名数学教授. 利沃夫技术大学的数学家们做了大量的研究工作, 他们常常在茶楼和咖啡店里一起讨论问题. 正是在利沃夫, Kuratowski 发现并证明了图论中一个非常重要的定理 (我们下面将要介绍). 1934 年,Kuratowski 回到华沙, 并成为华沙大学的一名教授. 1939 年, 德国入侵波兰, 人们的生活陷入严重混乱. 二战期间, 华沙成了一所地下大学, Kuratowski 在此任教. 二战以后, 波兰的整个教育系统必须要进行重建, Kuratowski 担当了领导角色. 尽管 Kuratowski 一生中进行了大量的研究工作, 主要研究集合论和拓扑学, 但他最引人注意的工作却是他对学校的数学研究和教育工作的指导. 1980 年 6 月 18 日, Kuratowski 去世于他的出生地华沙.

那么 Kuratowski 对图论的主要贡献到底是什么呢? 我们将发现, 确定哪些图是平面的和哪些图是非平面的, 推论 9.4 和定理 9.5 起着关键性的作用, 它们分别证明了 $K_5$ 和 $K_{3,3}$ 是非平面的. 显然, 如果 $H$ 是图 $G$ 的一个非平面子图, 则 $G$ 也是非平面的. 特别地, 如果 $G$ 含有 $K_5$ 或 $K_{3,3}$, 则 $G$ 是非平面的.

至此, 一个阶为 $n \geqslant 3$ 以及边数为 $m$ 的图 $G$ 只要满足下面几种情形之一, 那么 $G$ 就是非平面的: (1) $m > 3n-6$, (2) $K_5$ 是 $G$ 的一个子图, (3) $K_{3,3}$ 是 $G$ 的一个子图. 我们已经注意到, $K_{3,3}$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 且边数为 $m$ 的非平面图, 但却不满足不等式 $m > 3n-6$. 此外, 即使 $m > 3n-6$, 我们也无法保证 $G$ 一定含有 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 作为子图, 见下例.

**例 9.6** *存在一个阶为 $n \geqslant 3$, 边数为 $m > 3n-6$ 的图, 使得它既不以 $K_5$ 作为子图, 也不以 $K_{3,3}$ 作为子图.*

**解** 图 9.9 所示的是一个阶为 5 边数为 9 的极大平面图 $G$ (即 $G$ 是由 $K_5$ 通过删除一条边而得到的), 下面考虑图 $F \cong G \times K_3$, 其中 $F$ 在图 9.9 中也被画出了. 因此,$F$ 由 $G$ 的三个拷贝组成, 分别记为 $G_1, G_2$ 和 $G_3$, 其中 $u_1u_2 \notin E(G_1)$, $v_1v_2 \notin E(G_2)$, $w_1w_2 \notin E(G_3)$. 为了能更容易地画出 $G$, 每个图 $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 的九条边都没有画出. 图 9.9 中的 $F$ 的阶为 15, 边数为 $m = 42$. 所以 $m = 42 > 39 = 3n-6$.

现在, 我们来证明 $K_5$ 不是 $F$ 的一个子图. 设 $X$ 是 $F$ 的任意一个含有五个顶点的集合. 我们断言: 并非 $X$ 的任意两个顶点之间均邻接. 显然, 我们不可能有 $X = V(G_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, 因为 $G_i \ncong K_5$. 另外, $F$ 的子图 $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 不可能恰好含有一个或恰好含有两个 $X$ 的顶点, 因为 $G_i$ 的每个顶点仅与 $F$ 中不属于 $G_i$ 的两个顶点邻接. 这就推出 $\langle X \rangle \ncong K_5$.

接下来, 我们证明 $K_{3,3}$ 也不是 $F$ 的一个子图. 设 $Y$ 和 $Z$ 为 $F$ 中两个不相交的恰有三个顶点的集合. 我们将证明, 不可能出现如下的情形: $Y$ 的每个顶点与 $Z$ 的每个顶点都邻接. 首先, 注意到对任意的 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, $Y$ 不可能是 $V(G_i)$ 的子集; 否则,$Z$ 的某个顶点一定不在 $G_i$ 中, 且这样的顶点仅与 $G_i$ 的一个顶点 (而不是三个) 邻接. 类似地, $Z$ 也不可能是 $V(G_i)$(对任意的 $i$) 的子集.

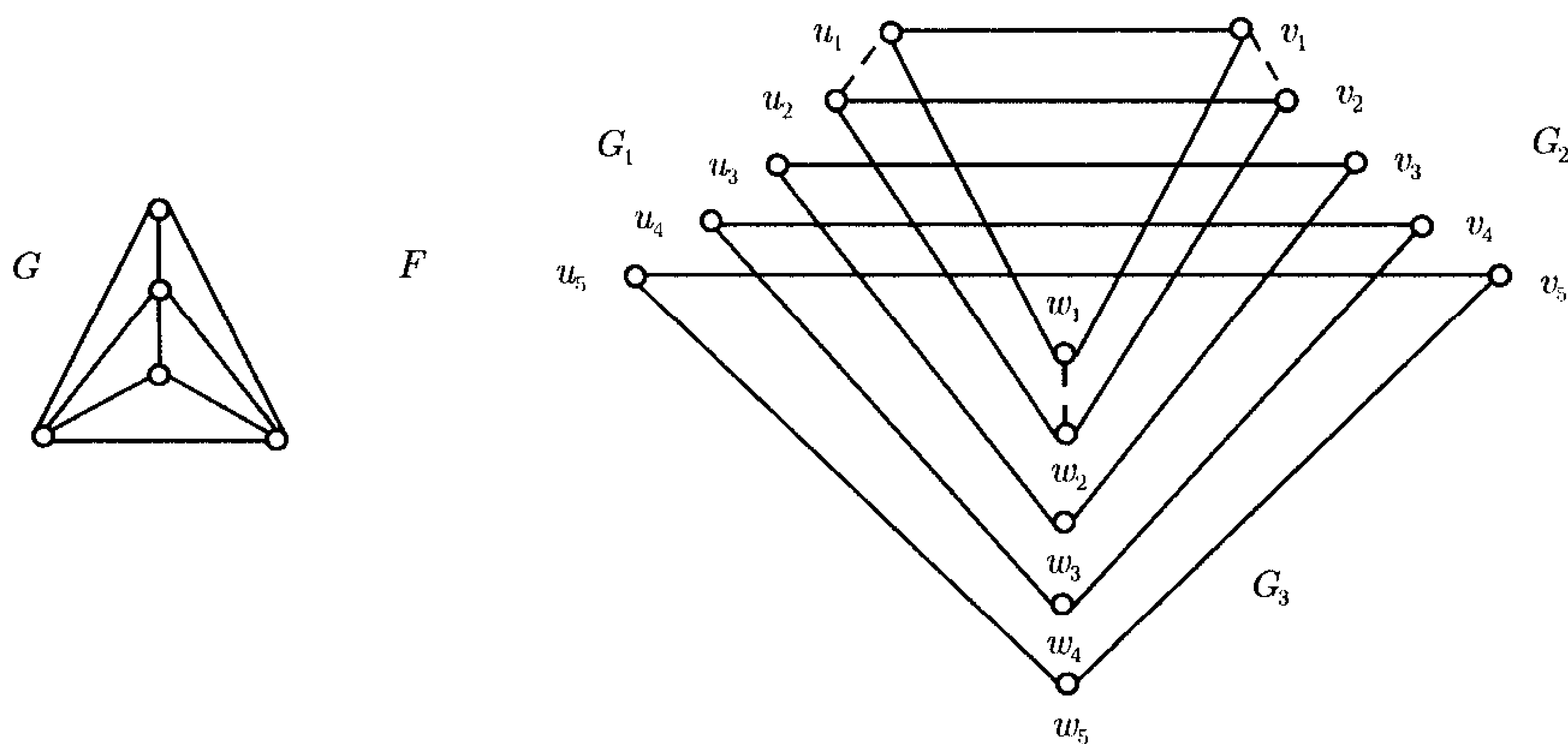



图 9.9 图 $F = G \times K_3$

因此, 如果 $Y$ 的每个顶点与 $Z$ 的每个顶点邻接, 则每个子图 $G_i$ 含有 $Y$ 中的至多两个顶点和 $Z$ 中的至多两个顶点. 如果某个子图 $G_i$ 恰好含有 $Y$ 的两个顶点, 则 $Z$ 有一个非 $G_i$ 的顶点, 它仅与 $G_i$ 的一个顶点邻接. 因此, 不存在子图 $G_i$, 使得它含有 $Y$ 的两个或两个以上的顶点 (或 $Z$ 的两个或两个以上的顶点). 这就推出 $G_1$, $G_2, G_3$ 中的每个图恰好含有 $Y$ 的一个顶点和 $Z$ 的一个顶点.

设 $u_k$ $(1 \leqslant k \leqslant 5)$ 是 $Y$ 中唯一属于 $G_1$ 的顶点, 因为 $u_k$ 仅与 $G_2$ 的顶点 $v_k$ 邻接, 仅与 $G_3$ 的顶点 $w_k$ 邻接, 从而有 $v_k, w_k \in Z$. 然而, $G_2$ 的顶点 $v_k \in Z$ 仅与 $G_3$ 的 $w_k$ 邻接, 所以 $v_k$ 不与 $Y$ 中属于 $G_3$ 的顶点邻接. 这证明了 $K_{3,3}$ 不是 $F$ 的一个子图. ◇

因为图 9.9 中的图 $F$ 满足不等式 $m > 3n - 6$, 所以 $F$ 是一个非平面图, 它既不以 $K_5$ 作为子图也不以 $K_{3,3}$ 作为子图. 因此, 含 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 作为子图并不是一个图为非平面图的必要条件; 也就是说, 一个图的非平面性并不依赖于其是否含有子图 $K_5$ 或 $K_{3,3}$. 然而, 下面我们将要看到, 这与图的非平面性有着很密切的关系.

现在, 让我们把注意力集中到图 9.10 中的图 $G$ 上. 如果我们把边 $uv$ 用一个度为 2 的顶点 $s$ 代替, 并且分别连接 $s$ 和顶点 $u$ 和 $v$, 那么我们将获得一个新图 $G_1$. $G_1$ 称为 $G$ 的一个细分. 我们可以认为, 图 $G_1$ 是用一个度为 2 的顶点插入到 $G$ 的边 $uv$ 而得到的.

更正式地, 图 $G'$ 称为是图 $G$ 的一个**细分** (**subdivision**), 如果有一个或多个度为 2 的顶点被插入到 $G$ 的一条或多条边中. 在图 9.10 中,$G_1, G_2$, $G_3$ 都是 $G$ 的细分. 事实上,$G_2$ 也是 $G_1$ 的一个细分.

很显然, 一个平面图的每个细分都是平面的, 一个非平面图的每个细分都是非

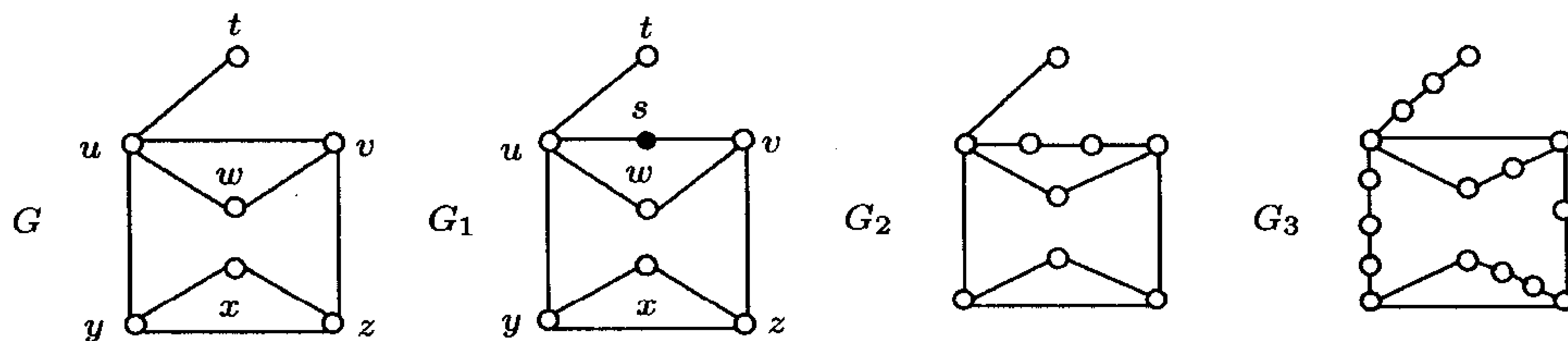



图 9.10 图的细分

平面的. 这就是说, 如果 $G'$ 是图 $G$ 的一个细分, 则 $G'$ 是平面的当且仅当 $G$ 是平面的. 因此, 如果 $H$ 是含有子图 $K_5$, 或含有子图 $K_{3,3}$, 或是 $K_5$ 的一个细分, 或是 $K_{3,3}$ 的一个细分, 那么 $H$ 是非平面的. Kuratowski 的令人惊异的定理告诉我们, 上面结论的逆也是成立的. Kuratowski 定理的证明是一个相当复杂的工作, 在此我们不作叙述.

**定理 9.7 (Kuratowski 定理)** 一个图 $G$ 是平面的当且仅当 $G$ 不含 $K_5$, $K_{3,3}$, 或者 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 的一个细分作为子图.

让我们来总结一下本节的内容. 给定一个阶为 $n \geqslant 3$ 边数为 $m$ 的图 $G$, 我们希望判定它是否为平面的. 为了说明 $G$ 是平面的, 把 $G$ 画成一个平图当然是一种选择. 此外, 如果有不等式 $m > 3n - 6$ 成立, 这也说明 $G$ 是非平面的. 然而, 即使 $m \leqslant 3n - 6$ 成立, $G$ 也有可能是非平面的. 当然, 如果 $G$ 含有一个子图 $K_5$, $K_{3,3}$, $K_5$ 的一个细分, 或 $K_{3,3}$ 的一个细分, 则 $G$ 一定是非平面的; 这是判断 $G$ 是否为非平面图的一种最安全的方法. 为了说明 $G$ 含 $K_5$ 的一个细分作为子图, 我们需要去找出一个子图 $H$, 使得 $H$ 含有五个度为 4 的顶点, 并且在该五个顶点中, 两两之间有一条路连接, 而在 $H$ 中这些路的内点都是度为 2 的顶点 (见图 9.11(a)). 为了证明 $G$ 以 $K_{3,3}$ 的一个细分作为子图, 我们需要去找出一个子图 $F$, 使得 $F$ 含有六个度为 3 的顶点, 并且这六个顶点可以被划分为两个分别含有三个顶点的子集 $V_1$ 和 $V_2$, 其中 $V_1$ 的每个顶点与 $V_2$ 的每个顶点均有一条路连接, 而在 $F$ 中这些路的内点都是度为 2 的顶点 (见图 9.11(b)). 上面的讨论同时也说明了, 如果一个图 $G$ 含有 (1) 至多 4 个度大于或等于 4 的顶点或 (2) 至多 5 个度大于或等于 3 的顶点, 则 $G$ 必定是平面的.

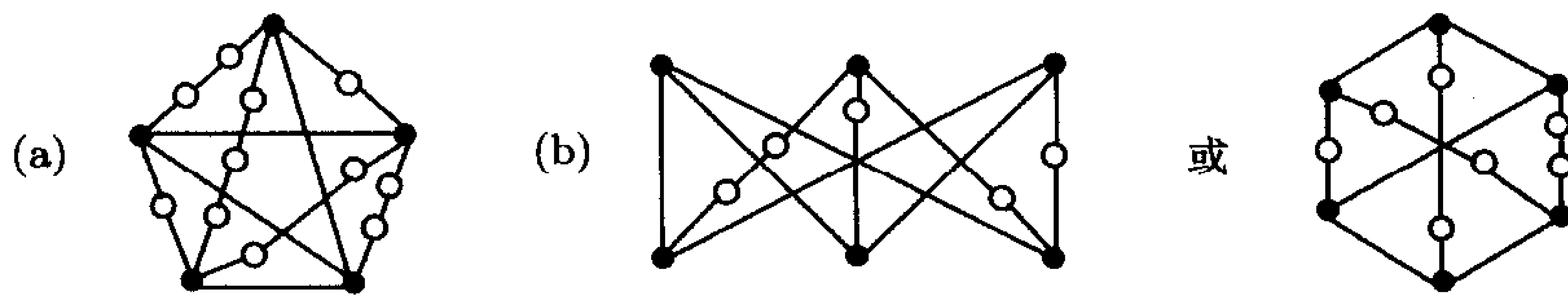



图 9.11 $K_5$ 和 $K_{3,3}$ 的细分

现在我们给出定理 9.7 的一个应用.

**例 9.8** 确定图 9.12 所示的图 $G$ 是否是平面的.

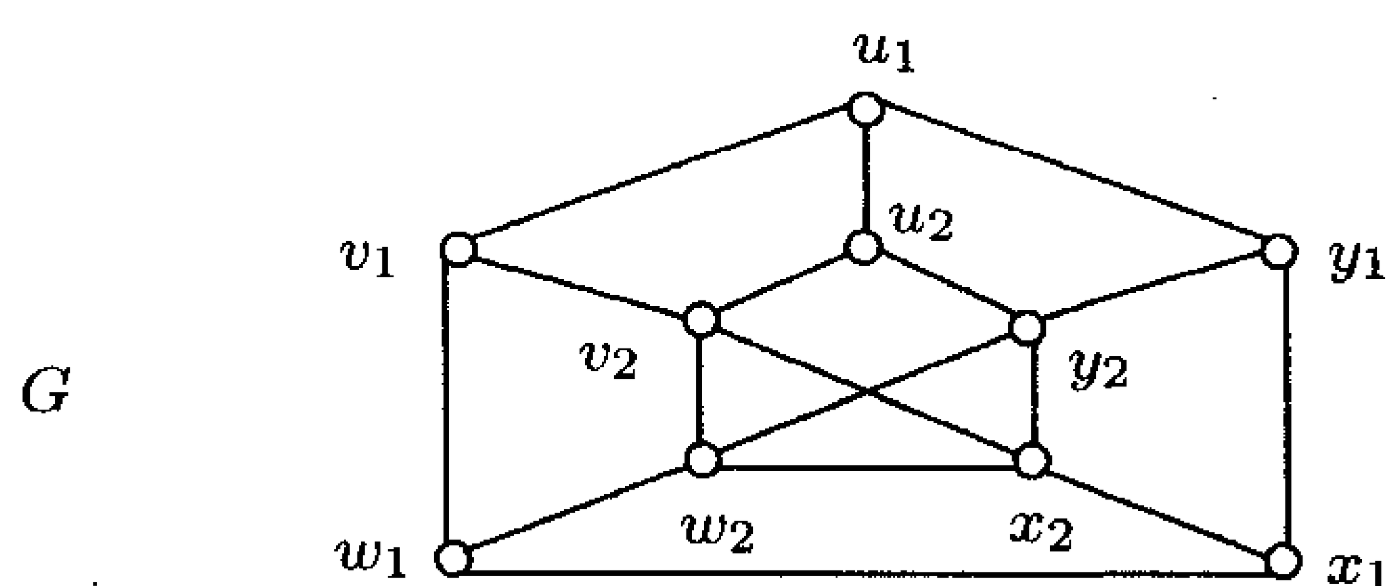



图 9.12 例 9.8 的图 $G$

**解** 如果按所画的,$G$ 当然不是平图. 但这既不能证明也不能反驳 $G$ 是非平面的 (尽管我们可能有如此的怀疑). 注意到, 图 $G$ 的阶为 $n = 10$, 边数为 $m = 18$. 因为 $m = 18 \leqslant 3n - 6 = 24$, 所以我们不能由定理 9.2 得出 $G$ 是非平面的. 另一方面, 仅仅因为 $m \leqslant 3n - 6$, 我们也不能得出 $G$ 是平面的.

接下来, 我们来看 $G$ 是否有子图 $K_5$, $K_{3,3}$, 或者它们的一个细分. 的确,$G$ 的画法很像 $K_5$. 可是 $G$ 仅含 4 个度大于或等于 4 的顶点. 因此, $G$ 不可能含有子图 $K_5$, 也不可能以 $K_5$ 的一个细分作为子图. 另一方面, 注意到图 9.13 中的 $F$ 是 $G$ 的一个子图. 而 $F$ 是 $K_{3,3}$ 的一个细分, 所以根据 Kuratowski 定理, 图 $G$ 的确是非平面的. ◇

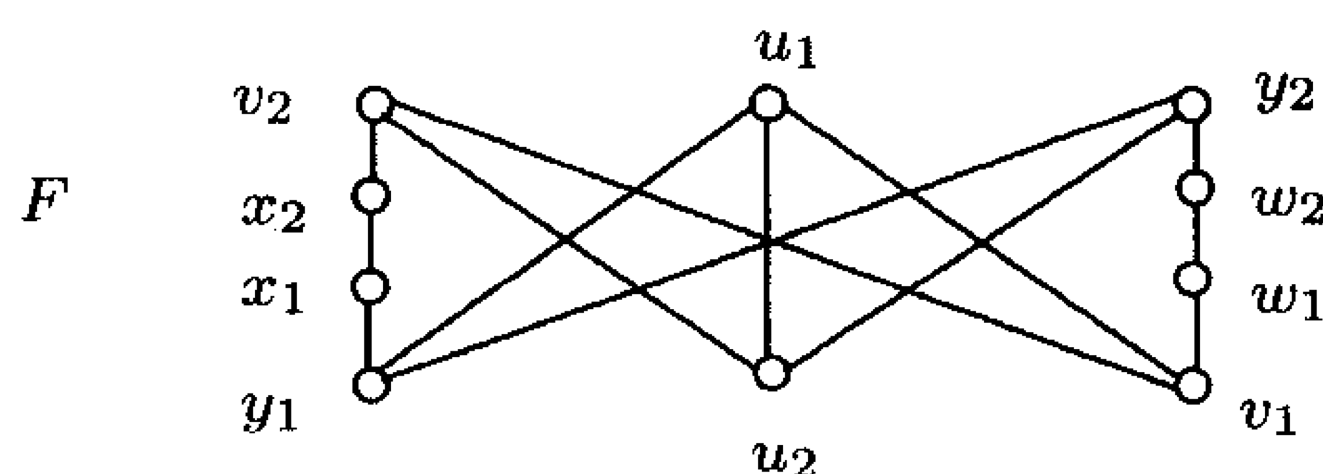



图 9.13 $K_{3,3}$ 的一个细分 (图 9.12 中图 $G$ 的一个子图)

Klaus Wagner 给出了平面图的另一种刻画 (定理 9.15), 我们将在 9.3 节介绍.

## 习题

9.1 用把一个图画成平图的方法, 证明图 9.14 所示的每个图都是平面的. 并对每个图, 验证 Euler 恒等式是成立的.

9.2 把一个阶为 12 的 $r$ 正则图嵌入到平面上, 得到 8 个区域. 问 $r$ 是多少? 并给予解释.

9.3 (a) 某个图 $G$ 的顶点度分别为: 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6. 证明 $G$ 是非平面的.

(b) 某个图 $G$ 的顶点度分别为: 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7. 证明 $G$ 是非平面的.

9.4 (a) 找出所有整数 $n$, 使得 $K_n$ 是平面的.

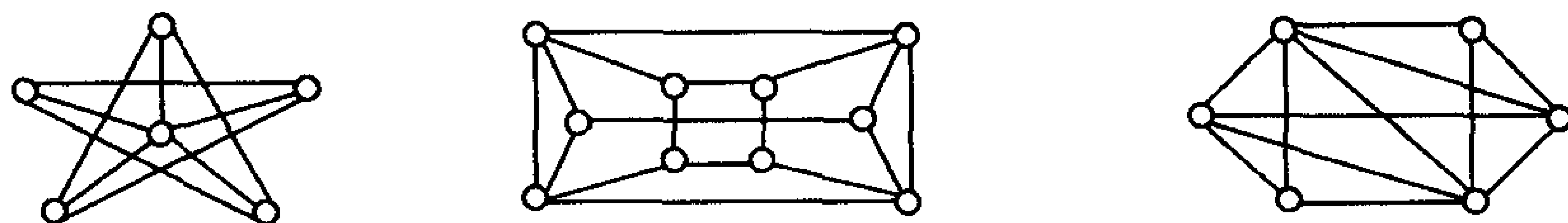


图 9.14 习题 9.1 的图

(b) 找出所有整数对 $r, s$, 使得 $K_{r,s}$ 是平面的.

9.5 证明

(a) 存在一个 4 正则平面图和一个 4 正则非平面图.

(b) 存在一个 5 正则平面图和一个 5 正则非平面图.

(c) 当 $r \geqslant 6$ 时, 不存在 $r$ 正则平面图.

9.6 证明或反驳下面各情形.

(a) 一个平面图的每个子图都是平面的.

(b) 一个非平面图的每个子图都是非平面的.

(c) 如果 $G$ 是一个非平面图, 则 $G$ 含有一个非平面的真子图.

(d) 如果 $G$ 不含 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 作为子图, 则 $G$ 是平面的.

(e) 如果 $G$ 是一个阶为 $n$, 边数为 $m$, 且满足 $m \leqslant 3n-6$ 的图, 则 $G$ 是平面的.

(f) 如果 $G$ 是一个含有一个或多个三角形并且不以 $K_5$ 或 $K_5$ 的一个细分为子图的图, 则 $G$ 是平面的.

9.7 对下列各种情形, 分别列举一个例子或解释为什么不存在这样的例子.

(a) 一个阶为 4 的平面图.

(b) 一个阶为 4 的非平面图.

(c) 一个阶为 6 且不以 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 作为子图的非平面图.

(d) 一个含有 5 个顶点、10 条边和 7 个区域的平面图.

(e) 一个阶为 $n \geqslant 3$, 边数为 $m$, 且满足等式 $m = 3n-6$ 的平面图.

(f) 一个阶为 $n \geqslant 3$, 边数为 $m$, 且满足等式 $m = 3n-6$ 的非平面图.

9.8 判断图 $K_4 \times K_2$ 是否为平面图, 并给予解释.

9.9 判断图 9.15 中的图是否为平面图, 并给予解释.

9.10 判断图 9.16 中的图是否为平面图, 并给予解释.

9.11 判断图 9.17 中的图是否为平面图, 并给予解释.

9.12 判断图 9.18 中的图 $G$ 是否为平面的, 并给予解释.(见图 9.3(c) 中的图 $G_7$.)

9.13 (a) 证明: 如果 $G$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 边数为 $m$ 且不含三角形的平面图, 则 $m \leqslant 2n-4$.

(b) 利用 (a), 证明 $K_{3,3}$ 是非平面的.

(c) 证明或反驳: 如果 $G$ 是一个平面二部图, 则 $G$ 含有一个度小于或等于 3 的顶点.

9.14 设 $G$ 是一个阶为 $n \geqslant 5$ 边数为 $m$ 的平面图.

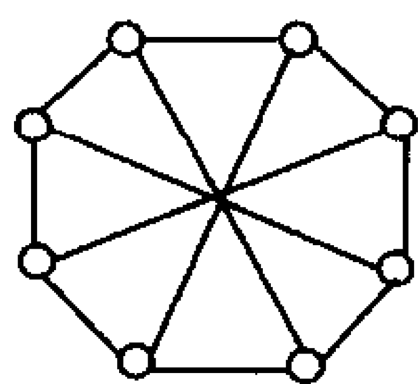


图 9.15 习题 9.9 的图

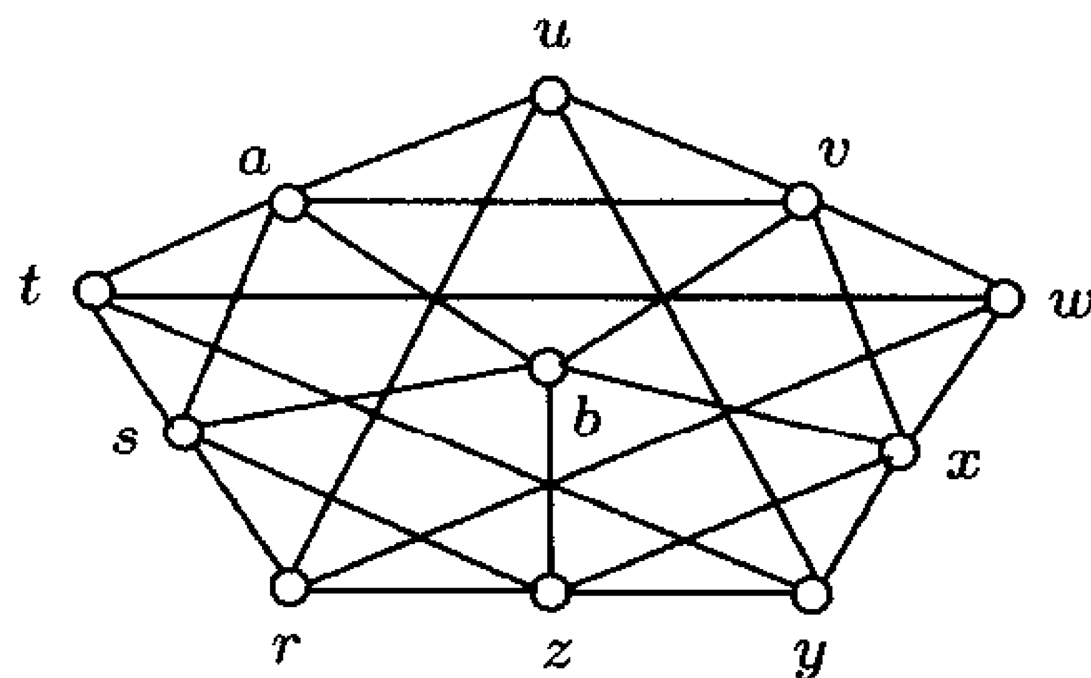



图 9.16 习题 9.10 的图

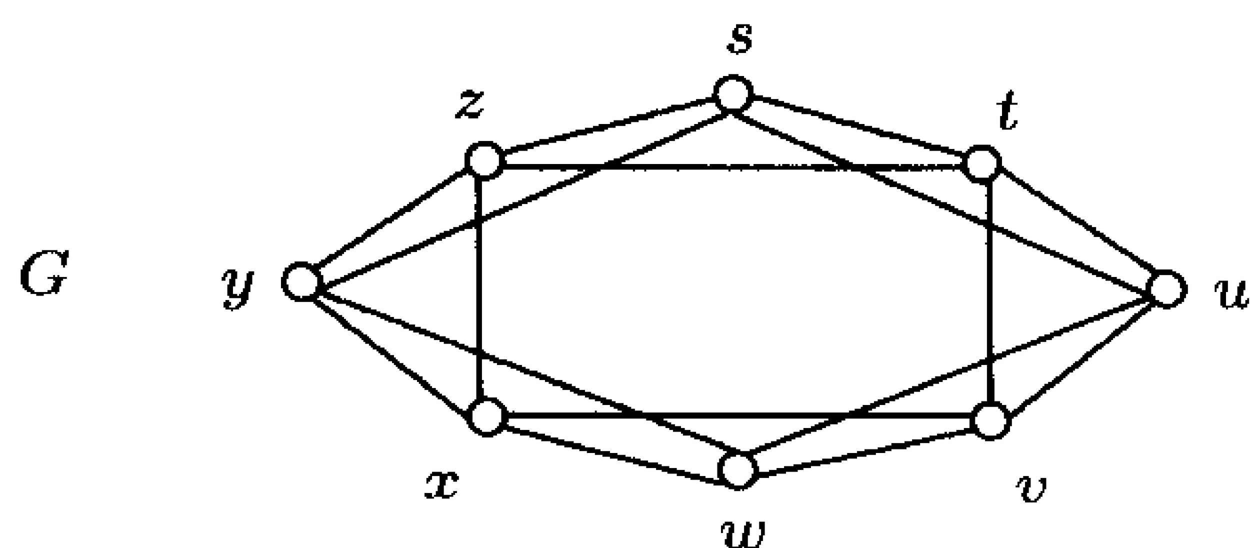



图 9.17 习题 9.11 的图

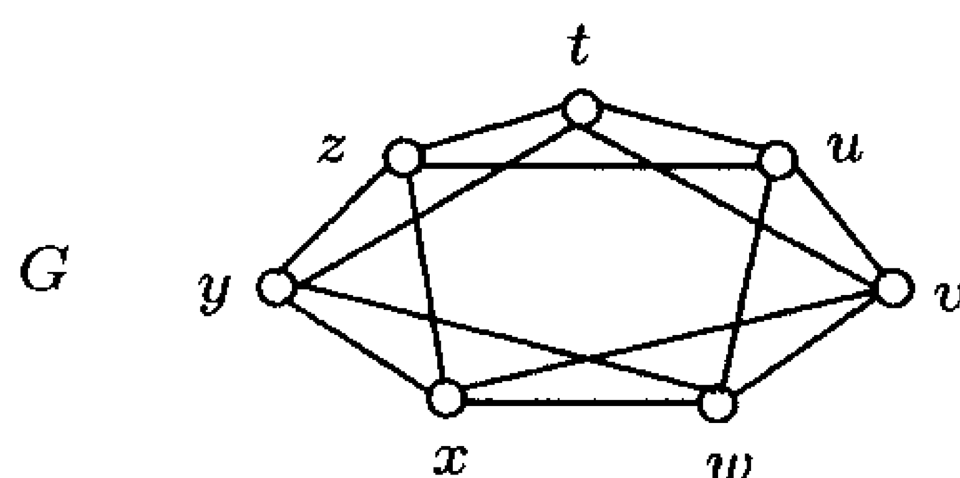



图 9.18 习题 9.12 的图

(a) 证明：如果 $G$ 的最小圈的长度为 5, 则 $m \leqslant \frac{5}{3}(n-2)$.

(b) 利用 (a), 证明 Petersen 图是非平面的.

(c) 利用 Kuratowski 定理, 证明 Petersen 图是非平面的.

(d) 证明或反驳：如果 $n < 20$ 并且 $G$ 的最小圈长为 5, 则 $G$ 含有一个度小于或等于 2 的顶点.

9.15 证明：如果 $G$ 是一个阶为 $n \leqslant 11$ 的平面图, 则 $G$ 含有一个度小于或等于 4 的顶点.

9.16 是否存在两个阶数相同但不同构的极大平面图?

9.17 不难证明：如果 $3 \leqslant n \leqslant 5$, 则 $\overline{C}_n$ 是平面的; 如果 $n \geqslant 9$, 则 $\overline{C}_n$ 是非平面的. 对于剩下的图 $\overline{C}_6$, $\overline{C}_7$ 和 $\overline{C}_8$, 判断它们是否为平面的, 并加以说明.

9.18 证明：不存在阶为 $n \geqslant 3$ 的极大平面图 $G$, 使得它的补图 $\overline{G}$ 也是极大平面的.

9.19 如果把一个阶为 100 的极大平面图嵌入到平面上, 那么将会有多少个区域呢? 并给予解释.

9.20 确定所有极大平面图, 要求其三分之一顶点的度为 3, 三分之一顶点的度为 4, 三分之一顶点的度为 5.

9.21 证明：如果 $G$ 是一个阶至少为 4 的极大平面图, 则 $\delta(G) \geqslant 3$.

9.22 证明：仅存在一个 4 正则极大平面图.

## 9.2 图嵌入到曲面

对于一个平面图 $G$, 我们已经知道 $G$ 能够以边不交叉的方式画在一个平面上.

这样的"画法"称为是 $G$ 在平面上的一个**嵌入 (embedding)**. 此时, 我们也称 $G$ 可以**嵌入 (embed)**到平面上. 另一方面, 如果 $G$ 是非平面的, 则 $G$ 不能嵌入到平面上, 也就是说, 不可能把 $G$ 以边不交叉的方式画到平面上.

也许大家很清楚, 如果 $G$ 是一个平面图, 那么 $G$ 不仅可以嵌入到平面上, 而且还可以嵌入到球面上. 也就是说, 可以把 $G$ 画到一个球面上而使其任何两条边都不交叉. 更进一步, 如果图 $G$ 可以嵌入到一个球面上, 则 $G$ 一定是平面的. 尽管这些发现看上去并没有太大的启发性, 然而它向我们提出了一个问题: 在讨论图的嵌入时, 除了考虑图在球面的嵌入以外, 还可以考虑图在其他曲面上的嵌入吗? **环面 (torus)**是最常见的一种曲面, 一个轮胎形状的曲面; 见图 9.19(a). 在图 9.19(b) 中, 我们看到图 $K_4$ 可以嵌入到环面上. 事实上,$K_4$ 也可以用其他的方式嵌入到环面上; 见图 9.19(c).

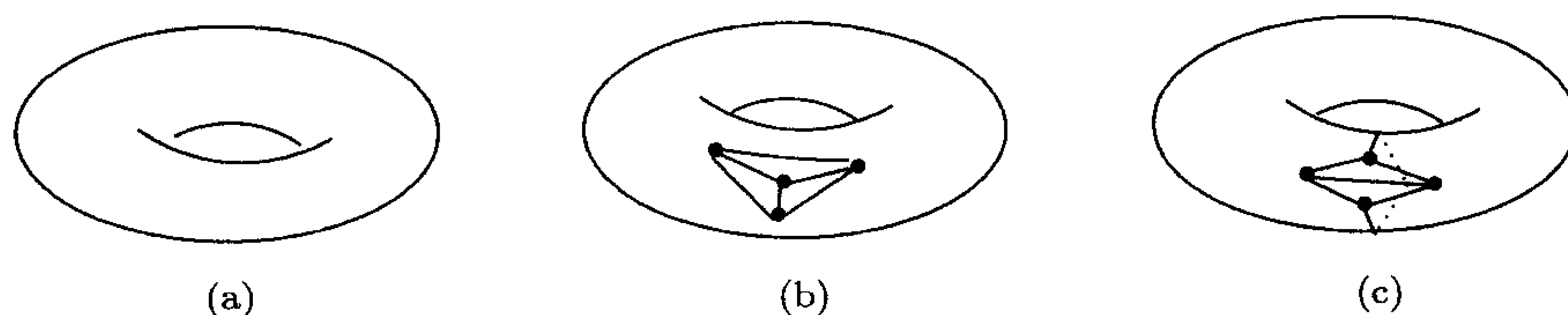



图 9.19 把 $K_4$ 嵌入到环面上

不仅 $K_4$ 可以嵌入到环面上, 而且 $K_5$ 也可以嵌入到环面上, 图 9.20(a) 所示的是 $K_5$ 在环面上的一种嵌入; 而图 9.20(a) 所示的则是 $K_{3,3}$ 在环面上的一种嵌入.

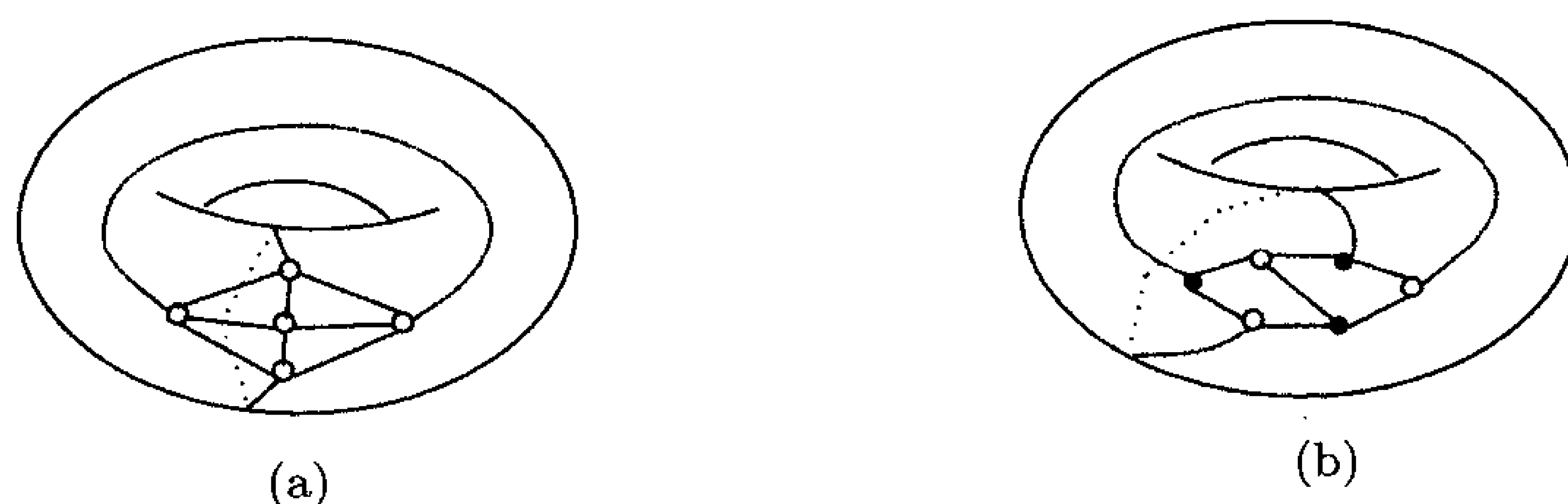



图 9.20 把 $K_5$ 和 $K_{3,3}$ 嵌入到环面上

把图嵌入到环面上, 正如图 9.20 所做的, 可能比较难以直观化. 我们有两种不同方式表示这种嵌入, 现在分别加以解释. 环面是怎样构造出来的呢? 一种方式是: 首先, 如图 9.21 准备一个矩形材料片 (最好选择有柔韧性的), 先重叠边 $a$ 和边 $c$ 以形成一个柱面, 此时边 $a$ 和边 $c$ 被视为同一条边, 且边 $b$ 和边 $d$ 分别形成一个圆. 最后把这两个圆重叠起来便形成了环面.

上面介绍了环面的一种构造方式. 我们发现一个环面可以描述为两个对边重叠

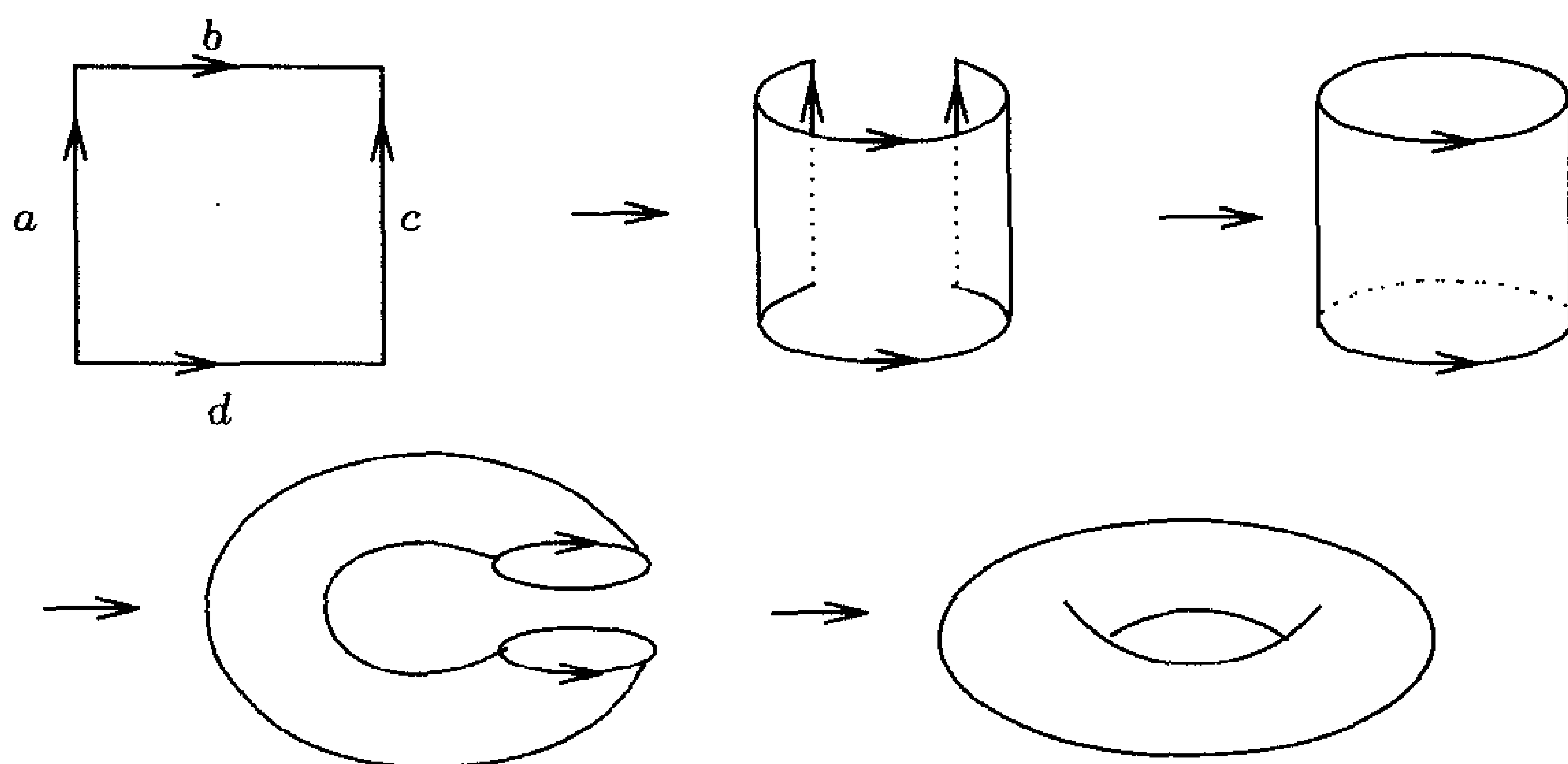



图 9.21 构造一个环面

的矩形. 如图 9.22(a), 矩形代表一个环面, 其中标号为 $A$ 的点在环面上为同一个点, 标号为 $B$ 的点为同一个点, 且标号为 $C$ 的点也为同一个点. 图 9.22(b) 和 9.22(c) 所示的分别为 $K_5$ 和 $K_{3,3}$ 在环面上的嵌入.

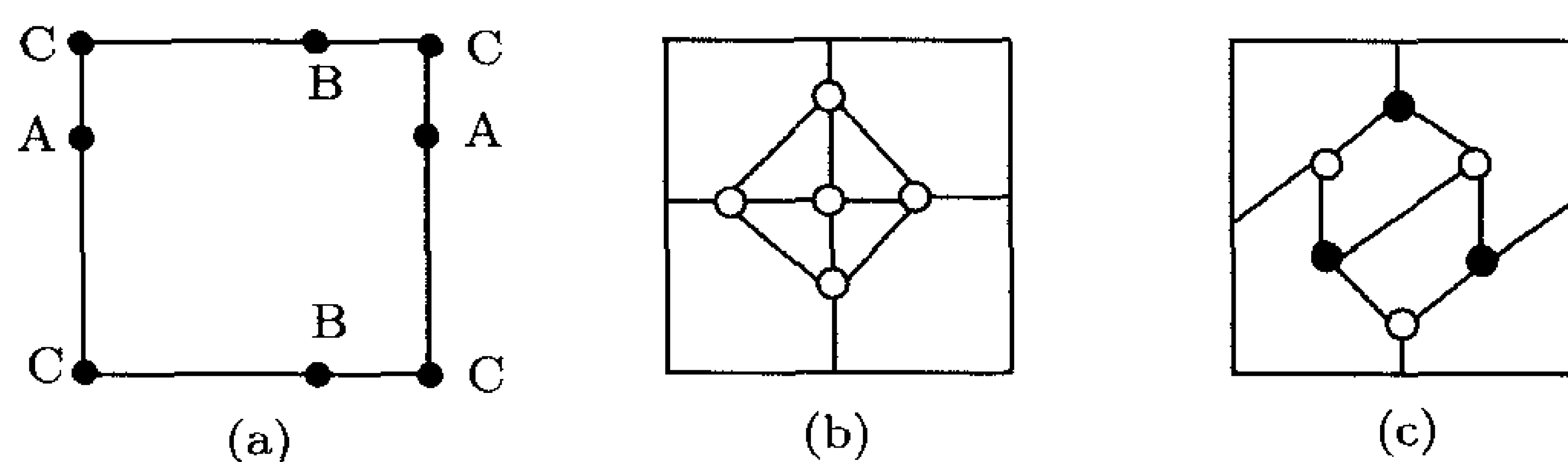



图 9.22 $K_5$ 和 $K_{3,3}$ 在环面上的嵌入

还有一种方法可以描述环面以及把图嵌入到环面上. 首先, 从一个球面出发, 在球面上挖两个洞, 如图 9.23(a). 然后我们把一个环柄粘贴到球面上, 使得环柄的两个端部分别放在两个洞上, 如图 9.23(b). 此时, 我们所构造的就是一个环面, 即一个带环柄的球面, 尽管它与前面构造的环面在外观上有些不同. 图 9.23(c) 所示的是 $K_5$ 在环面上的一种嵌入, 其中 $K_5$ 的一条边穿过环面的环柄.

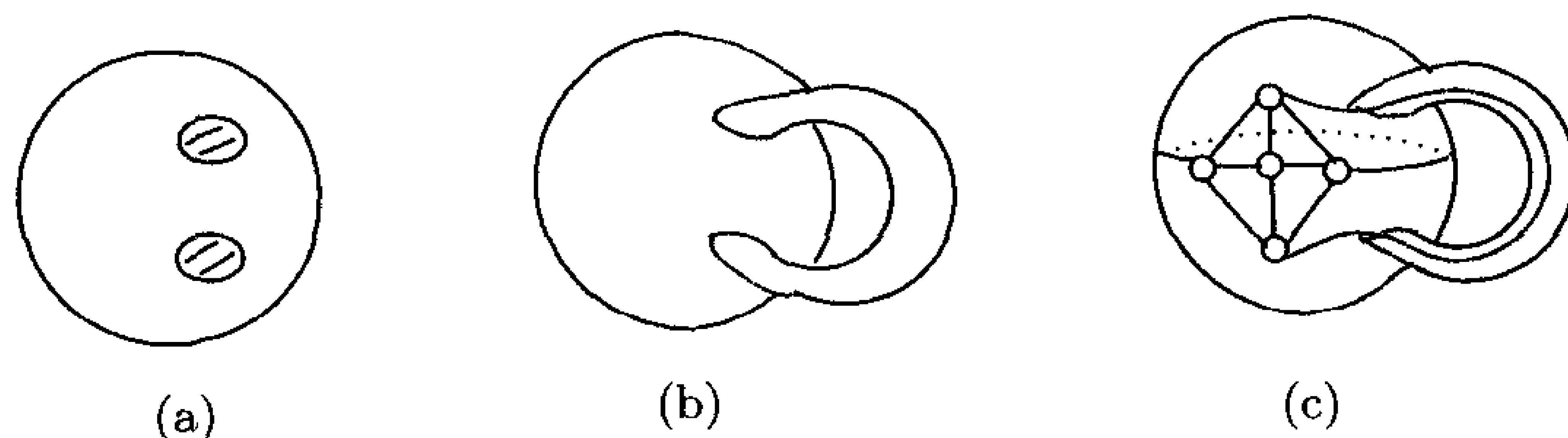



图 9.23 把 $K_5$ 嵌入到环面上

正如环面可以视为是一个带环柄的球面一样, 我们可以考虑带有很多环柄的球面. 用 $S_k$ 记一个带 $k$ 个环柄的球面, 曲面 $S_k$ 也称为是一个**亏格为 $k$ 的曲面 (surface of genus $k$)**. 因此,$S_1$ 是环面, 而 $S_0$ 就是球面本身.

现在我们来作一些重要的观察. 设 $G$ 是一个 (任意) 图, 并将其画到球面上. 显然, 如果 $G$ 是一个平面图, 那么可以将 $G$ 画到球面上而使其任意两条边不交叉; 而如果 $G$ 是一个非平面图, 则我们就做不到这一点. 另一方面, 如果 $G$ 是非平面的, 并且可以将 $G$ 画到球面上而使其仅有两条边发生一次交叉 (相交于任意地方). 无论何时, 只要有这样的两条边存在, 我们就可以在适当位置粘贴一个环柄, 并且将其中的一条边穿过环柄, 而使得这两条边在我们刚刚构造的曲面上不发生交叉. 由上面的观察我们发现, 每个图都可以**嵌入**到某个曲面上. 使得一个图 $G$ 可以嵌入到 $S_k$ 的最小的非负正整数 $k$ 称为是 $G$ 的**亏格 (genus)**, 记为 $\gamma(G)$. 因此,$\gamma(G) = 0$ 当且仅当 $G$ 是平面的; 而 $\gamma(G) = 1$ 当且仅当 $G$ 是非平面的且 $G$ 能够嵌入到环面上. 特别地, $\gamma(K_5) = 1$, $\gamma(K_{3,3}) = 1$.

在本章, 我们仅对连通图进行讨论. 和连通图一样, 不连通图要么是平面的, 要么是非平面的. 事实上很显然, 一个不连通图 $G$ 是平面的当且仅当 $G$ 的每个连通分支是平面的. 鉴于这个原因, 讨论图的平面性, 仅仅对连通图讨论就足够了. 此外, 我们将要看到, 在讨论图的平面性时, 仅仅讨论连通图情形还有其他的原因. 考虑图 9.24 所示的不连通的平面图 $G \cong 2K_3$. 显然,$G$ 的阶为 $n = 6$, 边数为 $m = 6$, 区域数 $r = 3$, 它的三个区域分别记为 $R_1$, $R_2$, $R_3$. 因此,$n - m + r = 6 - 6 + 3 = 3$, 所以 Euler 恒等式不成立. 然而这并不奇怪, 因为在定理 9.1 中, 我们要求平面图 $G$ 是连通的.

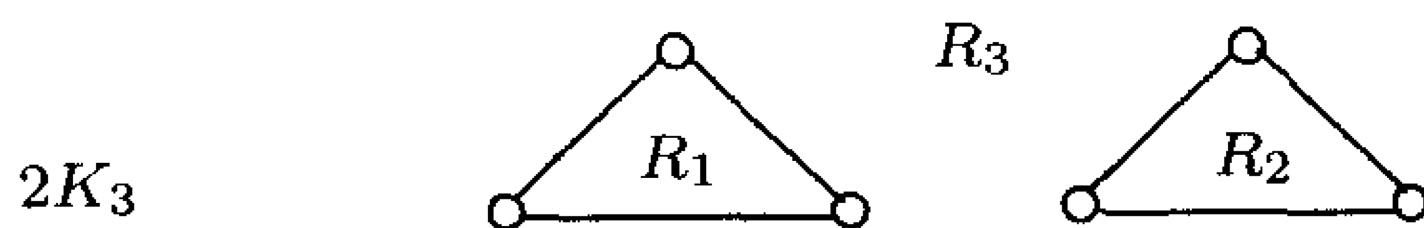



图 9.24 一个不连通的平面图

让我们重新回到图 9.19(b) 和 9.19(c), 观察 $K_4$ 嵌入到环面上的两种方式. 这两种嵌入方式又分别在图 9.25(a) 和 9.25(b) 中重新画出, 此时图所嵌入到的每个环面都是用一个对边两两重叠的矩形来表示. 我们还给出 $K_4$ 嵌入到环面上的第三种方式, 见图 9.25(c). 正如平面图嵌入到平面 (或球面) 而形成平面 (或球面) 的一些区域, 图嵌入到环面 (或其他曲面) 也同样形成环面 (或其他曲面) 的一些区域. 由于曲面比较复杂, 所以确定曲面上的区域可能会比较困难. 下面的事实可能对我们有所帮助: 假定一个图 $G$ 嵌入到某个曲面上, 点 $A$ 位于区域 $R$ 中, 点 $A'$ 位于区域 $R'$ 中. 如果 $A$ 和 $A'$ 可以通过曲面上的一条曲线连接, 且这条曲线不与 $G$ 的顶点或边相交, 则 $R$ 和 $R'$ 是同一个区域. 如果不存在连接 $A$ 和 $A'$ 的上述曲线, 则 $R$ 和 $R'$

是不同的区域. 因此, 在图 9.25(a) 和 9.25(b) 中, $K_4$ 在环面上的两种嵌入都分别形成四个区域 (记为 $R_1, R_2, R_3, R_4$); 而在图 9.25(c) 中, $K_4$ 在环面上的嵌入只形成两个区域 (记为 $R_1, R_2$). 所以, 在图 9.25(a) 和 9.25(b) 的嵌入中, 区域数为 $r = 4$, 而在图 9.25(c) 的嵌入中, 区域数为 $r = 2$, 也就是说, 即使 $K_4$ 是连通的, 当嵌入到环面上时, 也不总是得到 $n - m + r$ 的同一个值. 尽管这看起来令人失望, 但即将会发现, 图 9.25(c) 中 $K_4$ 在环面上的嵌入有一个性质, 该性质是图 9.25 中 $K_4$ 在环面上的其他两种嵌入所没有的, 这一点很关键.

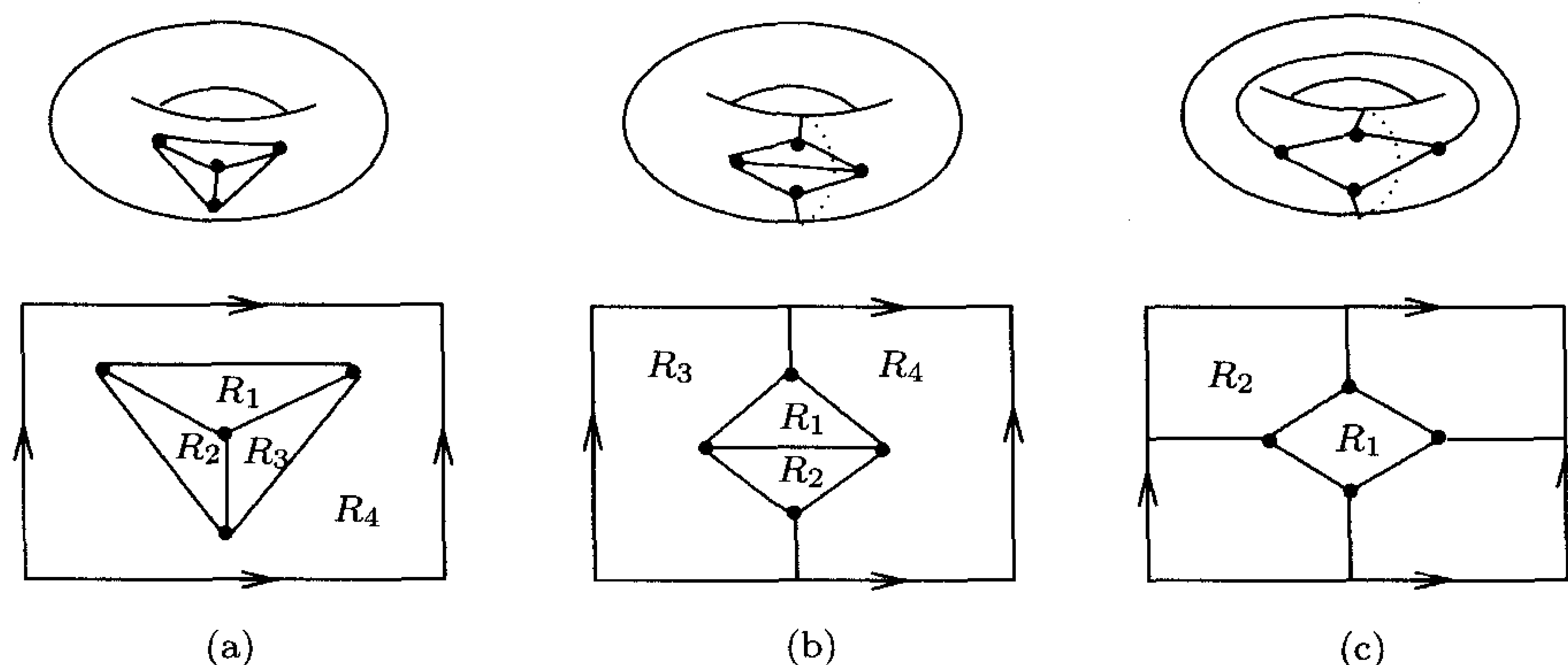



图 9.25 把 $K_4$ 嵌入到环面上

设图 $G$ 嵌入到某个曲面 $S_k$ 上, 其中 $k \geqslant 0$, 则形成曲面 $S_k$ 的若干区域. 一个区域称为是**2 单元 (2-cell)**, 若该区域内的任一条闭曲线都可以在此区域内连续地收缩为一点. 一个嵌入称为是**2 单元嵌入 (2-cell embedding)**, 如果它的每个区域都是一个 2 单元. 让我们回到图 9.24 中, 再来考察图 $G \cong 2K_3$ 嵌入到平面 (或球面) 上的情形. 在该嵌入中, 边界是三角形的两个区域是 2 单元, 而剩下的那个区域就不是 2 单元了. 图 9.26 所示的是其嵌入到球面上的情形. 尽管在外区域内的闭曲线 $C$ 可以在该区域内连续地收缩为一点, 但是闭曲线 $C'$ 却不具备这个性质.

一般地, 每个不连通图到平面上的任何一个嵌入都不是 2 单元嵌入, 而每个连通图到平面上的任何一个嵌入都是 2 单元嵌入. 但是, 如果一个连通图 $G$ 嵌入到一个正亏格的曲面上, 那么这个嵌入可能是, 也可能不是 2 单元嵌入. 让我们再回顾一下图 9.25(a) 和 9.25(b) 中 $K_4$ 在环面上的两种嵌入; 这两个嵌入都不是 2 单元嵌入. 事实上, 在图 9.27(a) 和 9.27(b) 中, 曲线 $C$ 和 $C'$ 都不能在它们位于的区域内连续地收缩为一点.

然而, 图 9.25(c) 中给出的 $K_4$ 到环面上的嵌入是一个 2 单元嵌入. 在这个嵌入中只有两个区域, 所以有 $n - m - r = 4 - 6 + 2 = 0$. 我们将看到, 当一个阶为 $n$ 边

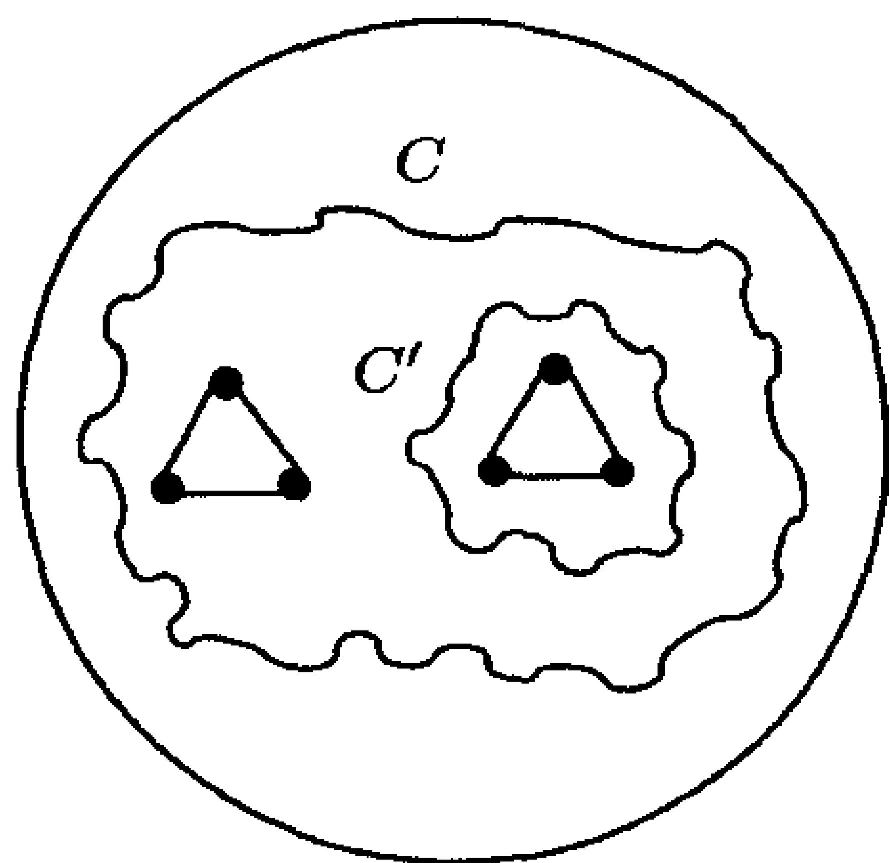



图 9.26 $2K_3$ 到球面上的一个嵌入, 它不是 2 单元嵌入

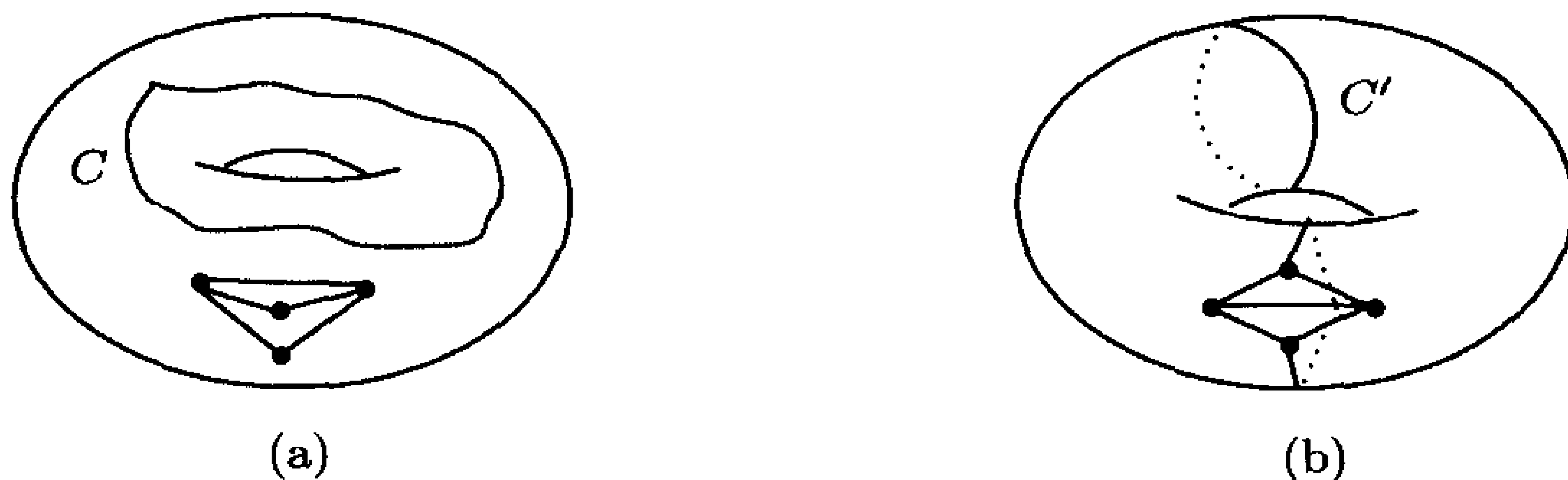



图 9.27 $K_4$ 到环面上的一个嵌入, 它不是 2 单元嵌入

数为 $m$ 的连通图 2 单元嵌入到一个环面上而形成 $r$ 个区域时, 有 $n-m-r=0$. 下面给出更一般的结论.

**定理 9.9** 设连通图 $G$ 以 2 单元嵌入到一个亏格为 $k$ ($\geqslant 0$) 的曲面上. 如果 $G$ 的阶为 $n$, 边数为 $m$, 且区域数为 $r$, 则

$$n-m+r=2-2k.$$

**证** [归纳证法] 我们对 $k$ 进行归纳. 设图 $G$ 是一个阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的连通图, 并以 2 单元嵌入到一个亏格为 0 的曲面上, 则 $G$ 是平图. 设 $G$ 有 $r$ 个区域, 每个区域必然是一个 2 单元. 因此根据 Euler 恒等式, $n-m+r=2=2-2\cdot 0$, 所以定理对 $k=0$ 的情形是成立的.

假设, 对每个阶为 $n'$ 且边数为 $m'$ 的连通图 $G'$, 且 $G'$ 以 2 单元嵌入到一个 $S_k$ ($k\geqslant 0$) 曲面上而产生 $r'$ 个区域, 都满足等式 $n'-m'+r'=2-2k$. 现在设 $G$ 为一个阶为 $n$ 边数为 $m$ 的连通图, 它以 2 单元嵌入到一个 $S_{k+1}$ 曲面上而产生 $r$ 个区域.

设 $H$ 为 $S_{k+1}$ 的 $k+1$ 个环柄之一, 并假设 $H$ 上没有 $G$ 的顶点. 但是, 因为 $G$ 在 $S_{k+1}$ 上的嵌入是一个 2 单元嵌入, 所以 $H$ 上有 $G$ 的边. 画一条围绕 $H$ 的闭曲线 $C$, 则 $C$ 一定与 $G$ 的某些边相交 (见图 9.28). 假设 $C$ 与 $H$ 上的边有 $t\geqslant 1$ 个交点. 把这些交点当作新的顶点, 从而这 $t$ 条边中的每一条边都被分成两条边. 进一步, $C$

的位于两个 (新增) 顶点之间的曲线段成为一条边. 我们在 $C$ 上增加两个顶点, 由此而增加了两条额外的边. (这样做是为了保证所得到的新图不含平行边或环.) 记所得到的新图为 $G_1$, 设它的阶为 $n_1$, 边数为 $m_1$, 区域数为 $r_1$, 则 $n_1 = n + t + 2$, $m_1 = m + 2t + 2$. 因为作为 $G_1$ 边的曲线 $C$ 的每个部分都属于 $G$ 的一个区域, 从而这种边的添加使得原先的区域一分为二, 且每个新区域都是一个 2 单元. 因为有 $t$ 条这样的边, 所以 $r_1 = r + t$.

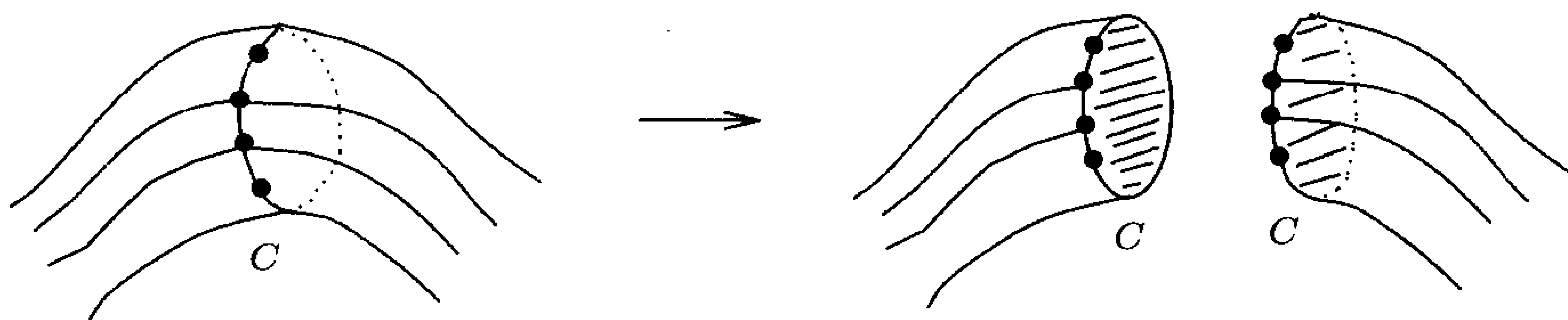



图 9.28 定理 9.9 证明中的一步

接下来, 我们沿着 $C$ 割去环柄 $H$, 并把产生的两个洞给补平, 从而把沿着 $C$ 的顶点和边拷贝了两份. 记所得的图为 $G_2$, 现在 $G_2$ 是 $S_k$ 上的一个 2 单元嵌入. 设 $G_2$ 的阶为 $n_2$, 边数为 $m_2$, 区域数为 $r_2$. 显然, 每个区域都是 2 单元的. 则 $n_2 = n_1+t+2$, $m_2 = m_1 + t + 2$, 和 $r_2 = r_1 + 2$. 因此,

$$n_2 = n + 2t + 4,\ m_2 = m + 3t + 4,\ r_2 = r + t + 2.$$

根据归纳的条件,$n_2 - m_2 + r_2 = 2 - 2k$, 所以我们有

$$(n + 2t + 4) - (m + 3t + 4) + (r + t + 2) = 2 - 2k.$$

从而, $n - m + r + 2 = 2 - 2k$, 即 $n - m + r = 2 - 2(k + 1)$. ■

由此我们发现, 如果 $G$ 是一个连通图, 且嵌入到亏格为 $\gamma(G)$ 的某个曲面上, 则该嵌入必然是一个 2 单元嵌入. 因此, 我们有下面的推论.

**推论 9.10** 如果 $G$ 是一个阶为 $n$ 边数为 $m$ 的连通图, 嵌入到亏格为 $\gamma(G)$ 的曲面上且形成 $r$ 个区域, 则

$$n - m + r = 2 - 2\gamma(G).$$

我们也有如下关于推论 9.10 的一个推论.

**推论 9.11** 如果 $G$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 边数为 $m$ 的连通图, 则

$$\gamma(G) \geqslant \frac{m}{6} - \frac{n}{2} + 1.$$

**证** [直接证法] 假设 $G$ 嵌入到一个亏格为 $\gamma(G)$ 的曲面上, 并形成 $r$ 个区域. 根据推论 9.10, 有 $n - m + r = 2 - 2\gamma(G)$. 设 $G$ 的 $r$ 个区域分别为 $R_1, R_2, \cdots, R_r$, $m_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 分别为区域 $R_i$ 边界上的边数. 因此 $m_i \geqslant 3$. 又因为每条边只位于一个或两个区域的边界上, 从而有

$$3r \leqslant \sum_{i=1}^{r} m_i \leqslant 2m,$$

故 $3r \leqslant 2m$. 所以有

$$6-6\gamma(G)=3n-3m+3r\leqslant 3n-3m+2m=3n-m \tag{9.2}$$

对 $\gamma(G)$ 解方程 (9.2), 我们有

$$\gamma(G)\geqslant \frac{m}{6}-\frac{n}{2}+1,$$

证毕. ■

在推论 9.11 中, 若图 $G$ 是平面的, 则 $\gamma(G)=0$, 由此推论可得 $0\geqslant \frac{m}{6}-\frac{n}{2}+1$, 或等价地, $m\leqslant 3n-6$; 这就是定理 9.2.

对于有 $n=5$ 个顶点和 $m=10$ 条边的完全图 $K_5$, 应用推论 9.11, 我们有 $\gamma(K_5)\geqslant 1/6$. 另一方面, 注意到 $K_5$ 是非平面的. 当然, 我们早已知道 $\gamma(K_5)=1$. 应用推论 9.11, $\gamma(K_6)\geqslant 1/2$, $\gamma(K_7)\geqslant 1$. 事实上, 可以证明 $\gamma(K_6)=\gamma(K_7)=1$. 下面的公式是由 Gerhard Ringel 和 J. W. T. (Ted) Youngs 给出的. (在第 10 章, 我们还要对该公式作进一步介绍.)

**定理 9.12** 对于每个整数 $n\geqslant 3$,

$$\gamma(K_n)=\left\lceil\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\rceil.$$

## 习题

9.23 把图 9.29 所示的每个图嵌入到环面上. (用对边两两重叠的矩形表示环面).



图 9.29 习题 9.23 的图

9.24 确定完全图 $K_6$ 的亏格, 并给予解释.

9.25 确定完全二部图 $K_{4,4}$ 的亏格, 并给予解释.

9.26 确定 Petersen 图的亏格, 并给予解释.

9.27 证明或反驳:

(a) 存在一个平面图, 它不能嵌入到环面上.

(b) 存在一个非平面图, 它不能嵌入到环面上.

(c) 如果 $G$ 是一个阶为 $n$ 边数为 $m$ 的图, 则 $G$ 能够嵌入到一个带 $m$ 个环柄的球面上.

(d) 如果 $G$ 能嵌入到环面上, 则 $\gamma(G) = 1$.

9.28 根据定理 9.12, 有 $\gamma(K_7) = 1$.

(a) 证明：$K_7$ 在环面上嵌入的每个区域的边界都是三角形.

(b) 给定 $K_7$ 在环面上的一种嵌入, $R_1$ 和 $R_2$ 是两个不相邻的区域. 在 $R_1$ 内添加一个新顶点 $y$, 并连接 $y$ 到 $R_1$ 和 $R_2$ 的边界上的所有顶点, 所获得的图记为 $G$. 证明：$\gamma(G) = 2$.

## 9.3 延伸阅读：图的子式

我们已经知道, Kuratowski 定理 (定理 9.7) 给出了平面图的一个刻画：一个图 $G$ 是平面的当且仅当 $G$ 不含 $K_5$, $K_{3,3}$, 或 $K_5$, 或 $K_{3,3}$ 的一个细分作为子图. 下面我们将说明, 这不是平面图仅有的刻画.

对于图 $G$ 和 $G$ 的一条边 $e = uv$, 图 $G'$ 称为是由 $G$ 通过**收缩边** $e$ **(contracting the edge** $e$**)** (或**叠合顶点 (identifying the vertices)** $u$ 和 $v$) 而得到的图, 如果 $G'$ 是 (同构于) 按照如下方式所获得的图：在图 $G - v$ 中, 连接 $u$ 到 $v$ 的所有邻点, 且这些邻点与 $u$ 不邻接. 我们也称 $G'$ 是由 $G$ 通过一次**边收缩 (edge contraction)**而得到. (对称地,$G'$ 也可按如下方式获得：在图 $G - u$ 中, 连接 $v$ 到 $u$ 的所有与 $v$ 不邻接的邻点.) 在图 9.30 中, 对于图 $G$ 和 $G$ 的一条边 $e = uv$, 给出边收缩的演示. 图 $G''$ 是通过收缩 $G'$ 的边 $xy$ 而得到.

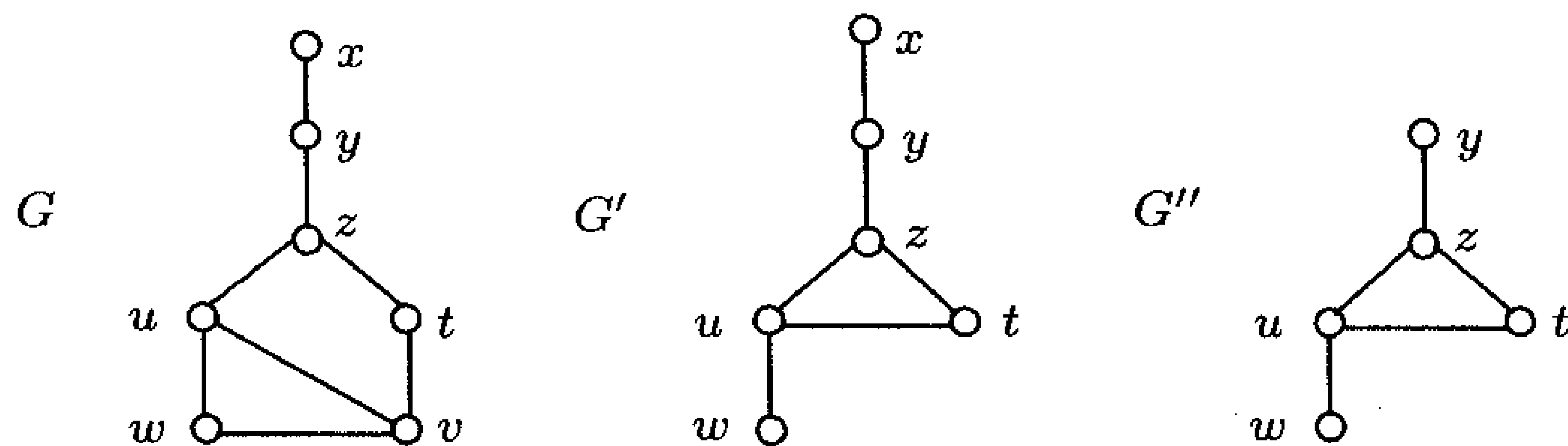



图 9.30 收缩一条边

如果我们从一个图 $G$ 出发, 收缩 $G$ 的一条边而得到图 $G'$, 接着收缩 $G'$ 的一条边而得到图 $G''$, 如此下去, 直到最终获得图 $H$, 此时我们可以更简单地对 $H$ 进行描述. 设 $\{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$ 是图 $G$ 的顶点集 $V(G)$ 的一个划分, 且对每个整数 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $\langle V_i \rangle$ 是连通的. 设 $H$ 是顶点集为 $\{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$的图, 如果在 $G$ 中, $V_i$ 的某个顶点邻接于 $V_j$ 的某个顶点 $(i \neq j)$, 则 $V_i$ 邻接于 $V_j$. 例如, 在 9.30 所示的图 $G$ 中, 如果我们设 $V_1 = \{x, y\}$, $V_2 = \{z\}$, $V_3 = \{u, v\}$, $V_4 = \{t\}$, $V_5 = \{w\}$, 则图 9.31 中的图 $H$ 同构于图 9.30 中的图 $G''$.

图 $H$ 称为是图 $G$ 的一个**子式 (minor)**, 如果图 $H$ (或者与 $H$ 同构的图) 可以由 $G$ 通过一系列的边收缩, 边删除或顶点删除 (按任何顺序) 而获得. 因此, 在图

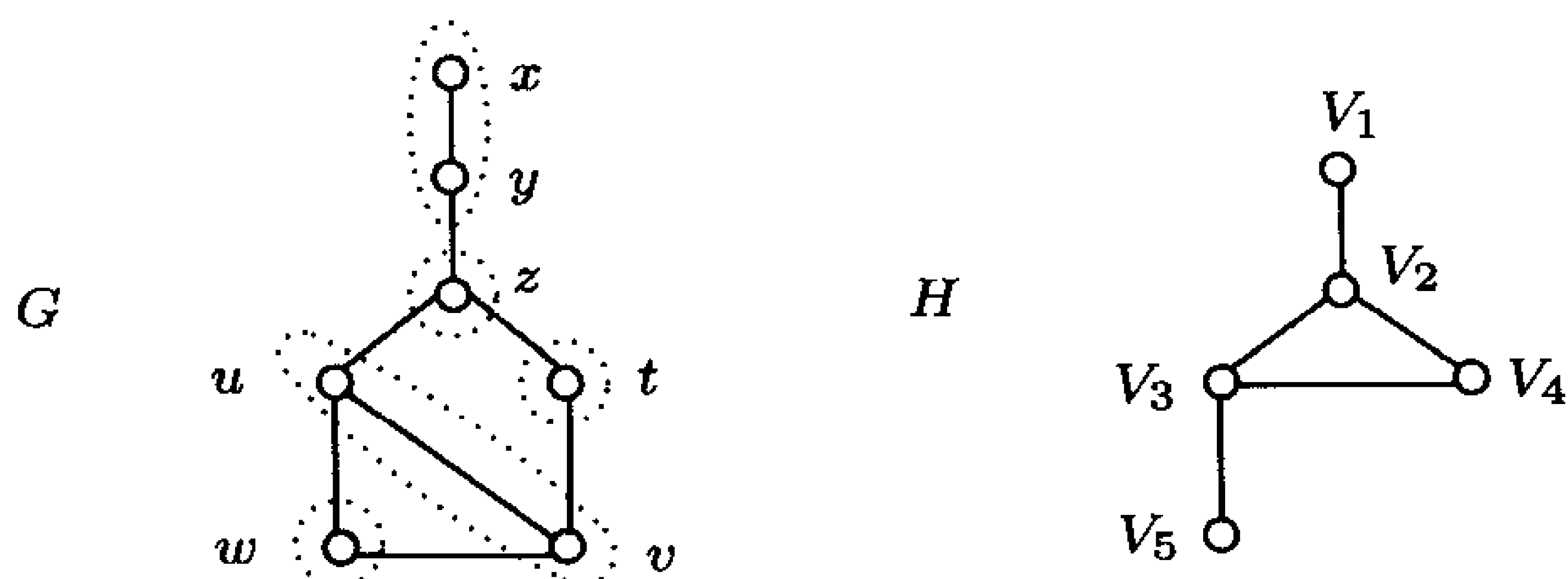



图 9.31 边收缩

9.31 中, 图 $H$ 是图 $G$ 的一个子式. 我们再看一个例子, 也就是图 9.32 中的图 $G_1$, 设 $V_1 = \{u_1\}$, $V_2 = \{u_2\}$, $V_3 = \{u_3\}$, $V_4 = \{v_1, w_1, x_1\}$, $V_5 = \{w_2, x_2\}$, $V_6 = \{v_3, w_3, x_3\}$, $V_7 = \{x_4\}$. 则图 $H_1$ 可以由 $G_1$ 通过一系列的边收缩而获得. 所以, 图 $H_1$ 就是 $G_1$ 的一个子式. 另一方面, 通过删除边 $V_1V_2$ 和顶点 $V_7$, 可以看出 $K_{3,3}$ 也是 $G_1$ 的一个子式.

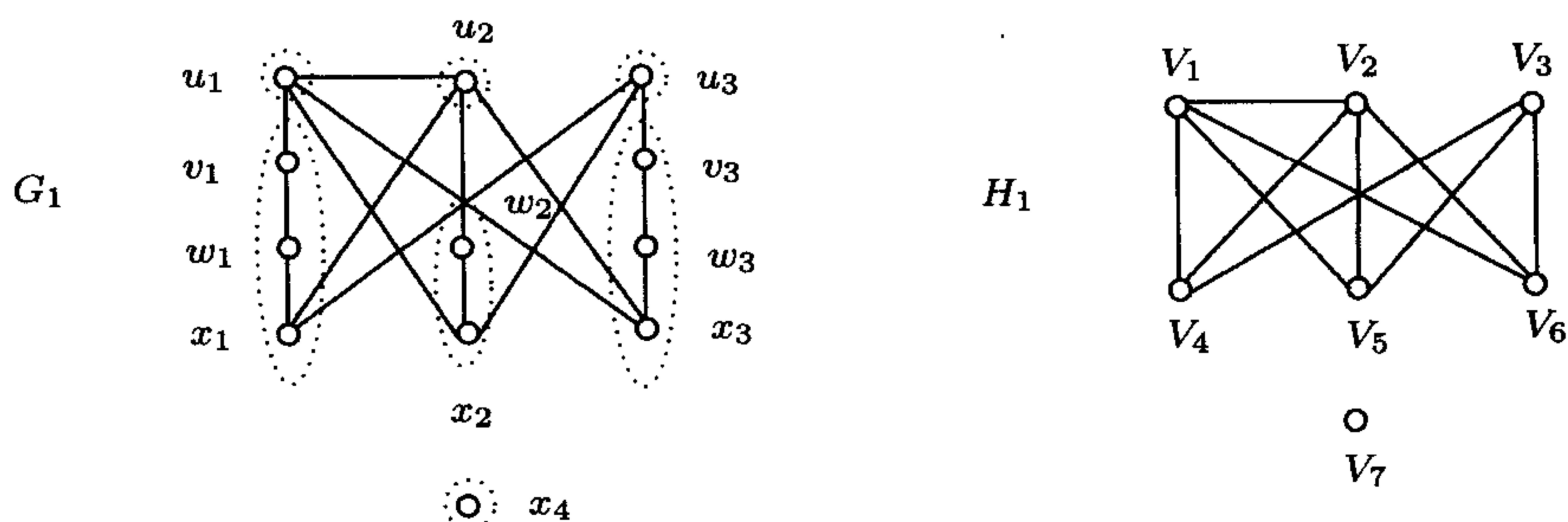



图 9.32 图的子式

图的子式有许多有趣的结论. 可能受到图 9.32 中例子的启发, 我们有下面的结论.

**定理 9.13** 如果图 $G$ 是图 $H$ 的一个细分, 则 $H$ 是 $G$ 的一个子式.

另外, 如果图 $G$ 可以嵌入到曲面 $S_k$ 上, 其中 $k \geqslant 0$, 则由 $G$ 通过任何的边收缩, 边删除, 或顶点删除而获得的图也可以嵌入到曲面 $S_k$ 上. 这就有下面的结论.

**定理 9.14** 如果图 $H$ 是一个图 $G$ 的一个子式, 则 $\gamma(H) \leqslant \gamma(G)$.

借助于上面两个结论, 我们现在就可以叙述 Klaus Wagner (1910–2000) 对平面图的刻画. 1937 年, 即 Wagner 从科隆大学获得博士学位后的第一年, Wagner 证明了下面定理.

**定理 9.15 (Wagner 定理)** 图 $G$ 是平面的当且仅当 $K_5$ 和 $K_{3,3}$ 都不是 $G$ 的子式.

在例 9.8 中, 我们证明了图 9.12 中的图 (在图 9.33 中重画为图 $G$) 是非平面的.

尽管 $G$ 从外观上让人想起 $K_5$, 但是这个图既不含 $K_5$ 也不含 $K_5$ 的细分作为子图. 事实上, 我们已经验证了 $G$ 是非平面的, 因为它含 $K_{3,3}$ 的一个细分作为子图. 另一方面, 如果我们考虑 $V(G)$ 的划分 $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$, 其中 $V_1 = \{u_1, v_1, w_1, x_1, y_1\}$, $V_2 = \{v_2\}$, $V_3 = \{u_2, y_2\}$, $V_4 = \{w_2\}$, $V_5 = \{x_2\}$, 则易知, $K_5$ 是 $G$ 的一个子式, 所以, 根据 Wagner 定理, $G$ 是非平面的.

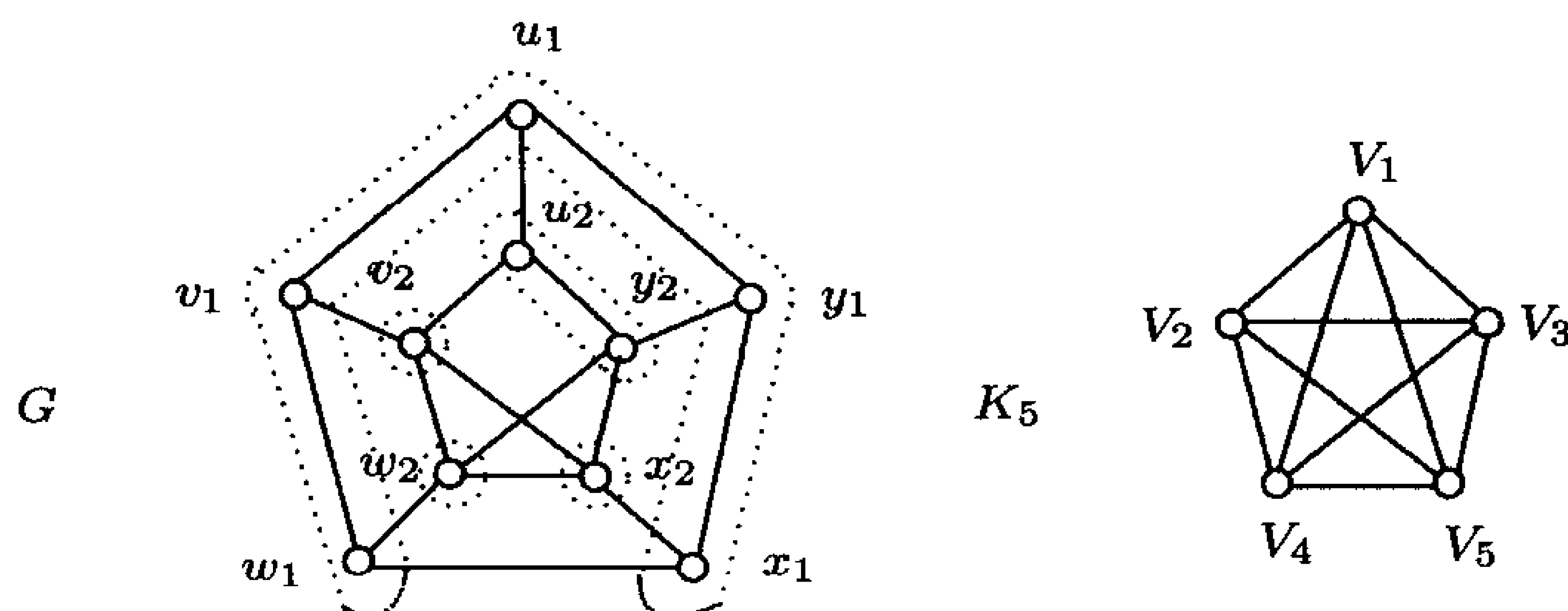



图 9.33 以 $K_5$ 作为子式的图 $G$

勿庸置疑, 涉及到子式的主要定理是由 Neil Robertson 和 Paul Seymour 于 1990 年获得的.

**定理 9.16 (图的子式定理)** 对图的任意一个无限集合 $S$, 一定存在 $S$ 中的两个不同的图, 使得其中一个是另一个的子式.

Paul Seymour 于 1975 年获得牛津大学博士学位. 他在贝尔通信实验室曾工作过若干年, 现在是普林斯顿大学的教授. Neil Robertson 于 1969 年在滑铁卢大学受 William Tutte 的指导获得博士学位. Robertson 的许多工作灵感来自于 Tutte 的后续工作. Robertson 在图子式方面的工作主要针对于图的结构特性, 这些结构特性通过排除一些给定的图作为子式而获得. 正如其他许多数学研究者的观点一样, Robertson 认为受创造力的驱使是一个人在某个领域工作的最基本的动力. Robertson 对美术品、诗歌和戏剧都很感兴趣, 他现在是俄亥俄州立大学的数学教授.

我们现在叙述由定理 9.16 推出的非常著名的结论. 考虑亏格为 $k \geqslant 0$ 的曲面 $S_k$. 显然, 如果 $G$ 是一个足够小的图 (就阶和 (或) 边数而言), $G$ 可以嵌入到 $S_k$ 上. 因此, 如果我们从不能嵌入到 $S_k$ 的一个图 $F$ 出发, 对它进行连续的边收缩, 边删除, 或者顶点删除, 最终可以获得一个依然不能嵌入到 $S_k$ 的图 $F'$, 但继续对 $F'$ 进行任意一次边收缩, 或边删除, 或顶点删除后所得的图都可以嵌入到 $S_k$ 上. 我们称这样的图 $F'$ 为**极小不可嵌入到 $S_k$ 的 (minimally nonembeddable on $S_k$)**图. 因此,$F'$ 的每个 (不同与 $F'$ 的) 子式都可以嵌入到 $S_k$ 上. 特别地,$K_5$ 和 $K_{3,3}$ 是极小不可嵌入到 $S_0$ 的 (或简单地,**极小非平面的 (minimally nonplanar)**) 图. 事实上, 它们是仅有的极小非平面图. 根据如上讨论, 我们就有了图子式定理的如下著名推

论, 以及由 Neil Robertson 和 Paul Seymour 发现的另一个结论.

**定理 9.17** 对每个整数 $k \geqslant 0$, 极小不可嵌入到 $S_k$ 的图集合是一个有限集.

**证** [反证法] 当 $k=0$ 时, 根据 Wagner 定理, 结论是正确的. 假如定理不成立, 则存在一个正整数 $k$, 使得极小不可嵌入到 $S_k$ 的图集合是一个无限集. 根据图子式定理, $S$ 含有两个不同构的图 $G$ 和 $H$, 使得 $H$ 是 $G$ 的一个子式. 然而, 因为 $G$ 是极小不可嵌入到 $S_k$ 的, 所以 $H$ 能嵌入到 $S_k$, 导致矛盾. ■

由定理 9.17, 立即得到下面的推论.

**推论 9.18** 对每个非负整数 $k$, 存在一个图的有限集 $S$, 使得图 $G$ 可以嵌入到 $S_k$ 当且仅当对每个 $S$ 中的每个图 $H$, $H$ 都不是 $G$ 的子式.

尽管极小不可嵌入到环面的图的个数是有限的, 但就目前所知, 这个数值已超过了 800.

### 习题

9.29 对于图 9.34 中的图 $G$ 和 $G'$, 证明: $G'$ 是 $G$ 的一个子式.

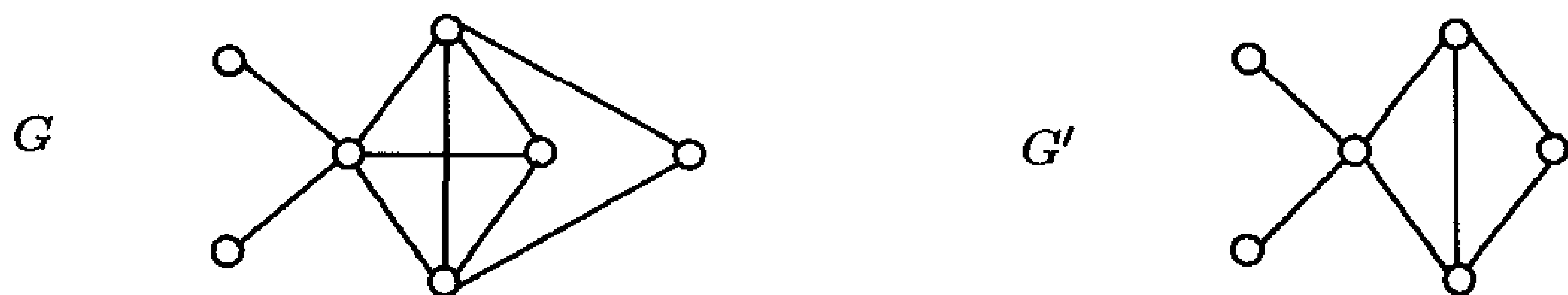



图 9.34 习题 9.29 的图

9.30 证明: 图 $K_5$ 是 Petersen 图的一个子式, 从而说明 Petersen 图是非平面的.

9.31 证明: 每个非平面图均含 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 作为一个子式.

9.32 哪些图是

(a) 由 $K_5$ 经过一次边收缩而得?

(b) 由 $K_{3,3}$ 经过一次边收缩而得?

(c) 由 $K_{3,3}$ 经过两次边收缩而得?

9.33 证明: 定理 9.13 的逆是不正确的.

## 9.4 专题探索: 图嵌入到图

在定理 2.7 中, 我们发现: 对每个图 $G$ 和每个整数 $r \geqslant \Delta(G)$, 存在一个 $r$ 正则图 $H$, 使得 $G$ 是 $H$ 的一个诱导子图. 此时, 我们称 $G$ 作为一个诱导子图**嵌入 (embed)**到 $H$. 这个结论出现在 Dénes König 1936 年的书里. 我们回顾一下当 $r=\Delta(G)$ 时这个定理的证明过程.

如果 $G$ 是 $r$ 正则的, 则 $H = G$ 即为所求. 否则, 设 $G'$ 是 $G$ 的一个拷贝, 并且分别连接 $G$ 和 $G'$ 的那些度小于 $r$ 的对应顶点, 从而产生图 $G_1$. 如果 $G_1$ 是 $r$ 正则的, 则 $H = G_1$ 即为所求. 如果 $G_1$ 不是 $r$ 正则的, 那么我们继续上面的操作直到获得一个 $r$ 正则图 $G_k$, 其中 $k = \Delta(G) - \delta(G)$. 图 9.35 针对于图 $G$ 给出了上述讨论的演示, 其中 $\Delta(G) = 3$, $\delta(G) = 1$.

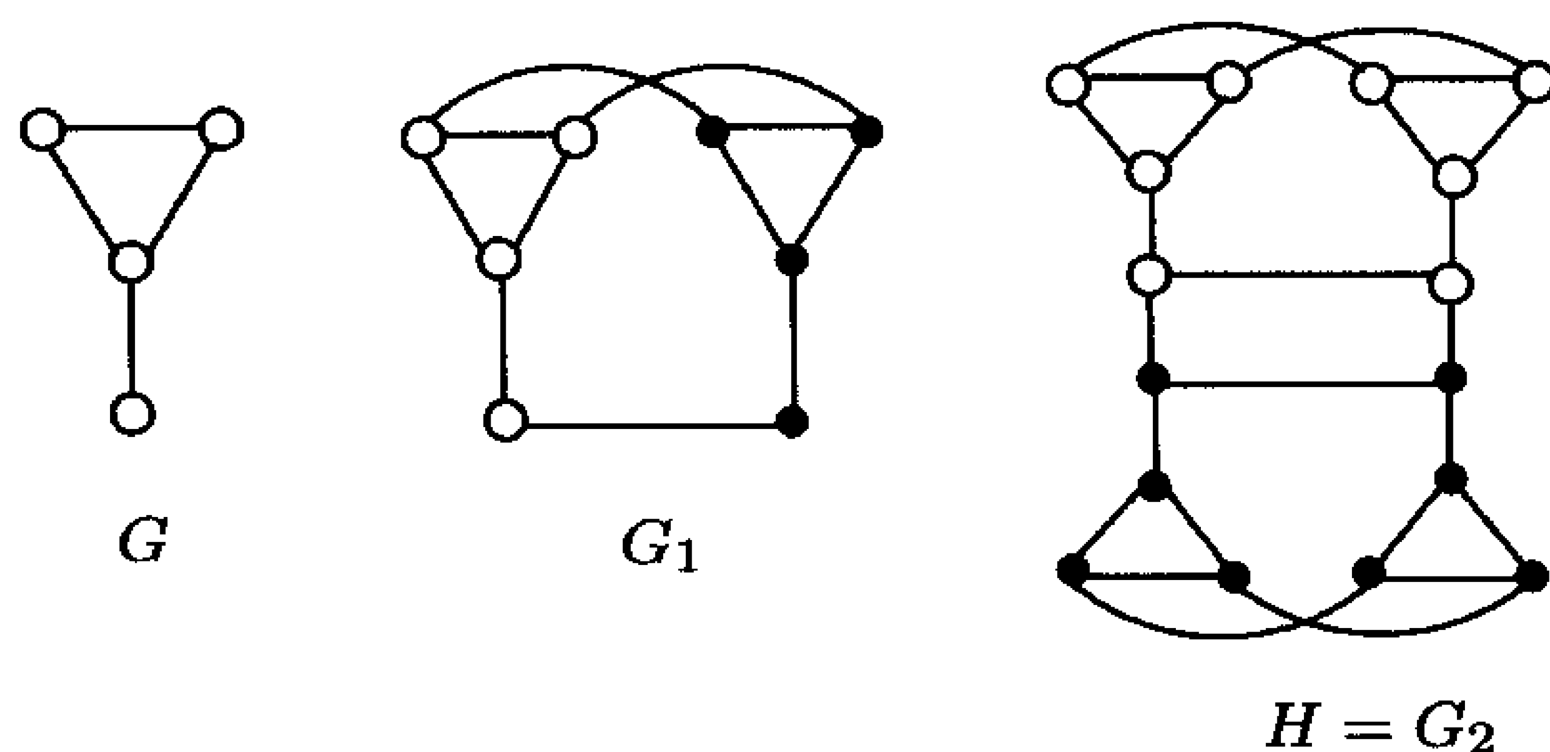



图 9.35 含 $G$ 作为诱导子图的图 $H$

这种构造方法是由 König 首次提出的, 目的是把一个极大度为 $r$ 的图 $G$ 作为一个诱导子图嵌入到一个 $r$ 正则图 $H$, 一般而言这种方式产生的图不具有最小的阶. 比如, 图 9.35 的 $H$ 的阶是 16, 而含 $G$ 作为诱导子图的 3 正则图的最小阶是 6.

对于一个给定的图 $G$, 1963 年 Paul Erdös 和 Paul J. Kelly 发现了确定 $G$ 作为诱导子图嵌入到 $r$ 正则图 $H$ ($r = \Delta(G)$) 的最小阶的方法. 为了阐述他们的定理, 我们先介绍一些相关定义.

设 $G$ 为最大度为 $r$ 的图, 其顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 记 $d_i$ 为顶点 $v_i$ 的度, 记 $e_i = r - d_i$ 为 $v_i$ 的**亏损** (**deficiency**). 此外, 记 $e = \max\{e_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 为**最大亏损** (**maximum deficiency**), $s = \sum_{i=1}^{n} e_i$ 为**总体亏损** (**total deficiency**). 下面阐述 Erdös 和 Kelly 的定理.

**定理 9.19** 设 $G$ 为 $n$ 阶图, $r = \Delta(G)$. 设 $k$ 为满足下列条件的最小整数: (1) $kr \geqslant s$, (2) $k^2 - (r+1)k + s \geqslant 0$, (3) $k \geqslant e$, (4) $(k+n)r$ 是偶数. 则以 $G$ 为诱导子图嵌入到 $r$ 正则图 $H$ 的最小阶为 $k + n$.

图 9.36 所示的是四个非正则图 $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, 以及以 $G_i$ 作为诱导子图嵌入到具有最小阶的 $\Delta(G_i)$ 正则图 $H_i$. 前三对图 $G_i, H_i$ 都是以例子的形式出现在 Erdös 和 Kelly 的文章中的.

对于图 9.36 中的 $H_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 的每个顶点 $v$, 均存在 $H_i$ 的一个含 $v$ 且同构于 $G_i$ 的诱导子图. 当然, 如果 $v$ 是 $G_i$ 的顶点, 那么结论是显然的. 上述结论对添加到 $G_i$ (以形成 $H_i$) 的每个顶点也是成立的. 对包含一个给定图 $G$ 作为诱导子图且具有最小阶的 $\Delta(G_i)$ 正则图 $H$ 的每个顶点 $v$, 通常都会存在 $H$ 的一个含 $v$ 且同构于 $G$ 的诱导子图. 然而, 该结论并不总是成立.

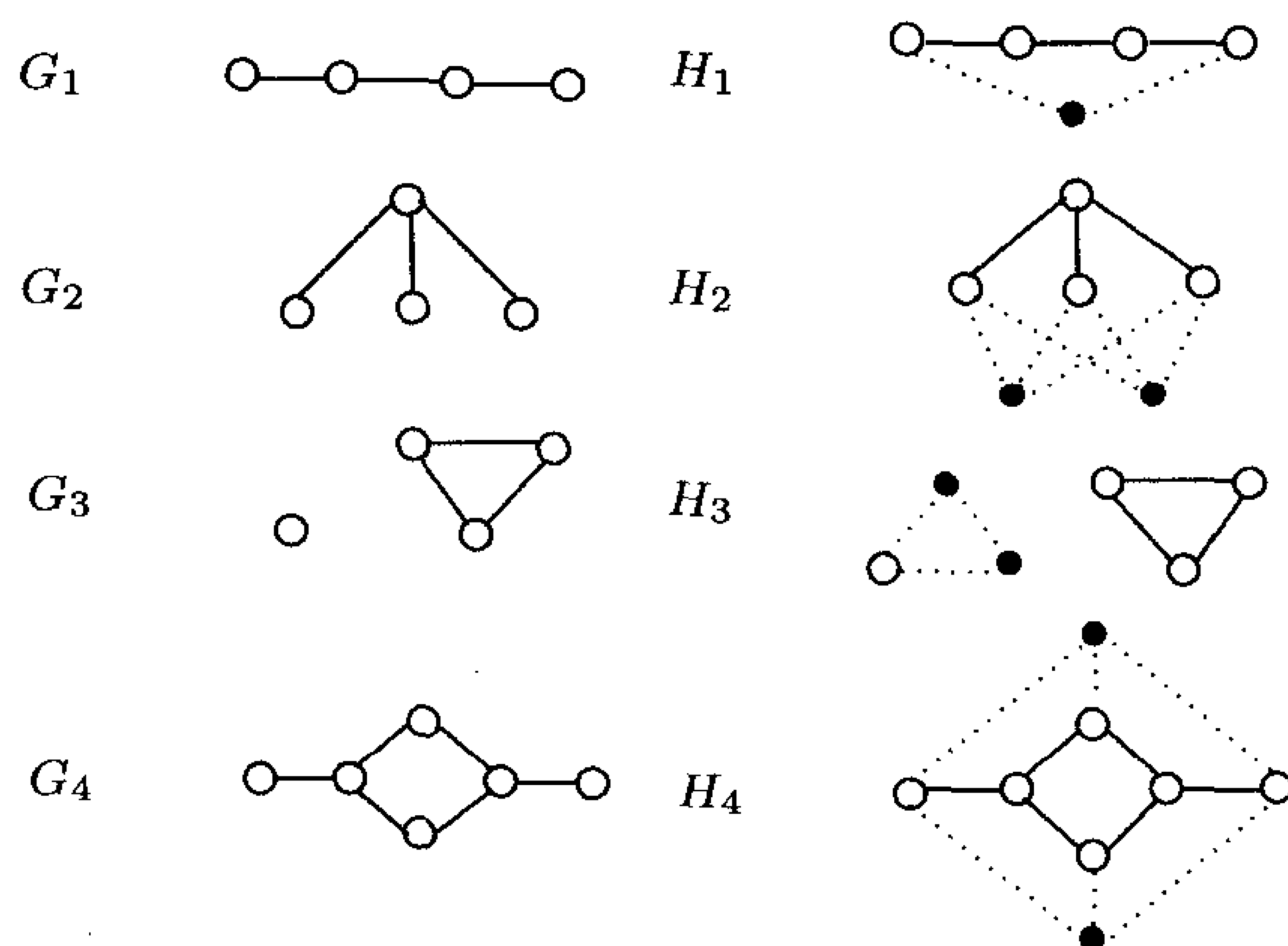



图 9.36　含 $G_i$ 为诱导子图且具有最小阶的 $\Delta(G_i)$ 正则图 $H_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$

图 9.37 所示的是从完全二部图 $K_{3,3}$ 细分它的两条边所得到的一个 10 阶图. 图 9.37 还给出了含 $G$ 为诱导子图且具有最小阶为 12 的 3 正则图 $H$. 但是, $H$ 中没有含顶点 $u$ 且同构于 $G$ 的诱导子图.

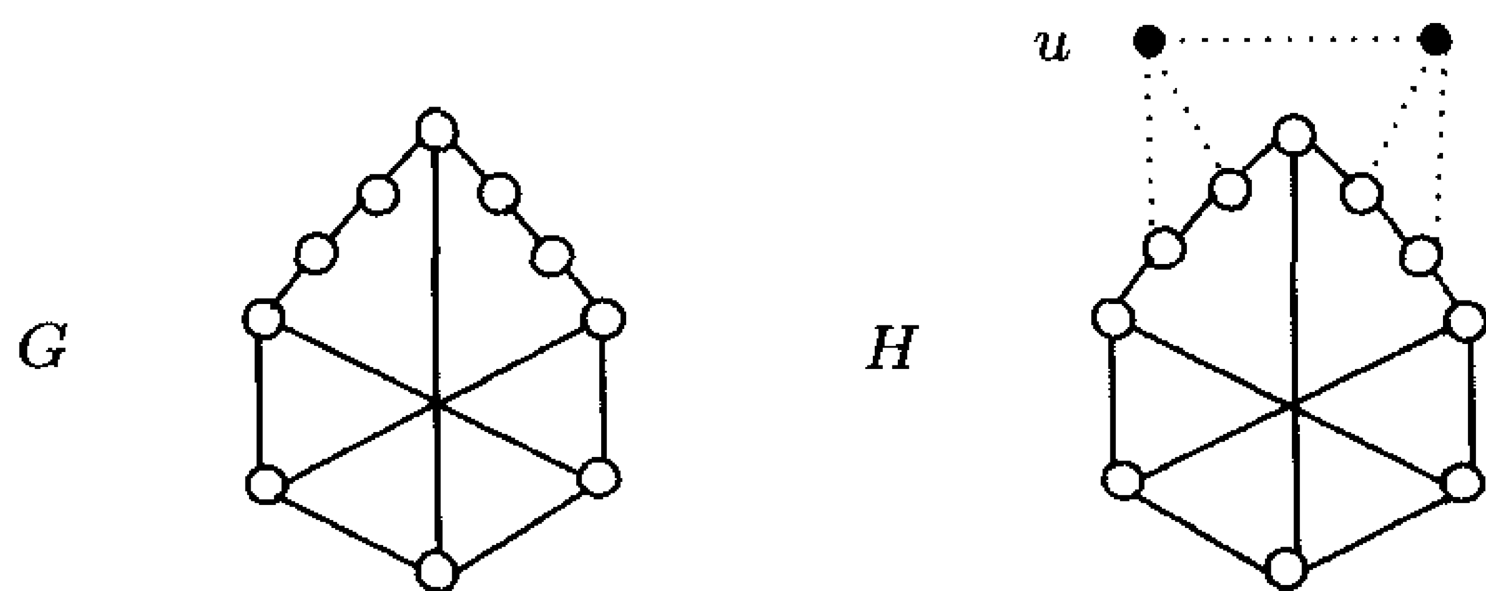



图 9.37　$H$ 没有含顶点 $u$ 且同构于 $G$ 的诱导子图

根据上面的观察, 我们有下面的概念. 图 $G$ 称为是**一致嵌入 (uniformly embed)**到图 $H$, 如果对于 $H$ 的每个顶点 $v$, 均存在 $H$ 的一个含 $v$ 且同构于 $G$ 的诱导子图. 因此, 图 9.36 的每个图 $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 都一致嵌入到图 $H_i$.

对于一个最大度为 $r$ 的图 $G$, 用 König 方法构造出来的 $r$ 正则图 $H$ 具有这样的性质: $G$ 一致嵌入到图 $H$. 而图 9.37 的图 $G$ 并非一致嵌入到图 $H$.

嵌入还可以附加更多的限制条件. 图 $G$ 称为**齐次嵌入 (homogeneously embed)**到图 $H$, 如果对于 $G$ 的每个顶点 $x$ 以及 $H$ 的每个顶点 $y$, 存在以 $G$ 作为诱导子图到 $H$ 的一个嵌入, 使得 $x$ 对应于 $y$ (在嵌入映射下); 或等价地, 图 $G$ **齐次嵌入**到图 $H$, 如果对于 $G$ 的每个顶点 $x$ 和 $H$ 的每个顶点 $y$, 存在一个 $H$ 的诱导子图 $H'$ 以及 $G$ 到 $H'$ 的一个同构 $\phi$, 使得 $\phi(x) = y$.

图 $F$ 称为图 $G$ 的一个**框架 (frame)**, 如果 $G$ 可以齐次嵌入到 $F$ 且 $F$ 具有最小阶; $F$ 的阶称为 $G$ 的**框架数 (framing number)**, 记为 $\mathrm{fr}(G)$. 因此, 如果 $G$ 是一

个阶为 $n$ 的图, 则 $\mathrm{fr}(G) \geqslant n$.

可知, 路 $P_3$ 的框架数是 4, 因为 $P_3$ 可以齐次嵌入到圈 $C_4$ (见图 9.38), 且 $P_3$ 不能齐次嵌入到任何一个阶为 3 的图. 圈 $C_4$ 的框架数也是 4, 因为 $C_4$ 可以齐次嵌入到它自身.

图 $G \cong K_1 \cup K_2$ 可以齐次嵌入到圈 $C_5$ (见图 9.39); 但 $\mathrm{fr}(G) = 4$, 因为 $G$ 也可以齐次嵌入到阶为 4 的图 $2K_2$ 上, 却不能齐次嵌入到任何一个阶为 3 的图.

如果图 $G$ 可以齐次嵌入到图 $H$ 上, 则 $\delta(H) \geqslant \Delta(G)$. 作为另一个例子, 我们考察图 9.40 中的图 $G$.

**例 9.20** 图 9.40 的图 $G$ 的框架数为 6.

**解** 因为 $\Delta(G) = 3$, 所以, 如果 $H$ 是 $G$ 可以齐次嵌入到其上的图, 则 $\delta(H) \geqslant 3$. 显然,$\mathrm{fr}(G) \geqslant 5$. 如果 $\mathrm{fr}(G) = 5$, 则 $G$ 的一个框架 $H$ 可以通过在 $G$ 中添加一个至少与 $u$ 和 $v$ 连接的新顶点 $y_1$ 而获得. 然而,$\deg_H y_1 \geqslant 3$; 所以 $y_1$ 必须至少与 $x$ 和 $w$ 中的一个顶点邻接, 譬如说,$y_1$ 与 $x$ 邻接. 设 $H_1$ 是满足上面条件的图 (见图 9.40). 不难发现,$H_1$ 不含这样一个与 $G$ 同构的诱导子图, 使得 $u$ 在该同构下映射到 $x_1$, 所以 $G$ 不能够齐次嵌入到 $H_1$. 因此, $\mathrm{fr}(G) \geqslant 6$. 另一方面,$G$ 能够齐次嵌入到图 9.40 所示的阶为 6 的图 $H_2 \cong K_{2,2,2}$, 所以 $\mathrm{fr}(G) = 6$. ◇

至此, 你可能会提出一个重要的问题：对于一个给定图 $G$, 如何知道 $G$ 的框架数确实存在呢? 下面定理作出了回答.

**定理 9.21** 对于每个图 $G$, 存在一个图, 使得 $G$ 能齐次嵌入到该图上.

事实上, 这个定理可以被加强为：

**定理 9.22** 对于每个图 $G$, 存在一个正则图, 使得 $G$ 能齐次嵌入到该图上.

## 习题

9.34 对于图 9.41 中的图 $G$.

(a) 证明：$G$ 可以齐次嵌入到 3 立方图 $Q_3$ 上.

(b) 确定 $G$ 的框架数.

9.35 确定 $2K_1 \cup K_2$ 的框架数.

9.36 (a) 确定图 $K_{1,3}$ 的一个框架.

(b) 是否存在一个平面图 $H$, 使得 $K_{1,3}$ 可以齐次嵌入到 $H$?

9.37 确定 $K_{1,t}$ 的框架数, 其中 $t \geqslant 4$.

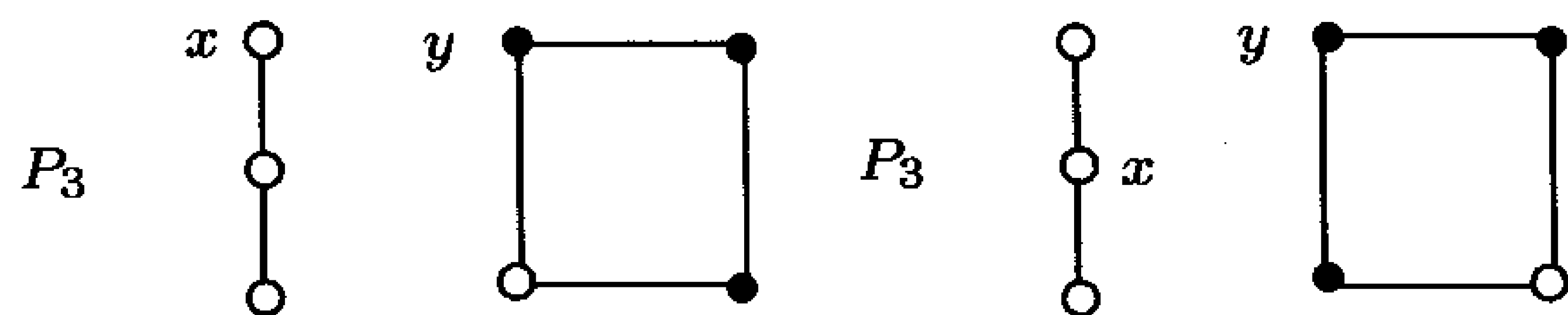



图 9.38 $P_3$ 齐次嵌入到 $C_4$

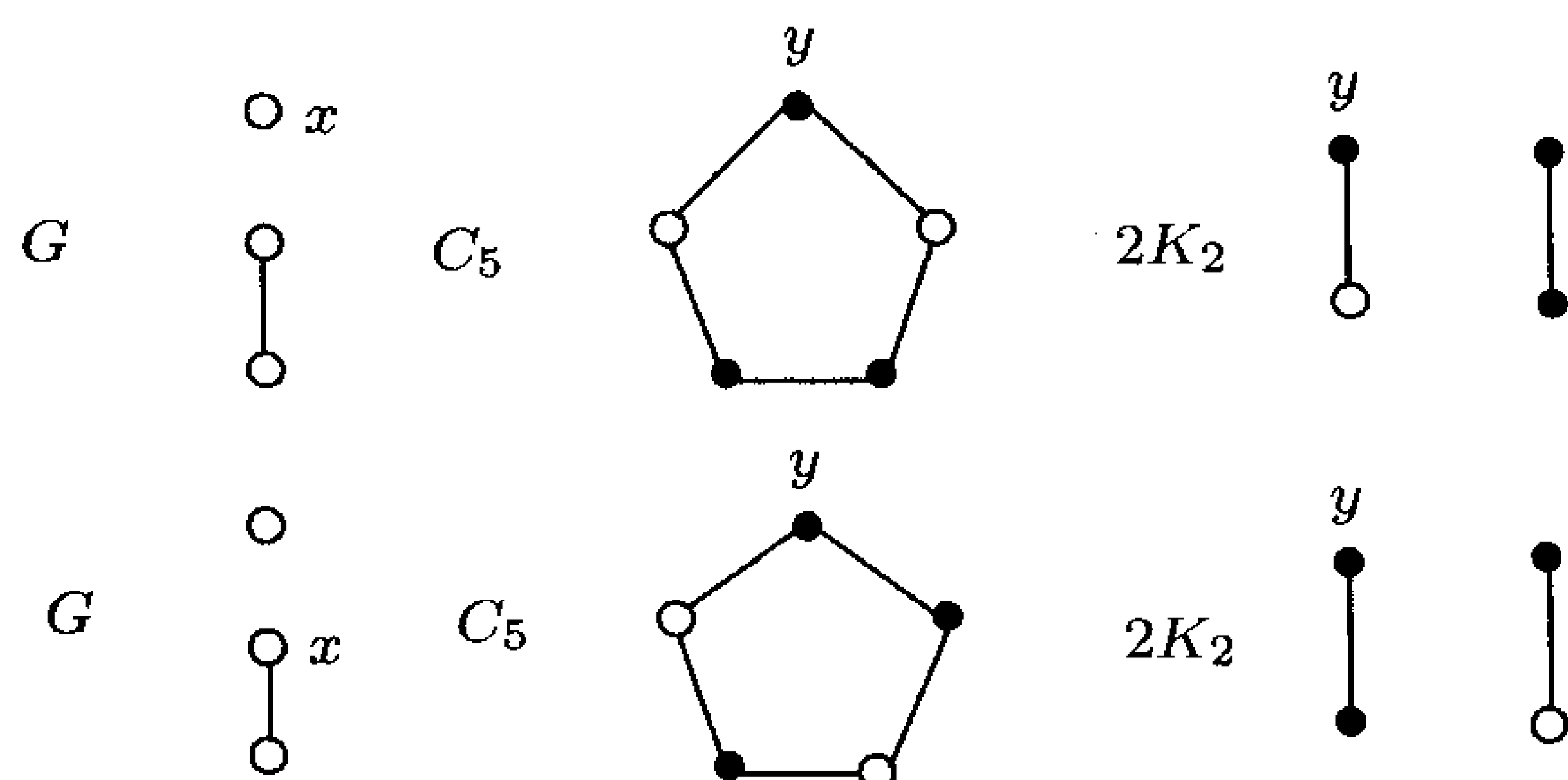



图 9.39　$K_1 \cup K_2$ 齐次嵌入到 $C_5$ 和 $2K_2$

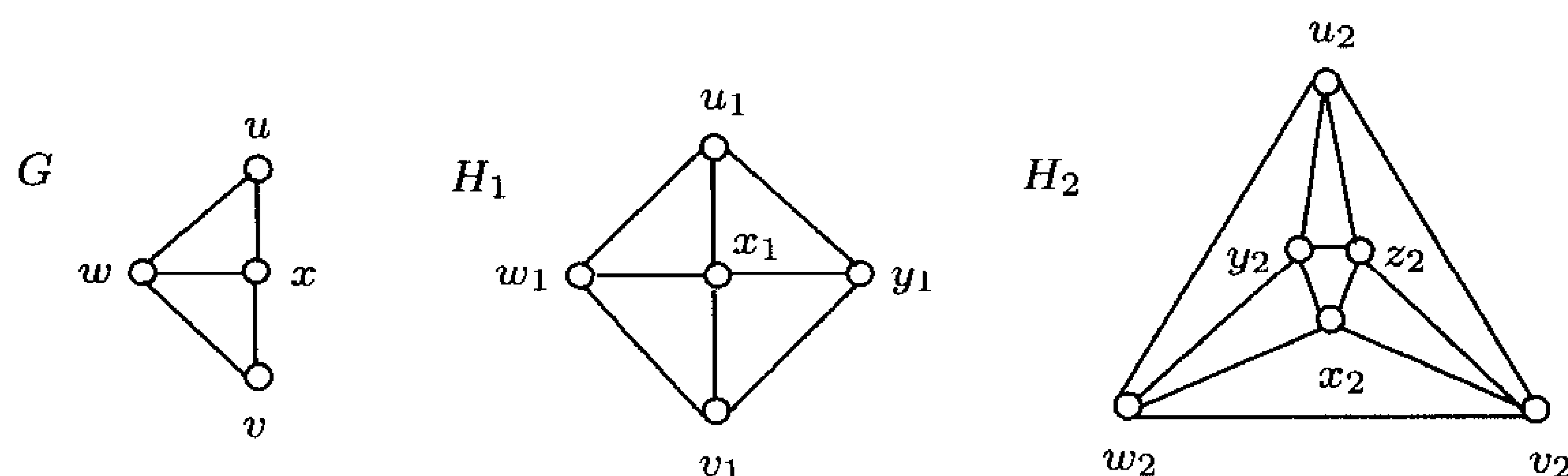



图 9.40　齐次嵌入一个图

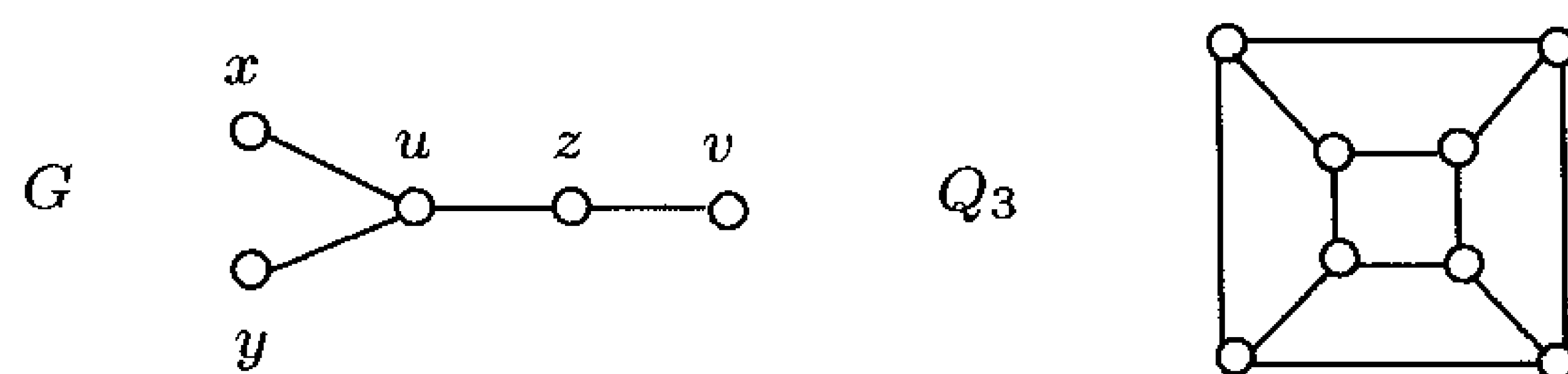



图 9.41　习题 9.34 的图

9.38　证明：如果一个 $n$ 阶图 $G$ 的框架数为 $\mathrm{fr}(G) = n$, 则 $G$ 有唯一的框架.

9.39　利用定理 9.21, 证明定理 9.22.

9.40　设 $G \cong \overline{K}_4$. 列举一个具有最小阶的 $r$ 正则图 $H_r$, 使得 $G$ 可以齐次地嵌入到 $H_r$, 其中

(a) $r = 0$,　(b) $r = 1$,　(c) $r = 2$,　(d) $r = 3$.

9.41　设 $G \cong P_4$. 是否存在图 $H$, 使得 (1) 对于 $G$ 的任意两个邻接顶点 $x_1$ 和 $x_2$, $H$ 的任意两个邻接顶点 $y_1$ 和 $y_2$, 以及 (2) 对于 $G$ 的任意两个不邻接顶点 $x_1$ 和 $x_2$, $H$ 的任意两个不邻接顶点 $y_1$ 和 $y_2$, 存在以 $G$ 作为诱导子图到 $H$ 的嵌入, 使得 $x_1$ 映射到 $y_1$ 且 $x_2$ 映射到 $y_2$?

9.42　提出一个关于图的齐次嵌入的问题, 并给予回答.

# 第10章 染　色

## 10.1 四色问题

Wolfgang Haken（美国数学家）
重重击打着巨妖
一次！两次！三次！四次！
他说："妖怪已经不存在了."

上面所说的是什么意思呢？我们马上对它做些解释. 在 1966 版的期刊*Journal of Recreational Mathematics* (趣味数学杂志) 的一篇论文*The mathematics of map coloring* (地图染色的数学) 中，它的作者、著名数学家 H. S. M. (Donald) Coxeter, 提到这样的一个事实：为了区别美国地图中相邻的州，在给该地图染色时我们几乎每次至多用 5 种或 6 种颜色. 那么，对美国的州染色，至少需要几种颜色就可以确保每两个拥有公共边界的州所染的颜色不同？只有一个交点的两个州是允许染相同颜色的，比如，犹他州与新墨西哥州 (如图 10.1 所示). 由于内华达州与犹他州是相邻的，也就是说，它们有公共的边界，因此，它们需要染不同的颜色. 实际上，内华达州周围有 5 个相邻的州，即，犹他州、爱达荷州、俄勒冈州、加州和亚利桑那州.

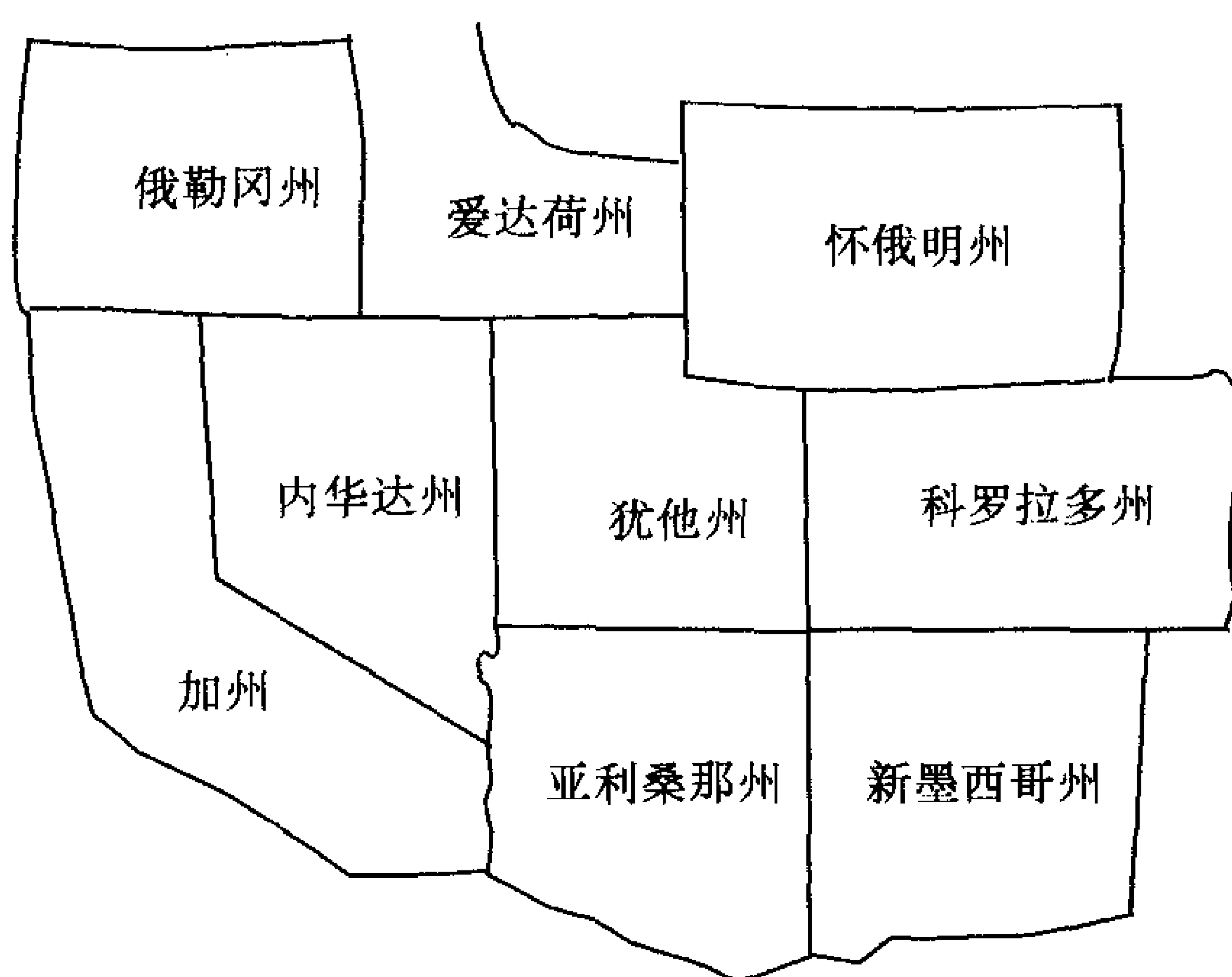



图 10.1　美国西部

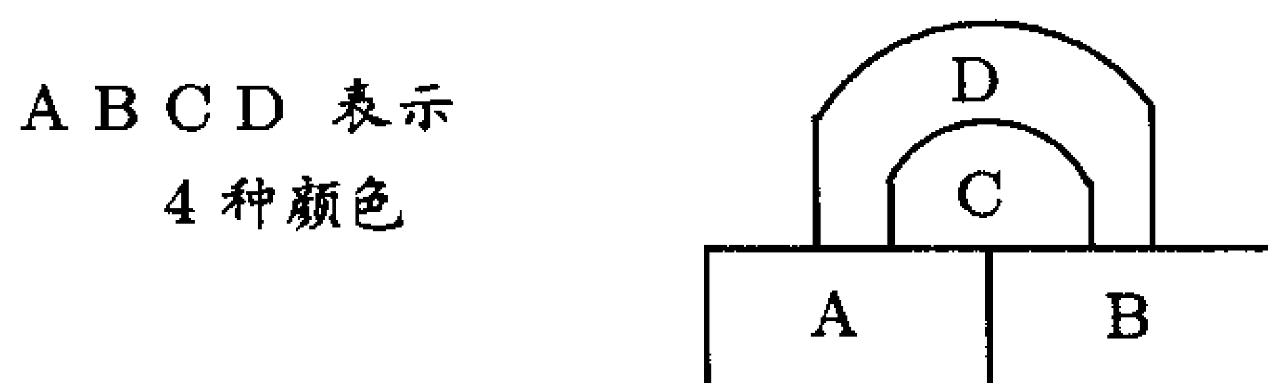
因此这 5 个州都必须染成与内华达州不同的颜色. 故必须要 3 种颜色为这 5 个州染色. 从而, 共需要 4 种颜色给这 6 个州染色. 事实上, 美国的所有州都可以用 4 种颜色来染色.

在一张地图中, 用最少种类的颜色为区域 (不论是州、国家还是县) 染色, 使得相邻的区域 (即有公共边界的区域) 染不同的颜色, 这看起来并不是地图制作者所关心的问题. 实际上, 数学史专家 Kenneth May 在研究地图制作方面的书籍中找不到这个问题被讨论的根据.

若一张地图按某种方式分成若干区域, 则在保证相邻的区域染不同颜色的前提下, 最少需要多少种颜色? 为什么这个问题让我们如此关注呢? 你可以根据地图给出第一个问题的正确答案, 在前面我们已经提过, 给美国这些州染色需要 4 种颜色, 并且 4 种颜色就足够了. 但如果考虑的区域很多 (比如有数十亿个), 并且地图中的许多区域有大量相邻的区域, 那么这个问题就可能有非常不同的答案.

很明显, 这个问题不是地图制作者提出的, 而是数学家提出的. 在 1852 年, Francis Guthrie (1831—1899), 一名刚从伦敦大学学院毕业的学生, 发现英国的郡可以用 4 种颜色来染色, 且使得相邻的郡染不同的颜色. Francis Guthrie 发现, 有些地图不能用 3 种颜色完成染色, 但对所有地图, 4 种颜色就足以完成染色; 他尝试着证明这点. 他给他的弟弟看了自己的证明; 他弟弟当时正好是著名数学家 Augustus De Morgan 的学生. Francis 对自己提供的证明并不十分满意. 在征得 Francis 同意的情形下, Frederick 于 1852 年 10 月 23 日把 Francis 所提供的证明转交给了 De Morgan. De Morgan 对此证明非常高兴, 认为这是一个崭新的东西. 就在同一天, De Morgan 给著名的数学家 William Rowan Hamilton 写了下面的一封信:

我的一名学生今天请我给他解释一个事实, 但我并不知道那究竟是不是一个事实 —— 并且到现在还不知道. 他说若一张图被任意划分, 并且对每个划分区域染色, 使得具有公共边界的区域染不同的颜色, —— 这可能需要 4 种颜色但不会更多 —— 下面是他用 4 种颜色完成染色的证明.




我怀疑 5 种或更多种颜色是不必要的.

Hamilton 于 1852 年 10 月 26 日给他回了信:

我可能不会很快就考虑你的颜色 "4 元组" 问题.

虽然这个问题 (当时还没有成为**四色问题**) 显然没有引起 Hamilton 的兴趣, 但 De Morgan 依然对此感兴趣. 然而在随后的几年里他对该问题的兴趣也开始慢慢减

少了.

在这段时期, 伦敦数学学会于 1865 年在伦敦大学学院成立, 并且 Augustus De Morgan 成为第一任主席. James Joseph Sylveste 与 Arthur Cayley 分别担任了第二任与第三任主席. Cayley 的早期大部分工作都是关于代数学的, 实际上, 这段时间他一直与 Sylvester 进行合作研究.

1814 年 9 月 3 日, James Joseph Sylvester 生于伦敦. 1833 年, Sylvester 进入剑桥圣约翰学院学习, 在那里他展露出数学上的天赋. 在那段时期, 每个学生在毕业之前, 都必须要对英国国教会签署一份宗教誓言. 作为犹太人, Sylvester 拒绝签署誓言, 因此学校不允许他毕业. 由于同样的原因, 他也不能获得奖学金. 在 1838–1841 年期间, Sylvester 在伦敦大学教物理, 在那里他的宗教信仰并没有给他带来麻烦. 他在该学校的一个同事就是 De Morgan (早期曾是 Sylvester 的老师).

Sylvester 于 1841 年在美国有过短暂的停留, 之后便回到了英国, 在那里他做过律师与保险精算师. 他还当过数学辅导教师, 令人惊奇的是, 他的一名学生是 Florence Nightingale(南丁格尔), 由于在护理和医院改革方面的先驱性工作而闻名于世. 在那时, Arthur Cayley 也是一名律师, 并经常与 Sylvester 讨论数学问题. 尽管他们的个性不同, 但是做了一辈子的朋友.

Sylvester 努力尝试去获得一个数学方面的职位, 但只是因为在一个成功应聘者突然去世, 他才在伍尔维奇的皇家军事学院获得了一个职位. Sylvester 继续在做矩阵理论与方程理论方面的重要工作, 他引进了*矩阵* (matrix) 与*判别式* (discriminant) 这两个数学术语. 然而, 由于是军事学院, Sylvester 被要求在 55 岁退休, 因而只能领一半的薪水.

Sylvester 打算放弃研究数学, 专心地写诗, 就在此时 (1876 年) 他的生活出现了一个大转折. 这一年, 美国成立了一所新大学, 即位于马里兰州巴尔的摩市的约翰霍普金斯大学. Sylvester 成为该校资格最老的第一批教员, 不论在年龄还是在先期的学术造诣方面. 对于这所学校来说, 聘请 Sylvester 可以说是一个英明的决定, 因为通过他又雇佣了不少教员, 而这些人后来都成了卓越的数学家. Sylvester 于 1878 年创办了期刊*American Journal of Mathematics* (美国数学杂志), 这是美国第一份数学杂志. Cayley 是最早在该期刊发表研究成果的人之一.

在 1878 年的伦敦数学会的一次会议上 (由 Henry Smith, 该学会的前任主席主持), 对四色问题的兴趣又复燃了. 在 1878 年 7 月 13 日这一天, Cayley 询问了这个问题是否已被解决. 与会者中有一位十分聪明的业余数学家, 他的名字叫 Alfred Bray Kempe.

次年 (即 1879 年) 的 7 月 17 日, Kempe 在*Nature* (自然) 杂志上宣布他已经解决了这个问题, 即每个地图都能够用 4 种或者更少的颜色来染色. Kempe (1849—1922) 于 1872 年毕业于剑桥大学, 并跟随 Cayley 学习数学. 他后来成为了一名律

师, 专业为教会法, 但还是一直对数学感兴趣. Cayley 建议 Kempe 应该发表自己的发现成果, 1879 年 Kempe 把其成果发表在美国数学杂志 的第二卷上.

Kempe 所用的方法涉及到一个后来被称之为**Kempe 链 (Kempe chains)**的概念. 他的想法大致如下. 假如有一张地图, 除了其中一个区域 (不妨设为 $X$) 外, 其他所有区域都用 4 种颜色 (红色 $r$、蓝色 $b$、绿色 $g$ 和黄色 $y$) 染了色, 我们想要用这些颜色中的一种为区域 $X$ 染色. 显然, 如果这 4 种颜色没有全部用来给环绕 $X$ 的区域染色, 那么必定有一种颜色可用于 $X$ 的染色. 因此, 我们可以假设 4 种颜色已经全部用来给环绕 $X$ 的区域染色. 也有可能恰好有四个区域环绕 $X$, 不妨设为 $A, B, C, D$ (按顺时针方向), 分别染了红色、蓝色、绿色和黄色; 如图 10.2 所示.

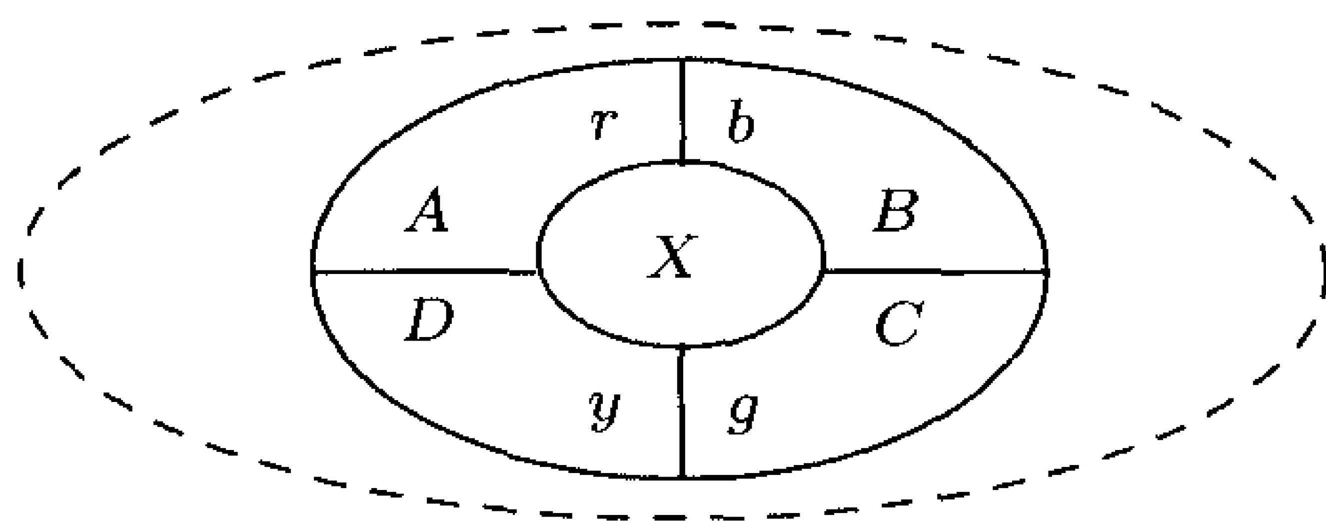



图 10.2 由四个区域环绕的区域

这有两种可能性: (1) 不存在从 $A$ 到 $C$ 染成红绿相间的相邻区域链. (2) 存在从 $A$ 到 $C$ 染成红绿相间的相邻区域链. 如果 (1) 发生, 那么对于所有从 $A$ 开始的红绿相间的区域链, 交换红色和绿色. 由于 $C$ 不在这样的链中出现, 一旦颜色交换了, 那么 $A$ 和 $C$ 都染成了绿色, 所以 $X$ 可以染成红色; 如果 (2) 发生, 那么就不存在从 $B$ 到 $D$ 的染成蓝黄相间的相邻区域链. 现在把 (1) 的技巧应用到染成蓝黄的区域链上, 得到该地图的所有区域 (除了 $X$) 的一个新染色, 其中 $B$ 和 $D$ 都染成了黄色, 剩下的蓝色可用来给 $X$ 染色.

当然, 这只考虑了恰有 4 个区域环绕 $X$ 的情形 (并且所有 4 色都用来为这些环绕区域染色). 当环绕 $X$ 的区域多于 4 个, 结果又会怎样呢? 在后面可以发现, 我们可以假设环绕 $X$ 的区域数不超过 5. 但这也只是要讨论的另一种情形: 有 5 个区域环绕 $X$, 并且 4 种颜色都用来给这些区域染色了. 显然, 在这种情形下, 某种颜色已经用了两次 (虽然不会用于相邻区域的染色). Kempe 坚信, 前面关于 4 个区域环绕 $X$ 情形的证明方法同样适用于 5 个区域环绕 $X$ 的情形. 这就是他的证明的关键部分, 也是证明失败的地方.

Kempe 因自己的成果而获得了荣誉. 他于 1881 年当选为英国皇家学会会员, 并承担了若干年的财务工作. 他曾对自己的证明作了两次改进, 并为此发表了两篇文章, 其中一篇激起了数学家 Peter Guthrie Tait (1831—1901) 的兴趣, Tait 给出了他自己对四色问题的解决方法. Tait 有很多的兴趣, 也有很多的朋友 (其中包括 Hamilton). 尽管有很多项目要做, 但他总是能找到时间把事情做好. 作为 Tait 的 4

个儿子之一, Frederick Guthrie Tait 的高尔夫球打得很好, 并以名字 Freddie Tait 在高尔夫球界享有盛誉. Frederick 分别于 1896 年与 1898 年获得了英国高尔夫球公开赛冠军 (在 1899 年又差一点获此殊荣). Frederick 在 1899—1902 期间的英布战争 (Anglo-Boer War) 中牺牲, 因此, 在南非的金伯利有一个国际性的比赛就是为了纪念 Frederick 的. 事实上, Peter Tait 还写了一篇有关高尔夫球飞行轨道的研究论文. 他对扭结以及它们的交叉方式也非常感兴趣. 然而, Tait 有一个个人问题, 就是他经常与同事争吵.

在四色问题的历史上, 接下来的一个比较重要的事件是有关英国数学家 Percy John Heawood 的. Heawood (1861—1955) 曾在牛津大学学习, 并在达拉莫学院, 即后来的达拉莫大学, 执教了 50 多年. Heawood 因他的大胡子以及允许他的狗参加其讲座而出名. 他一直工作到 78 岁才退休, 16 年后去世. 1890 年, Heawood 发表了一篇题为*Map colouring theorem* (地图染色定理) 的文章, 在该文中他构造一个反例指出 Kempe 关于四色问题的解决方法中的 "缺陷", 即当区域 $X$ 被 5 个区域环绕. (我们将在 10.4 节见到 Heawood 文章的有关讨论.)

Kempe 认同了 Heawood 在其文章中所发现的错误. 虽然对他有些为难, Kempe 还是在伦敦数学会上亲自报告了 Heawood 的工作, 并称自己改正不了这个错误. Heawood 也不能改正 Kempe 证明中的错误. 但 Heawood 对四色问题特别投入, 以致于在其生命中后 60 年里一直在研究它.

事实表明 Tait 的 "解法" 也是不正确的. 除了 Kempe 与 Tait 的 "证明" 之外, 还有另一个由 Frederick Temple 发表的错误证明. Frederick Temple 当时是伦敦主教, 后来成为坎特伯雷大主教.

每张地图都能够用 4 种或者更少的颜色来染色的这个猜想开始以**四色猜想 (Four Color Conjecture)**而闻名. 许多人都相信这个猜想是正确的. Heawood 的例子只是 Kempe 方法的一个反例, 而不是四色猜想的反例. 事实上, 证明由 Heawood 所构造的地图能够用 4 种颜色来染色并不是很困难. 虽然 Kempe 的方法是不成功的, 但是 Heawood 能够用该方法证明, 每张地图都能够用**5**种或者更少的颜色来染色. 另一方面, 任一地图是否真的需要 5 种颜色来染色还不确定, 这个问题直到 86 年后才确定.

在 Heawood 的文章之后, 解决四色猜想的进程似乎已经停滞了. 我们知道在 Kempe 尝试的证明中, 他用了这样一个事实, 即某个区域被 5 个或更少的区域环绕. 当一个区域恰好被 5 个区域环绕, 这种情形导致问题变得特别困难, 并且这个困难是一个非常严重的障碍. 随着时间流逝, 尝试证明该猜想的数学家们把证明划分成许多详细的情形, 每种情形主要针对于地图中可能出现的区域构形. 想法是: 寻找被一个区域环所包围的区域构形 (而不是单个区域) 的集合, 使得每张地图都至少含有该集合中的一个构形, 并且还使得: 若在环上的区域或者环外的区域能够用 4

种颜色染色, 则整个地图能够用 4 种颜色来染色. 这样的集合后来称为是**不可避免的可约构形集合 (unavoidable set of reducible configurations)**.

可约性概念出现在 20 世纪著名数学家 George David Birkhoff (1884—1944) 的一篇文章中. 他的儿子 Garrett Birkhoff 也成为了一名卓越的数学家. Garrett 对代数学很感兴趣, 并在 Philip Hall 的指导下在剑桥大学获得博士学位. 接着, Garrett Birkhoff 与 Saunders Mac Lane 合著了一本非常有名的书《近世代数综述》, 一本向大学生介绍抽象代数学的书.

George David Birkhoff 于 1907 在芝加哥大学获得了博士学位, 他的论文是关于常微分方程与边值问题的. 他后来分别在威斯康星大学麦迪逊分校、普林斯顿大学以及哈佛大学担任教员. 在哈佛大学期间他是文理学院的院长. 虽然 Birkhoff 在一个很广泛的领域里做研究, 但是他对 Jules Henri Poincaré 关于动力系统方面的工作十分着迷. Birkhoff 对动力系统作了广泛的研究. Poincaré于 1912 年去世, 他在最后一篇文章中指出: 限制性三体问题的周期解的存在性可以从某个几何定理中推导出来. 但是, 除了一个特殊的情形外, 他无法证明这个定理. Birkhoff 在几个月内就给出了 "Poincaré's Last Geometric Theorem (Poincaré' 的最后几何定理)" 的一个简洁但有深刻见解的证明, 并发表在了 1913 年 1 月的 *Transactions of the American Mathematical Society* (美国数学学会汇刊) 上. 这个成就带给了他一生的名誉. 同年, Birkhoff 还发表了有关图的可约性的文章.

在 Kempe 所尝试的四色定理的证明中, 他使用了这样一个事实, 即每张地图都含有一个至多被 5 个区域所环绕的区域. 换句话说, 这种构形是 "不可避免的". 如果应用最小反例方法证明四色定理, 并且确信一张具有最少区域的地图不能用 4 种或者更少的颜色来染色, 而且该地图还含有一个至多被 4 个区域所环绕的区域, 那么我们获得定理的一个证明. 因此, 在最小反例方法中, 所有区域必须至少被 5 个区域所环绕.

**可约构形 (reducible configuration)**是指在最小反例方法中不会出现的一种区域安排. 例如, 恰由 4 个区域环绕的单个区域是可约的. 这意味着, 如果所考虑的某张地图含有一个可约构形, 那么在该地图中, 在该构形之外区域的任一个至多 4 种颜色的染色都可以扩展到整张地图的一个至多 4 种颜色的染色. 因此, 如果可以找到一个不可避免的可约构形集合, 那么四色定理就能够获得证明. 这是一种最终被证明为可行的方法.

Philip Franklin 应用 Birkhoff 的想法证明了每个至多有 25 个区域的地图是 4 可染色的. 这个数字被 Oystein Ore 和 Joel Stemple 于 1970 年提高到 39, 后来又被 Jean Mayer 于 1976 年提高到 95. 直到 20 世纪 70 年代末, 人们开始研究 13～15 个的区域环构形.

对于寻找不可避免的可约构形集合, 德国数学家 Heinrich Heesch (1906—1995)

提出了一个更加系统的方法. 他越来越确信这个方法能够解决四色问题. 第二次世界大战刚结束不久, 他就在汉堡大学与基尔大学的讨论班上公布了这个方法. 其中有一名基尔大学的学生参加了这些讨论班, 他就是 Wolfgang Haken.

Heesch 估计不可避免的可约构形集合可能含有 10 000 个元素. 而且, 手工验证这么多的构形是可约的看起来也不太实际. Heesch 给出一种方法, 称作 ***D* 可约性** (***D*-reducibility**), 证明了: 验证一个构形为可约的是非常算法化的, 以致可以应用计算机来处理. 该方法需要考虑环状区域的每种 4 染色, 并且要说明每种染色均可扩展到整个地图的 4 染色. 例如, 若一个环状区域含有 14 个区域, 则该环状区域共有 199 291 种不同的染色方式. 在 20 世纪 60 年代, 计算机已经能够用来验证 $D$ 可约性了. 但是仅仅验证单个构形, 计算机都要花费许多小时. 更糟糕的是, 即使 $D$ 可约程序在一种构形上验证失败, 但这也并不意味着该构形不是可约的. Heesch 发现了证明可约性的另一种方法, 他称之为 $C$ 可约性. 这在四色问题上迈出了一大步.

在 20 世纪 60 年代后期, 一个最主要的成就就是借助于计算机解决四色问题. 参与人员包括 Heesch, Haken, Karl Dürre, Yoshio Shimamoto (设在布鲁克海文实验室的美国原子能委员会应用数学部门的主任). 该委员会有权使用 Control Data 6600 计算机 (由 Stephen Cray 研发), 是当时运算速度最快的计算机. Shimamoto 构造了一个构形 (后来称之为 Shimamoto horseshoe), 对于这个构形, 并不确定能否用 $D$ 可约来证明四色猜想的正确性. 曾在一段时间, 人们认为这个构形看起来应该是 $D$ 可约的. 事实上, Heesch 之前也遇到了这个构形, 并相信通过计算机可以验证该构形是 $D$ 可约的. 然而, William Tutte 和 Hassler Whitney 曾经一度相信, 如果 Shimamoto 的方法是正确的, 那么肯定会存在一个相当简单的证明. 由于他们发现 Shimamoto 的逻辑没有错误, 所以认为问题出在计算机上. 因为四色猜想的证明暂时停留在了这个构形的 $D$ 可约性上, 所以验证它的 $D$ 可约性成为了最本质的事情. Haken 也研究过 Shimamoto 的推理, 没有发现任何错误. 就在验证此构形的 $D$ 可约性的进程中, 四色问题已被解决的传闻流传开了. 此时, 四色猜想证明的最后一个步骤正在一台计算机上验证着. 最后, Cray 计算机产生了一个令人悲哀的结果, 即 Shimamoto horseshoe 不是 $D$ 可约的. Tutte 与 Whitney 也证明了这个事实.

在 20 世纪 70 年代初期, 尝试四色猜想可约性证明的人有 Heesch, Frank Allaire, Edward Swart, Frank Bernhart, Haken 等等. 在 Shimamoto 尝试寻找四色问题的一个简单解决方法失败之后, Haken 对用计算机寻找解决方法的兴趣也减少了. 此时, Haken 有一个博士生, 其论文答辩委员会的委员之一就是 Kenneth Appel. 与 Haken 不同的是, Appel 在计算机程序方面的功底非常深厚. Appel 比较乐观, 他建议 Haken 与自己应当重新回归到计算机方法. Appel 和 Haken 提出了一个算法, 用于检验 "可约障碍". 这为他们提供了一个节省很多计算时间的方法. 他们也得到了 John Koch 的帮助, 后者是一名计算机科学专业的研究生, 他编写了一些十分有效的程序来验

证可约性. 当 Appel 和 Haken 在此问题上正兴奋地忙碌着的时候, Appel 获准可以使用 IBM370-168 计算机, 这是伊利诺伊大学行政部门使用的一台功能非常强大的计算机. 就在这一切都在进行的同时, 其他人也在继续寻找解决方法, 没有人清楚谁会第一个获得证明方法. 在 1976 年 6 月, Appel 和 Haken 终于成功地构造了含有 1936 个可约构形的不可避免集, 为此他们用了三台电脑, 共花费了 1200 个机时. Appel (目前在新罕布什尔大学) 和 Haken (目前已从伊利诺伊大学退休) 在多伦多大学举行的 1976 年的美国数学学会和美国数学协会的夏季会议上, 向全世界宣布了他们的成功.

当然, 不是所有数学家都满意这个证明. 事实上, 大部分数学家都持很高的怀疑态度, 并对这个证明很不满意. 这引起了关于什么是数学证明的许多讨论. 在他们的证明被接受方面迈出一大步的是, 著名的数学家 William Tutte 接受了他们的证明. William Tutte 和 Blanche Descartes 把我们前面见到的诗写进了 *Journal of Graph Theory* (图论杂志) 的第一卷第三期中.

Wolfgang Haken
重重击打着巨妖
一次! 两次! 三次! 四次!
他说: "妖怪已经不存在了."

比较滑稽的是, Tutte 把他的诗取名为 "组合数学近来的发展". 这是一种保守而克制的陈述.

这样, 四色定理就被解决了. 事实上, 还有一个更简单的解法 (依然借助计算机), 其中构造了含有 633 个可约构形的不可避免集. 它是 Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour 和 Robin Thomas 于 1993 年给出的.

## 10.2 顶点染色

要证明图 10.3 中所画的地图可以用 4 种颜色来染色, 并不是很困难, 也就是说, 地图中的每个区域都可以分配到一种颜色 (所给的四种颜色中的一种), 并使得相邻区域所染的颜色不同. 图中已经给出了一种染色, 其中 $r, b, g, y$ 分别代表红、蓝、绿和黄四种颜色. 为一张地图染色与图之间有什么联系呢? 实际上, 它们之间存在紧密的联系. 每张地图都有一个与之关联的图 $G$, 称为该地图的**对偶 (dual)**, 其中 $G$ 的顶点即为地图的区域, $G$ 的两个顶点是邻接的当且仅当它们所对应的区域是相邻的. 图 10.3 也给出了该图中地图的对偶. 可以发现图 10.3 中图 $G$ 是一个连通的平面图. 实际上, 每张地图的对偶都是平面图. 反之, 每个连通的平面图都是某个地图的对偶.

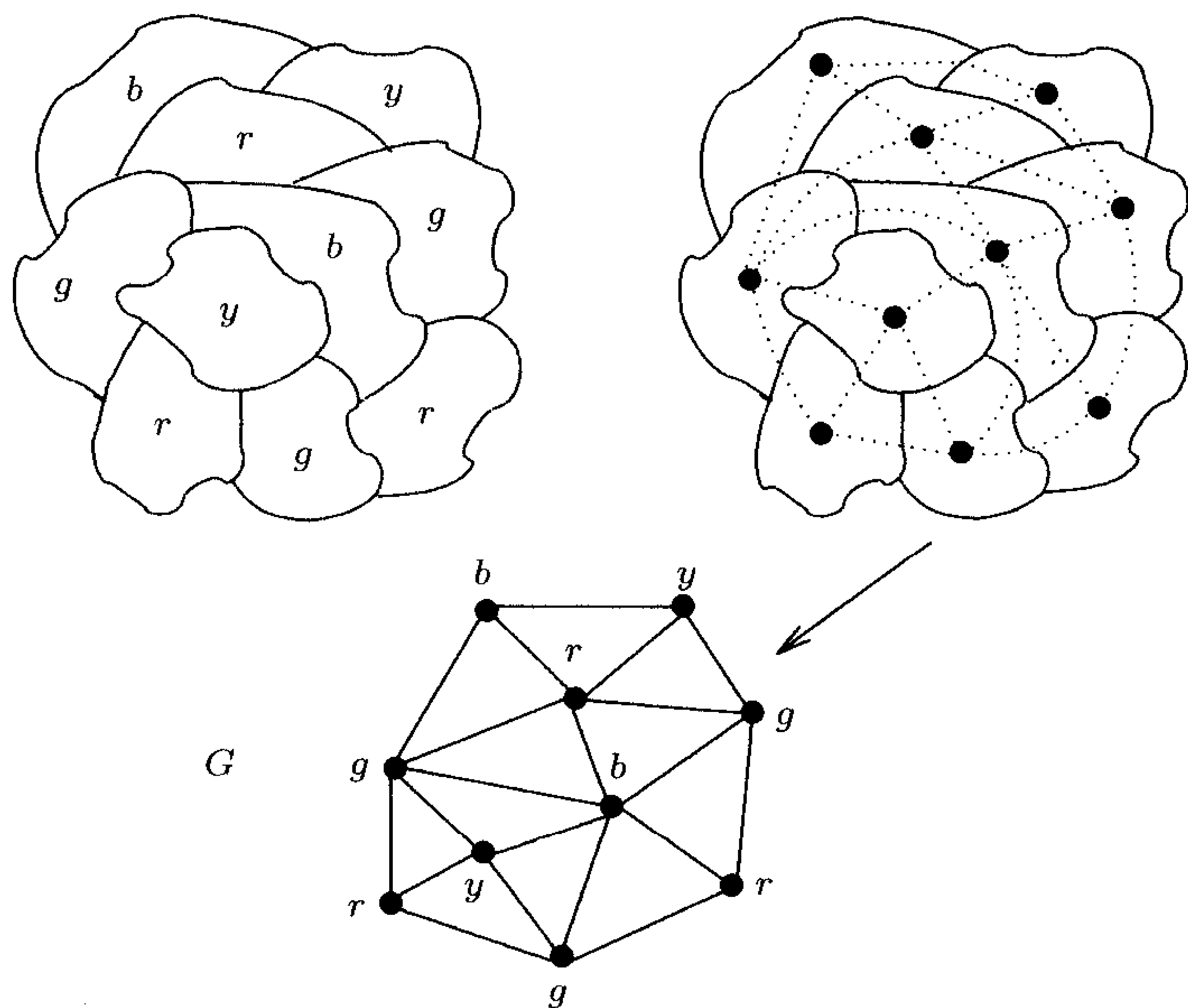



图 10.3 一张地图及其对偶

给一张地图染色就相当于给其对偶染色. 这就引出图的顶点染色问题. 图 $G$ 的一个**真染色 (proper coloring)**(或者简单地称为**染色 (coloring)**), 就是给 $G$ 的顶点分配一些颜色 (来自于某个颜色集合), 使得每个顶点都能分配到一种颜色, 且邻接的顶点被染成不同的颜色. 在 $G$ 的所有染色中, 所用的最少颜色数称为是 $G$ 的**色数 (chromatic number)**, 记为 $\chi(G)$. (符号 $\chi$ 是希腊字母 "chi".) 如果能用一个含有 $k$ 种颜色的集合给 $G$ (的顶点) 染色, 那么 $G$ 称为是 **$k$ 可染色的 ($k$-colorable)**. 应用 $k$ 种颜色的染色称为是 **$k$ 染色 ($k$-coloring)**. 若 $\chi(G) = k$, 则 $G$ 也称为是 **$k$ 色的 ($k$-chromatic)**, 并且 $G$ 的每个 $k$ 染色都是 $G$ 的**最小染色 (minimum coloring)**.

图 10.3 给出了图 $G$ 的一个染色, 即图 10.3 中地图的对偶的一个染色. 显然, $G$ 是 4 可染色的; 事实上, $G$ 是 4 色的. 图 10.3 中 $G$ 的染色是由地图的染色得到的. 因此, 四色定理告诉我们下面的结论, 也是该著名定理的重述.

**定理 10.1(四色定理)** 每个平面图的色数至多是 4.

我们在前面提到过, 四色问题起源于 1852 年. 曾经有人相信这个问题有更早的起源. 事实并非如此, 但这种混淆也是可以理解的. 在 1840 年, August Möbius (1790—1868) 曾提出如下问题:

**5 个王子问题**

曾经有一个国王, 他有 5 个儿子. 他在遗嘱中说, 在他死后, 把他的国家划分成 5 个区域, 每个王子可以分得一个区域, 并且还要求每个区域都

和其他四个区域有公共边界. 该如何来完成这件事情呢?

如果这个问题的解不明显, 那么考虑 Heinrich Tietze (1880—1964) 所提的 (对该问题的) 一个推广也是比较有趣的. Heinrich Tietze 是一位著名的拓扑学家.

**5 座宫殿问题**

国王另外又要求每位王子都要在自己的领域内修建一座宫殿, 并且还要修建道路来连接每座宫殿, 使得任何两条路都不会交叉. 这又如何来完成呢?

5 座宫殿问题可以用图 $G$ 来建立模型, 其中 $G$ 的顶点代表宫殿, 边代表路. 显然, $G \cong K_5$. 该问题有解当且仅当 $G$ 是平面图, 但 $G$ 不是平面图. 图 $G$ 也是 5 座宫殿问题任一个解的对偶图. 这就是说, 上述问题都无解. 若用这种方式把国家划成 5 个区域, 则需要 5 种颜色为这 5 个区域染色. 这种含 5 个区域的构形是不存在的, 即, 没有地图包含 5 个两两相邻的区域. 然而, 这并不能解决四色问题, 因为这并不表明: 不存在其他需要 5 种颜色的构形. 这就是难点所在.

我们现在对图染色以及某些比较熟悉的图的色数做一些讨论. 即使图 $G$ 有一条边, 也至少需要 2 种颜色为 $G$ 染色. 换句话说, $\chi(G) = 1$ 当且仅当对于某个正整数 $n$, 有 $G \cong \overline{K}_n$.

在图 $G$ 的任一染色中, 相同颜色的顶点不能邻接. 在讨论染色的时候, 任何两个顶点都不邻接的顶点集合, 这应该引起我们的注意. 回顾前文, 图 $G$ 的一个顶点集合 $S$ 称为是**独立的**, 如果 $S$ 中的任意两个顶点都不是邻接的. 一般地, 图含有许多顶点独立集合. 在前面我们介绍过, **最大独立集**是指具有最大基数的独立集. 最大独立集中顶点的个数, 记为 $\beta(G)$, 称为是 $G$ 的**点独立数** (或者简称为**独立数**). 对于图 10.4 中图 $G \cong C_6$, $S_1 = \{v_1, v_4\}$ 与 $S_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ 都是独立集. 由于 $G$ 不含顶点数多于 3 的独立集, 所以 $\beta(G) = 3$.

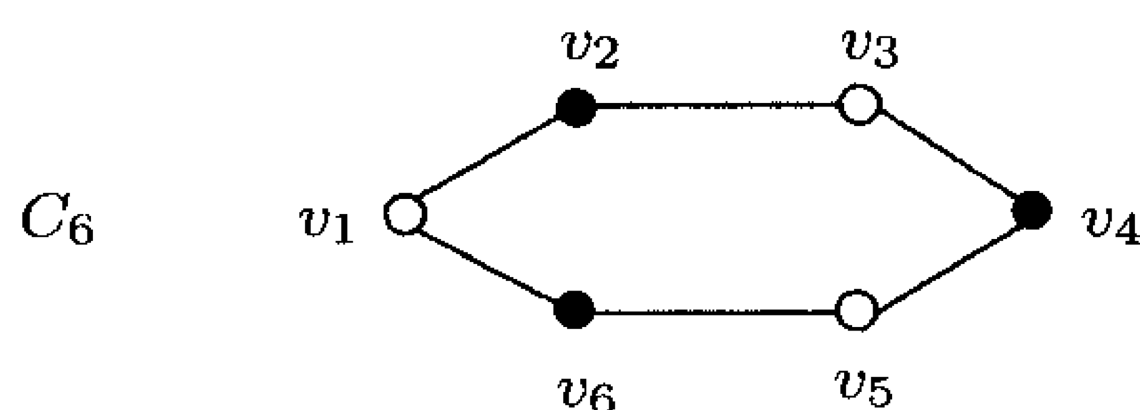



图 10.4 独立集

若 $G$ 是一个 $k$ 色图, 则可以把 $V(G)$ 划分成 $k$ 个独立集 $V_1, V_2, \cdots, V_k$, 此时这些顶点集称为**色类 (color classes)**, 但不能把 $V(G)$ 划分成 $k-1$ 个独立集. 特别地, 我们认为色类 $V_i$ 中的顶点分配到颜色 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. 反之, 若图 $G$ 的顶点集能够划分成 $k$ 个独立集, 但不能划分成更少的独立集, 则 $\chi(G) = k$. 因此, 为了让图 $G$ 的色数为 2, 则 $G$ 必须是非空的, 并且 $V(G)$ 能够划分成 2 个独立集 $V_1$ 和 $V_2$. 从而 $G$ 的每条边都连接 $V_1$ 中的一个顶点和 $V_2$ 中的一个顶点. 这意味着 $G$ 是一个具有

部集 $V_1$ 和 $V_2$ 的二部图.

**定理 10.2** 图 $G$ 的色数是 2 当且仅当 $G$ 是一个非空的二部图.

由定理 1.12 可知, 图 $G$ 是二部的当且仅当 $G$ 不含奇圈. 因此, 若图 $G$ 含有一个奇圈, 则 $\chi(G) \geqslant 3$. 易见, 若对于某个偶数 $n \geqslant 4$, 有 $G \cong C_n$, 则 $\chi(C_n) = 2$. 另一方面, 若 $n$ 是一个奇数, 并且 $n \geqslant 3$, 则 $\chi(C_n) = 3$. 我们已经知道, 当 $n$ 是一个奇数, 并且 $n \geqslant 3$ 时, $\chi(C_n) \geqslant 3$. 为了证明 $\chi(C_n) = 3$, 我们仅需要证明, 存在 $C_n$ 的一个 3 染色. 事实上, 我们能够把 $C_n$ 的某个顶点染成颜色 3, 用颜色 1 和 2 交替地为剩下的顶点染色 (如图 10.5 所示).

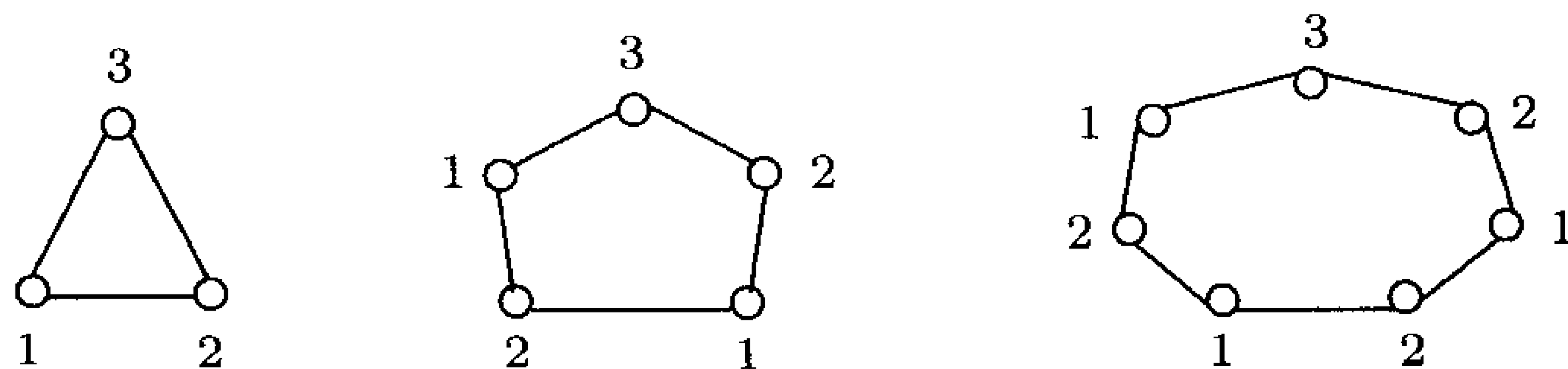



图 10.5 奇圈的色数

对任一奇数 $n \geqslant 3$, 证明 $C_n$ 色数的方法启发我们应该如何确定任意图的色数. 对某个图 $G$ 以及整数 $k \geqslant 3$, 为了证明 $\chi(G) = k$, 我们必须证明:

(1) 至少需要 $k$ 种颜色来为 $G$ 染色 (或等价地, 证明不能用 $k-1$ 种颜色为 $G$ 染色);

(2) 存在 $G$ 的一个 $k$ 染色.

**例 10.3** 图 10.6 所示的图 $G$ 是 3 色的.

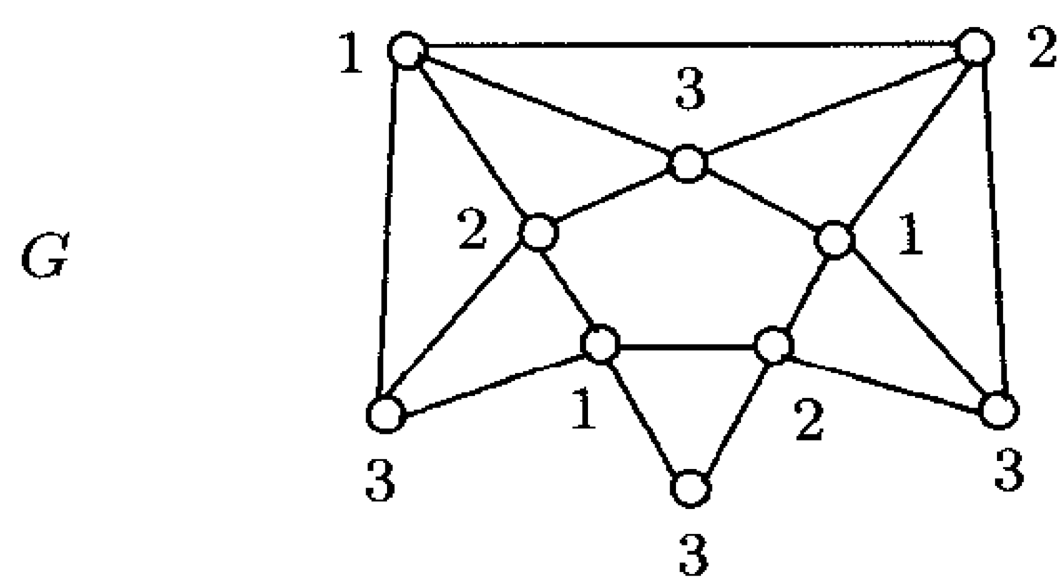



图 10.6 一个 3 色图 $G$

**解** 由于 $G$ 含有一个三角形, 所以 $\chi(G) \geqslant 3$. 另一方面, 图 10.6 中列出了 $G$ 的一个 3 染色, 这意味着 $\chi(G) \leqslant 3$. 因此, $\chi(G) = 3$. ◇

对例 10.3 进行一些注释或许是比较有用的. 如上所述, $G$ 含有一个三角形, 意味着 $\chi(G) \geqslant 3$. 因此, 为了证明 $\chi(G) = 3$, 找出 $G$ 的一个 3 染色就足够了. 显然, 图 10.6 所示的就是 $G$ 的一个 3 染色. 然而, 开始我们并不知道是否存在这样一个染色. 该图含有 5 圈, 因此至少要 3 种颜色. 或许我们首先考虑的是这个 5 圈的一个 3 染色. 有多种方式来为这个 5 圈进行 3 染色. 图 10.7(a) 就列出了其中一种. 如果

我们尝试着仅用 3 种颜色为 $G$ 的其余顶点染色, 则两个邻接的顶点都染成了颜色 3 (如图 10.7(b) 所示), 导致矛盾. 这本可以诱导我们得出 (错误的) 结论: $\chi(G)=4$. 这说明在为图染色的时候, 必须小心仔细.

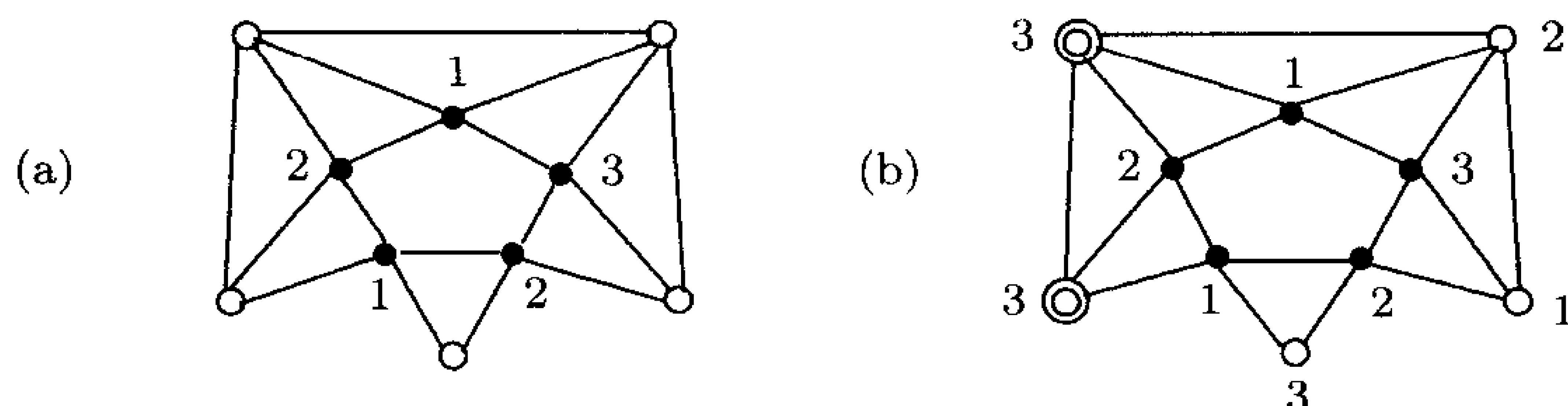



图 10.7　图染色

染色在某些安排问题中发挥着有效的作用.

**例 10.4**　某大学数学系要为这个夏季安排课程表, 所要开设的课程为: 图论 (GT), 统计学 (S), 线性代数 (LA), 高等微积分 (AC), 几何学 (G) 以及近世代数 (MA). 有 10 名学生 (如下所示) 需要选修这些课程. 根据这些信息, 应用图论的相关知识, 确定开设这些课程所需要时间段的最小数, 使得有同一个学生选修每两门课都不能在同一天的同一时间段内开课. 当然, 没有相同学生选修的两门课可以在同一时间段内开课.

| | |
|---|---|
| Anden: LA, S | Brynn: MA, LA, G |
| Chase: MA, G, LA | Denise: G, LA, AC |
| Everett: AC, LA, S | Frančois: G, AC |
| Greg: GT, MA, LA | Harper: LA, GT, S |
| Irene: AC, S, LA | Jennie: GT, S |

**解**　首先, 我们构造一个图 $H$, 其顶点为这 6 门课程. 两个顶点 (课程) 由一条边连接, 如果有某个学生同时选修了这两门课程 (如图 10.8 所示). 最小的时间段数就是 $\chi(H)$. 由于 $H$ 含有奇圈 GT, S, AC, G, MA, GT, 所以需要 3 种颜色来为该圈上的顶点染色. 由于 LA 与该圈上的所有顶点都邻接, 所以需要第 4 种颜色来为 LA 染色. 因此, $\chi(H)\geqslant 4$. 并且图 10.8 给出了 $H$ 的一个 4 染色, 因而 $\chi(H)=4$. 这也为我们提供了一种在 4 个时间段内安排 6 门课程的方法, 即, 时间段 1: 图论和高等微积分; 时间段 2: 几何学; 时间段 3: 统计学和近世代数; 时间段 4: 线性代数. ◇

可以肯定地说, 任一 $n$ 阶图 $G$ 都是 $n$ 可染色的. 若 $G\cong K_n$, 则任意两个顶点都必须染不同的颜色, 因此, $\chi(K_n)=n$. 如果 $G$ 的阶数为 $n$, 并且 $G\ncong K_n$, 那么 $G$ 必含有两个不邻接的顶点, 不妨设为 $u$ 和 $v$. 把 $u$ 和 $v$ 染颜色 1, 其余 $n-2$ 个顶点分别染颜色 $2,3,\cdots,n-1$, 这可以形成 $G$ 的一个 $(n-1)$ 染色, 因而, $\chi(G)\leqslant n-1$. 换句话说, $n$ 阶图 $G$ 的色数为 $n$ 当且仅当 $G\cong K_n$.

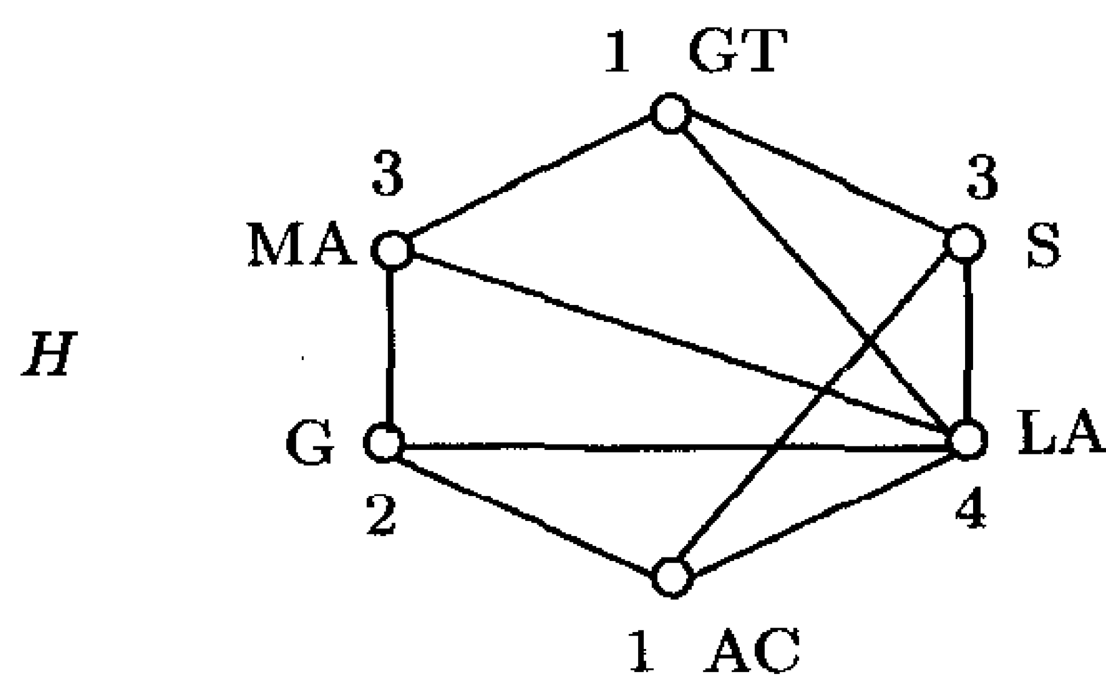



图 10.8 例 10.4 的图

另一个观察也是很有用的. 若 $H$ 为图 $G$ 的一个子图, 则 $G$ 的任意一个染色都能诱导 $H$ 的一个染色. 由于用更少的颜色就可以为 $H$ 染色, 所以

$$\chi(H) \leqslant \chi(G).$$

在一个图中, 与独立集相对立的概念是团. 图 $G$ 中一个**团 (clique)**是指 $G$ 的一个完全子图. 图 $G$ 中最大团的阶数称为是 $G$ 的**团数 (clique number)**, 记为 $\omega(G)$ (符号 $\omega$ 是希腊字母 "omega"). 事实上,

$$\beta(G) = k \text{ 当且仅当} \omega(\overline{G}) = k.$$

一般地, 我们没有图的色数的公式. 实际上, 甚至确定一个相对小的图的色数都是一件很具挑战的事情. 然而, 图 $G$ 色数的下界可以通过 $G$ 的独立数和团数来给出.

**定理 10.5** 对每个 $n$ 阶图 $G$,

$$\chi(G) \geqslant \omega(G), \ \chi(G) \geqslant \frac{n}{\beta(G)}.$$

**证** [直接证法] 设 $H$ 为 $G$ 的一个阶数为 $\omega(G)$ 的团, 则 $\chi(H) = \omega(G)$. 由于 $H$ 是 $G$ 的一个子图, 所以可得 $\chi(H) \leqslant \chi(G)$, 即,$\omega(G) \leqslant \chi(G)$.

假设 $\chi(G) = k$. 因而 $V(G)$ 可被划分成 $k$ 个独立集 $V_1, V_2, \cdots, V_k$. 所以

$$n = |V(G)| = |V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k| = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \leqslant k\beta(G).$$

因此, $\chi(G) = k \geqslant n/\beta(G)$. ∎

为了证明定理 10.5 中所给界的紧性, 考虑图 $G \cong K_{3,3,3,3}$, 它的部集为 $V_1, V_2, V_3, V_4$, 如图 10.9 所示. $G$ 的阶 $n = 12$, 其独立数 $\beta(G) = 3$, 团数 $\omega(G) = 4$. 实际上, $\chi(G) = 4 = \omega(G) = n/\beta(G)$. 通过对 $V_i$ 中的顶点染色为 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, 给出 $G$ 的一个 4 染色.

在例 1.5 (第 1 章中) 中, 我们说明了如何用图建立街道交叉口处的交通车道模型. 现在再次回顾这个例子, 并考虑一个与此有关的问题.

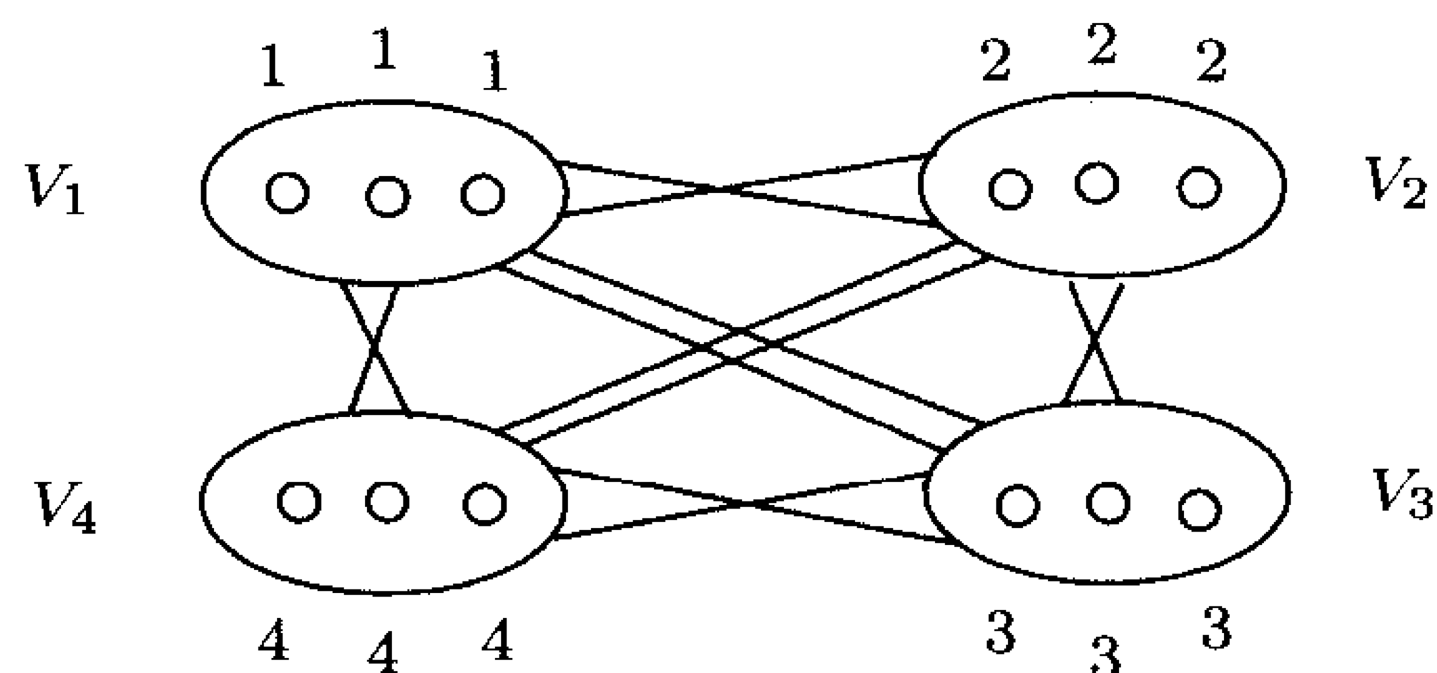



图 10.9　图 $K_{3,3,3,3}$ 的染色

**例 10.6**　图 10.10 列出了两条繁华街道路口处的交通车道 L1, L2, ⋯, L9. 在此路口处安置了交通灯. 当交通灯处于某个相位时, 亮绿灯的车道上的车辆就可以安全通过路口. 为了 ( 最终 ) 让所有的车辆都能够安全通过路口, 对于交通灯来说, 所需要相位的最小数是多少?

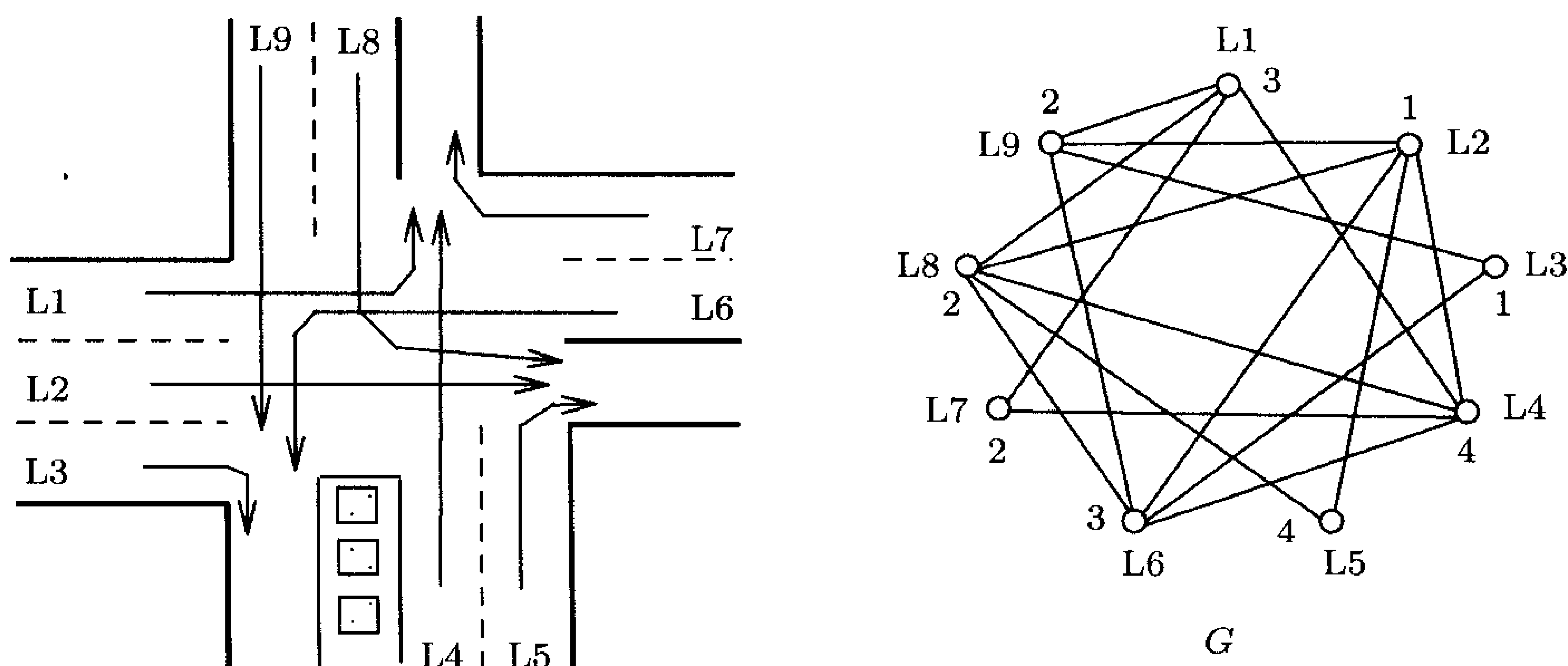



图 10.10　街道交叉口处的交通车道

**解**　首先, 为之构造图模型 $G$ (如图 10.10 所示), 其中 $V(G)$ = {L1, L2, ⋯, L9}, 两个顶点 (车道) 由一条边连接当且仅当这两个车道上的车不能同时安全地进入路口, 否则可能导致交通事故.

解答这个问题需要确定图 10.10 所示的图的色数. 首先注意到, $\langle\{L2, L4, L6, L8\}\rangle \cong K_4$, 因此, $\chi(G) \geqslant 4$. 由于 $G$ 存在一个 4 染色 (如图 10.10 所示), 所以 $\chi(G) = 4$. ◇

由于图 10.10 中图 $G$ 的顶点集显然能够被划分成 4 个独立集 {L1, L2, L3}, {L4, L5}, {L6, L7}, {L8, L9}, 所以你可能立即得出结论, 例 10.6 中问题的答案显然就是 4. 然而, 这个观察 (同时为 $G$ 提供了另一种 4 染色) 只能说明 $\chi(G) \leqslant 4$.

图 $G$ 的**染色**也可以认为是从 $V(G)$ 到正整数 (或者自然数) 集合 **N** 的一个函数 $c$, 使得邻接的顶点具有不同的函数值, 也就是说, $G$ 的一个**染色**就是一个函数

$c: V(G) \to \mathbf{N}$, 使得当 $uv \in E(G)$ 时, $c(u) \neq c(v)$.

我们现在用最大度给出图的色数的一个上界. 下面证明中用到了贪婪算法, 在该算法中, 颜色被分配给顶点, 一次处理一个顶点, 这似乎是一种最优的方法.

**定理 10.7** 对于每个图 $G$,

$$\chi(G) \leqslant 1 + \Delta(G).$$

**证** [直接证法] 设 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 按下列方式递归地定义一个染色 $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 定义的方式如下: $c(v_1) = 1$. 一旦 $c(v_i)$ $(1 \leqslant i < n)$ 已经定义, 则 $c(v_{i+1})$ 定义为: 没有用来给 $v_{i+1}$ 的邻点染色的最小颜色 (正整数). 由于 $v_{i+1}$ 具有 $\deg v_{i+1}$ 个邻点, 所以整数 $1, 2, \cdots, 1+\deg v_{i+1}$ 中至少有一个等于 $c(v_{i+1})$. 因此, $c(v_{i+1}) \leqslant 1 + \deg v_{i+1}$. 若 $G$ 顶点被分配到最大颜色 (整数) 为 $c(v_j)$, 则

$$\chi(G) \leqslant c(v_j) \leqslant 1 + \deg v_j \leqslant 1 + \Delta(G),$$

命题得证. ■

我们已经知道, 若 $n \geqslant 3$ 是奇数, 则 $\chi(C_n) = 3$. 此外, $\chi(K_n) = n$. 因此, 如果 $n \geqslant 3$ 是奇数, $\chi(C_n) = 1 + \Delta(C_n)$; $\chi(K_n) = 1 + \Delta(K_n)$. 对于奇圈和完全图, 定理 10.7 中的界是可以达到的. 下面的定理归功于 R. Leonard Brooks, 该定理告诉我们, 奇圈和完全图是达到 (定理 10.7 中) 上界的仅有的连通图. 由于定理的证明相当麻烦, 这里就不再证明了.

**定理 10.8(Brooks 定理)** 对每个非奇圈也非完全的连通图 $G$,

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G).$$

就图的色数来说, 还有一个上界, 该上界比定理 10.7 和 10.8 所给的界都要好. 这个界的证明与定理 10.7 证明相类似.

**定理 10.9** 对每个图 $G$,

$$\chi(G) \leqslant 1 + \max\{\delta(H)\},$$

其中 max 取遍 $G$ 的所有诱导子图 $H$.

**证** [直接证法] 在 $G$ 的所有诱导子图中, 设 $k$ 为这些子图最小度的最大值. 假设 $G$ 的阶为 $n$, $v_n$ 是图 $G_n = G$ 中满足 $\deg_G v_n = \delta(G)$ 的一个顶点. 因而, $\deg_G v_n \leqslant k$. 所以, $G_{n-1} = G - v_n$ 含有一个顶点 $v_{n-1}$ 满足 $\deg_{G_{n-1}} v_{n-1} \leqslant k$. 继续这样做下去, 我们就构造了 $G$ 的所有顶点的一个序列 $v_1, v_2, \cdots, v_n$, 以及所有诱导子图序列 $G_1, G_2, \cdots, G_n$, 并且满足 $v_i \in V(G_i)$, $\deg_{G_i} v_i \leqslant k$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

我们递归地定义一个染色 $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 方式如下：$c(v_1) = 1$. 一旦 $c(v_i)$ ($1 \leqslant i < n$) 已经定义, 则 $c(v_{i+1})$ 定义为：没有用来给 $v_{i+1}$ 的邻点染色的最小颜色 (正整数). 由于 $v_{i+1}$ 在顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_i$ 中有 $\deg_{G_{i+1}} v_{i+1}$ 个邻点, 且 $\deg_{G_{i+1}} v_{i+1} \leqslant k$, 所以整数 $1, 2, \cdots, k+1$ 中至少有一个等于 $c(v_{i+1})$. 因此, $G$ 的每个顶点都分配到了 $1, 2, \cdots, 1+k$ 中的一种颜色, 从而, $\chi(G) \leqslant 1+k$. 定理得证. ■

现在让我们回到定理 10.5 中的不等式 $\chi(G) \geqslant \omega(G)$ 上来. 虽然 $\chi(G)$ 的下界 $\omega(G)$ 在 $G \cong K_{3,3,3,3}$ 时达到, 事实上, 对于每个完全多部图, 这个下界都能达到, 但还有许多图 $G$ 满足 $\chi(G) \neq \omega(G)$. 例如, $G \cong C_5$, 易见 $\chi(G) = 3$, 但 $\omega(G) = 2$. 图 10.11 中图 $G$ 称为是**Grötzsch 图 (Grötzsch graph)**. 该图是**无三角的 (triangle-free)**(即不含三角形), 但其色数为 4. 因此, $\chi(G) = 4$, $\omega(G) = 2$.

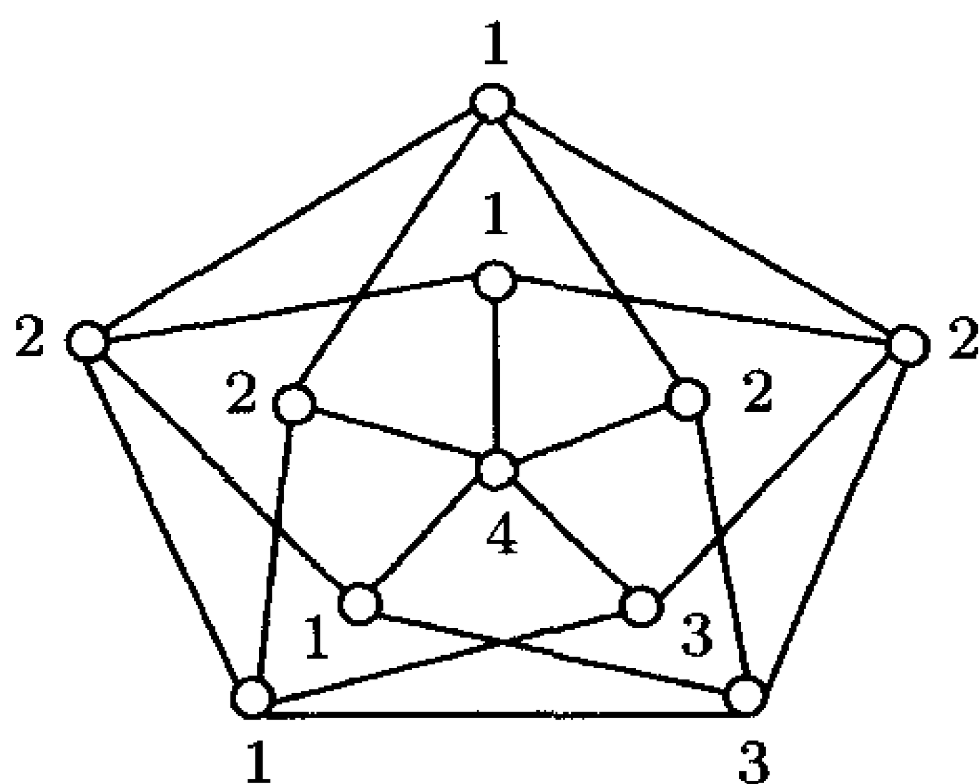



图 10.11　Grötzsch 图: 色数为 4 且无三角的图

看起来, 似乎大色数的图都必有大的团, 但事实并非如此. 实际上, 不含三角形的图可以有很大的色数. 许多数学家都发现了这个事实. 接下来的证明归功于数学家 Jan Mycielski. 他在科罗拉多大学工作了很多年, 因其在集合及逻辑方面的工作而出名. 在证明中, 我们用到了一个图, 有时称之为图的影子图. 图 $G$ 的**影子图 (shadow graph)** $S(G)$是通过在 $G$ 中, 对其每个顶点 $v$, 增加一个新的顶点 $v'$, 称之为 $v$ 的**影子顶点 (shadow vertex)**, 并连接 $v'$ 到 $v$ 在 $G$ 中的所有邻点, 所得到的图. 注意到, (1) 在 $S(G)$ 中, $G$ 的顶点与其影子顶点是不邻接的; (2) 在 $S(G)$ 中, 任何两个阴影顶点都是不邻接的. 图 10.12 所示的是 $C_5$ 的影子图 $S(C_5)$. 图 10.11 中 Grötzsch 图是通过在 $S(C_5)$ 中增加一个新的顶点 $z$, 并连接 $z$ 到 $S(C_5)$ 的所有影子顶点所获得的.

**定理 10.10**　*对于每个整数 $k \geqslant 3$, 都存在一个色数为 $k$ 的无三角的图.*

**证**　[归纳证法, 反证法] 对 $k$ 进行归纳. 我们已经看到, 当 $k = 3$ 或者 $k = 4$ 时, 结论是正确的. 假设存在一个无三角形的 $(k-1)$ 色图 $F$, 其中 $k \geqslant 5$ 是一个整数. 设 $G$ 是通过在 $F$ 的影子图 $S(F)$ 中增加一个新的顶点 $z$, 并连接 $z$ 到 $S(F)$ 的所有影子顶点所获得的图. 下面证明 $G$ 是一个 $\chi(G) = k$ 的无三角的图.

首先证明 $G$ 不含三角形. 反之, 假设 $U$ 为 $G$ 的三个顶点构成的集合, 且 $\langle U \rangle \cong$

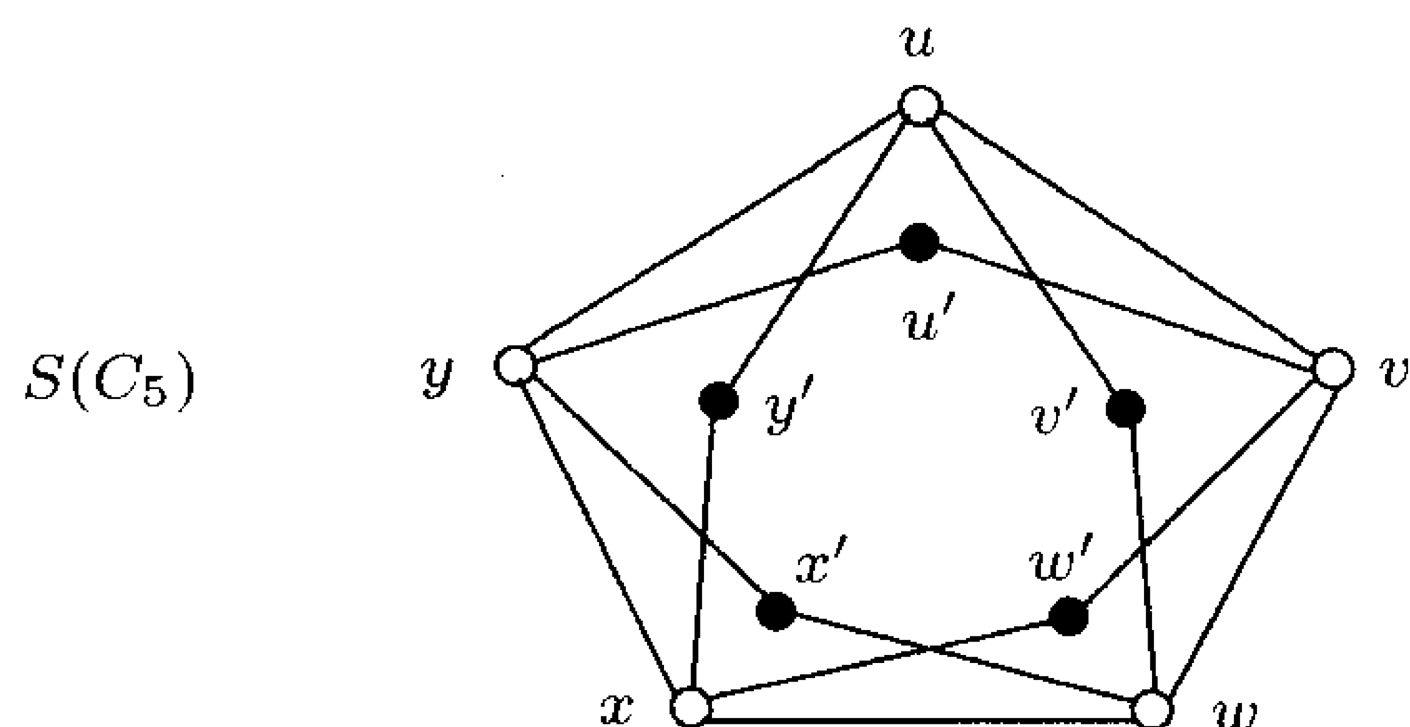



图 10.12 $C_5$ 的影子图

$K_3$. 由于在 $G$ 中, 任何两个影子顶点都是不邻接的, 所以 $U$ 至多含有一个影子顶点. 因为 $z$ 仅与阴影顶点邻接, 所以 $z \notin U$. 另一方面, $F$ 不含三角形, 因而 $U$ 至少有一个非 $F$ 的顶点. 所以可设 $U = \{u, v, w'\}$, 其中 $u$ 和 $v$ 是 $F$ 中邻接的顶点, $w'$ 是与 $u$ 和 $v$ 都邻接的影子顶点. 因此, $w \neq u, v$. 但 $w$ 与 $u$ 和 $v$ 都邻接, 这样就产生了 $F$ 的一个三角形, 与 $F$ 不含三角形矛盾.

最后只需要证明 $\chi(G) = k$. 设 $c^*$ 是 $F$ 的一个 $(k-1)$ 染色. 现在我们把 $c^*$ 扩展为 $G$ 的一个 $k$ 染色, 方式如下：对每个 $x \in V(F)$, 定义 $c^*(x') = c^*(x)$, 并定义 $c^*(z) = k$. 可见 $\chi(G) \leqslant k$. 接下来证明 $\chi(G) \geqslant k$. 由于 $F$ 是 $G$ 的一个子图, 所以 $k-1 = \chi(F) \leqslant \chi(G)$. 假设 $\chi(G) = k-1$. 设 $c$ 是 $G$ 的一个 $(k-1)$ 染色, 不妨设这些颜色为 $1, 2, \cdots, k-1$. 我们可以假设 $c(z) = k-1$. 由于 $z$ 与 $G$ 中的每个阴影顶点都邻接, 所以阴影顶点可用 $1, 2, \cdots, k-2$ 染色. 对于 $G$ 的任一阴影顶点 $x'$, 其颜色 $c(x')$ 都与 $x$ 的邻点所染的颜色不同. 因此, 对于 $G$ 的属于 $F$ 的顶点 $y$, 其颜色 $c(y)$ 都可被 $c(y')$ 所替代, 这样我们得到 $F$ 的一个 $(k-2)$ 染色. 这与 $\chi(F) = k-1$ 矛盾. ■

## 习题

10.1 确定图 10.13 中每个图的色数.

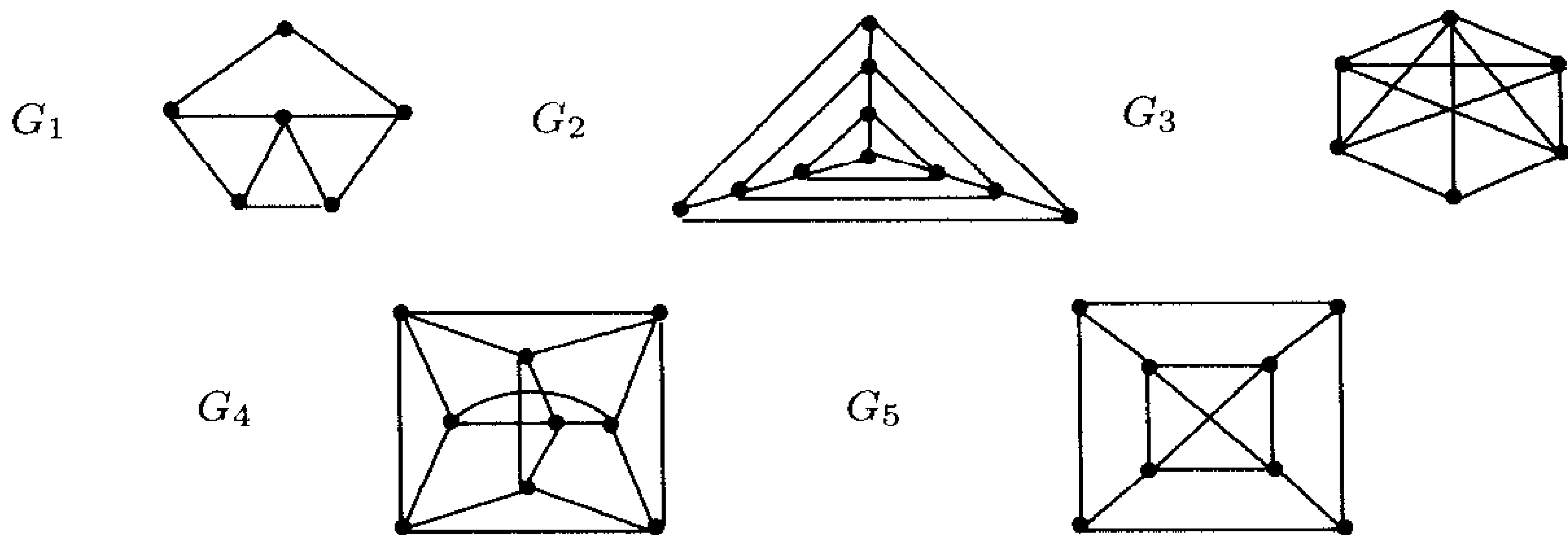



图 10.13 习题 10.1 的图

10.2 确定如下每个图的色数：

(a) Petersen 图, (b) $n$ 立方体 $Q_n$, (c) 轮图 $W_n \cong C_n + K_1$.

10.3 树的色数是多少?

10.4 证明或者反驳：

(a) 若一个平面图含有三角形, 则其色数为 3.

(b) 若图 $G$ 有一个 4 染色, 则 $\chi(G) = 4$.

(c) 若能够证明图 $G$ 没有 3 染色, 则 $\chi(G) = 4$.

(d) 若图 $G$ 的色数 $\chi(G) \leqslant 4$, 则 $G$ 是平面的.

10.5 证明：每个色数为 3 的 6 阶图都至多有 12 条边.

10.6 证明或者反驳：

(a) 若图 $G$ 含有一个同构于完全图 $K_r$ 的子图, 则 $\chi(G) \geqslant r$.

(b) 若图 $G$ 的色数 $\chi(G) \geqslant r$, 则 $G$ 含有一个同构于完全图 $K_r$ 的子图.

10.7 证明：不存在度序列为 $3,3,3,3,3,3,4,4,5,5,5,5$ 的且色数为 6 的图 $G$.

10.8 对于下列每种情形, 列举一个例子, 或说明为什么没有满足该条件的图,

(a) 色数为 5 的平面图,

(b) 色数为 3 的非平面图,

(c) 图 $G$, 满足 $\Delta(G) = 2\chi(G)$,

(d) 图 $G$, 满足 $\chi(G) = 2\Delta(G)$,

(e) 色数为 $n$ 的 $n$ 阶非完全图.

10.9 证明或者反驳：

(a) 存在一个非平面图 $G$, 使得 $G - v$ 是平面的, 并且对 $G$ 的每个顶点 $v$, $\chi(G) = \chi(G - v) + 1$.

(b) 存在一个非平面图 $G$, 使得 $G - v$ 是平面的, 并且对 $G$ 的每个顶点 $v$, $\chi(G) = \chi(G - v)$.

10.10 在期末考试周期间, 一所学院的 8 名选修数学课的学生得到许可去参加大学生科研讨论会. 假设他们回来之后需要在星期一对所错过的考试进行补考. 星期一安排这些考试的可能时间段为：

(1) 8:00 ～ 10:00　(2) 10:15 ～ 12:15　(3) 12:30 ～ 2:30

(4) 2:45 ～ 4:45　(5) 5:00 ～ 7:00　(6) 7:15 ～ 9:15

应用图论的相关知识, 确定这 8 名学生完成考试的最早时间, 要求：如果有某个学生必须要参加某两门课的考试, 那么这两门课程就不能安排在同一时间段内. 这 8 名学生以及他们选修的课程：高等微积分 (AC), 微分方程 (DE), 几何学 (G), 图论 (GT), 线性规划 (LP), 近世代数 (MA), 统计学 (S), 拓扑学 (T), 列表如下：

Alicia：AC, DE, LP　Brian：AC, G, LP

Carla：G, LP, MA　Diane：GT, LP, MA

Edward：DE, GT, LP　Faith：DE, GT, T

Grace：DE, S, T　Henry：AC, DE, S

10.11 有 8 种化学药品需要空运飞越整个国家. 运费根据运送的容器数量来确定. 运送一个容器需要 \$125, 对于每个额外增加的容器, 运费都要再增加 \$85. 某些药品之间可以发生化学反应, 所以把它们放在同一个容器是很危险的. 这些化学药品被标记成 $c_1, c_2, \cdots, c_8$. 下面列出的是与某个给定药品能够发生反应的其他药品名称:

$c_1 : c_2, c_5, c_6$ $c_2 : c_1, c_3, c_5, c_7$ $c_3 : c_2, c_4, c_7$

$c_4 : c_3, c_6, c_7, c_8$ $c_5 : c_1, c_2, c_6, c_7, c_8$ $c_6 : c_1, c_4, c_5, c_8$

$c_7 : c_2, c_3, c_4, c_5, c_8$ $c_8 : c_4, c_5, c_6, c_7$

运送这些化学药品所需的最少运费是多少? 这些化学药品应该如何放置于那些容器中?

10.12 图 10.14 所示的路口需要一个交通信号灯来调节车流. 如果来自两个不同车道上的车辆会产生碰撞, 那么这两个车道上的车辆就不允许同时进入路口. 为了确保安全通车, 则最少需要多少个信号相位?

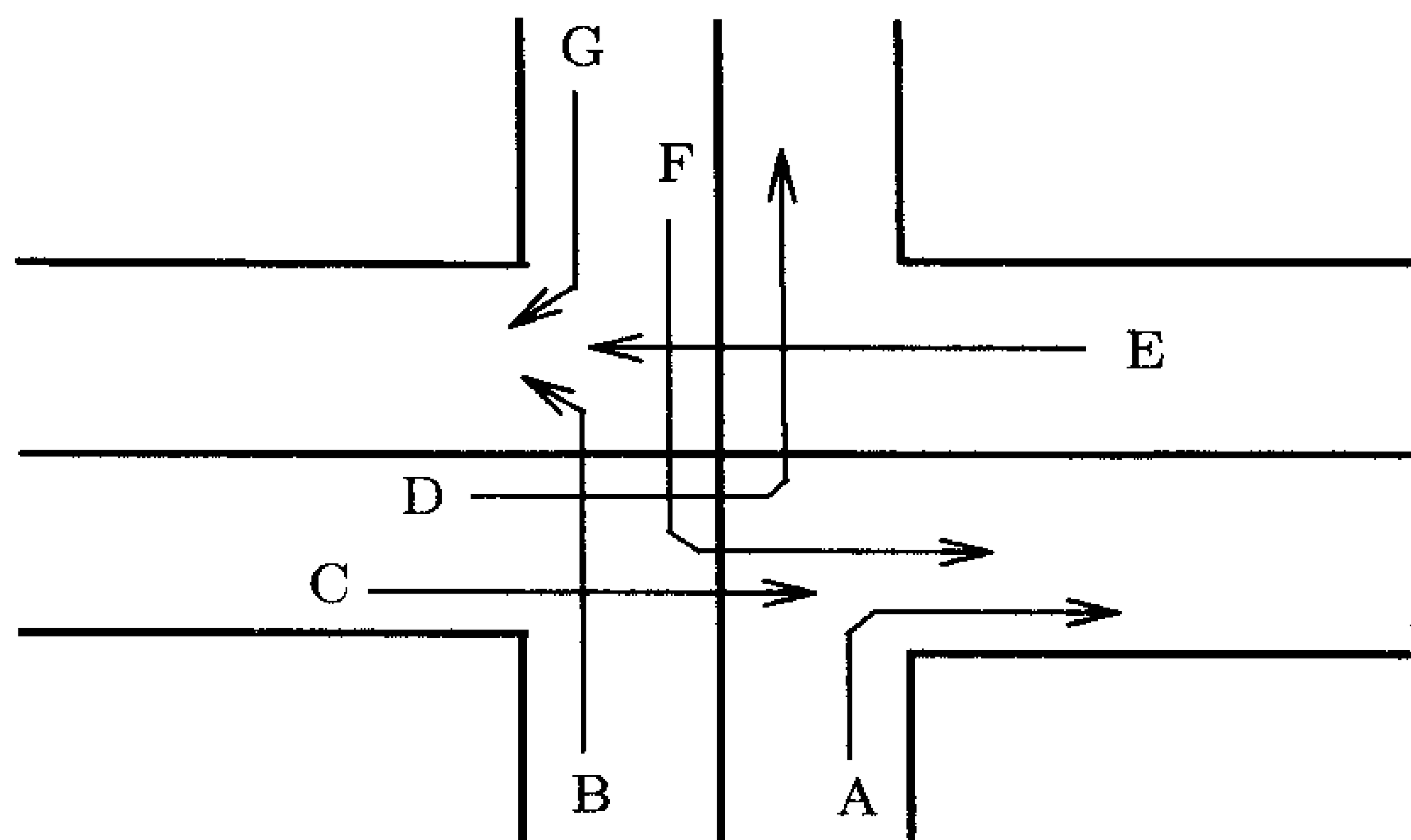



图 10.14 习题 10.12 中路的交叉口

10.13 设一个 $n$ 阶图 $G$ 满足 $\chi(G) = \beta(G) = k$, 其中 $\beta(G)$ 是 $G$ 的独立数; 而且, 对于 $G$ 的每一个 $k$ 染色, 都存在把 $V(G)$ 划分为色类的唯一划分, 使得不同的色类具有不同的基数. 证明: $\Delta(G) = n - 1$, 其中 $\Delta(G)$ 是 $G$ 的最大度.

10.14 对于图类 $\mathcal{F}$, 定义 $\chi(\mathcal{F})$ 为 $\mathcal{F}$ 中所有图 $G$ 的色数 $\chi(G)$ 的最大值 (如果最大值存在). 图类 $\mathcal{G}$ 是由所有阶为 $n$, 边数为 $m$ ($m \leqslant 4n - 4$) 的图 $G$ 构成, 并具有如下性质: 若 $G \in \mathcal{G}$, 且 $H$ 为 $G$ 的一个诱导子图, 则 $H \in \mathcal{G}$. 请确定 $\chi(\mathcal{G})$. [提示: 首先根据 $\chi(G) \leqslant 1 + \max\{\delta(H)\}$, 其中 max 取遍 $G$ 的所有诱导子图, 确定 $\chi(\mathcal{G})$ 的一个上界.]

10.15 设 $A$ 是一个基数为 $n \geqslant 1$ 的集合, 不妨设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 设 $S$ 为 $A$ 的若干元素对构成的集合. 考虑具有如下性质的函数 $f : A \to \mathbf{N}$, 要求 $S$ 的每个元素对中的两个元素都有不同的像. 在所有满足上述性质的函数中, 设 $g$ 是值域基数最小的函数. 该问题是如何与图论问题相关联呢?

10.16 设 $G$ 是一个连通图.

(a) 设 $u \in V(G)$. 是否存在一个最小染色 $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 使得 $c(u) = 1$?

(b) 设 $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$. 是否存在一个最小染色 $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 使得 $c(u) = 1$, $c(v) = 2$?

(c) 设 $u, v \in V(G)$, $uv \notin E(G)$. 是否存在一个最小染色 $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 使得 $c(u) = c(v) = 1$?

(d) 设 $u, v \in V(G)$, $uv \notin E(G)$. 是否存在一个最小染色 $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 使得 $c(u) = 1$, $c(v) = 2$?

## 10.3 边 染 色

除了给地图的区域以及图的顶点染色之外, 给图的边进行染色也是很有趣的. 非空图 $G$ 的一个**边染色 (edge coloring)**是指给 $G$ 的边分配颜色, 每条边分配一种颜色, 使得邻接的边分配不同的颜色. 对 $G$ 的边染色所需的最少颜色数称为是**边色数 (edge chromatic number)**(有时也称为是**色指数 (chromatic index)**), 记为 $\chi_1(G)$. 应用 $k$ 种颜色的边染色称为是 $k$**边染色 (edge coloring)**. 图 10.15 所示的是图 $G$ 的一个 4 边染色.

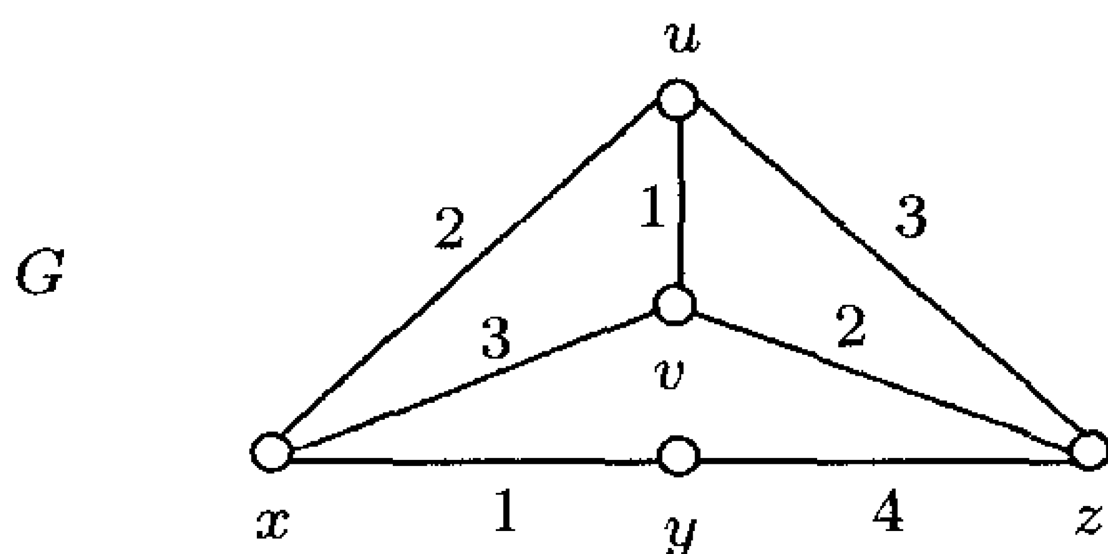



图 10.15 图的一个 4 边染色

设图 $G$ 含有一个顶点 $v$, 且 $\deg v = k \geqslant 1$. 因此, 存在 $k$ 条与 $v$ 相关联的边. 由此可以得到, $\chi_1(G) \geqslant \deg v = k$. 特别地, 对于任一非空图 $G$, 都有

$$\chi_1(G) \geqslant \Delta(G).$$

**例 10.11** 图 10.15 中图 $G$ 的边色数为 4.

**解** 对于图 10.15 中的图 $G$, $\Delta(G) = 3$, 所以 $\chi_1(G) \geqslant 3$. 因为图 10.15 列出了 $G$ 的一个 4 边染色, 所以有 $\chi_1(G) \leqslant 4$. 因此, $\chi_1(G) = 3$ 或者 $\chi_1(G) = 4$. 但哪一个是 $G$ 的边色数呢? 我们接下来证明 $\chi_1(G) = 4$.

假设存在 $G$ 的一个 3 边染色, 不妨设所用的颜色为 1, 2, 3. 每个度为 3 的顶点都会与染色为 1, 2, 3 的边关联. 特别地, 与 $u$ 关联的 3 条边分别染了 1, 2, 3. 不失一般性, 我们假设 $uv$ 染了 1, $ux$ 染了 2, $uz$ 染了 3. 由于 $vx$ 同时与 $uv$ 和 $ux$ 邻接, 所以 $vx$ 必须染成 3. 类似地, $vz$ 必须染成 2. 由于 $xy$ 同时与 $ux$ 和 $vx$ 邻接, 所以

$xy$ 必须染成 1. 类似可得, $yz$ 必须染成 1. 然而, $xy$ 和 $yz$ 是都染成 1 的邻接边, 导致矛盾. 所以, $\chi_1(G) = 4$. ◇

对于图 10.15 中图 $G$, 我们现在知道 $\chi_1(G) = 1 + \Delta(G)$. 当然, 我们已经知道了 $\chi_1(G) \geqslant \Delta(G)$; 这个不等式对于所有的非空图均成立. 那么在边染色方面, 我们应该考虑哪些基本性的定理呢? Vadim G. Vizing 证明了, 若知道图的最大度 (这是很容易确定的), 则我们已接近于弄清该图的边色数了. 由于 Vizing 定理的证明十分复杂, 我们在此略去证明.

**定理 10.12(Vizing 定理)** 对于任一非空图 $G$,

$$\chi_1(G) = \Delta(G) \text{ 或者 } \chi_1(G) = 1 + \Delta(G).$$

Vadim Vizing 于 1937 年 3 月 25 日出生在乌克兰的基辅. 第二次世界大战之后, 由于他的母亲有一半德国血统, 所以他的家庭被迫迁到 (西伯利亚的) 新西伯利亚地区. 1954 年, 他开始在托木斯克大学学习数学, 并于 1959 年毕业. 此后, 他被保送到著名的斯特克罗夫研究所 (位于莫斯科) 攻读博士学位. 他的研究方向是函数逼近论, 但这并不是他的兴趣所在. 由于他转变研究方向的申请没有被通过, 所以他没有完成学位, 并于 1962 年回到新西伯利亚. Vizing 随后到 Academgorodoc 市的科学院数学所学习, 在那里他并没有一个正式的导师, 但在 Alexander Zykov 的帮助下于 1966 年获得了博士学位. 和大多数的数学家一样, Vizing 在音乐、书籍以及国际象棋等方面都有一定的兴趣.

在新西伯利亚, Vizing 开始研究一个关于电网络中电线染色问题. 当他研究此问题时, 他开始对更多的理论问题感兴趣. 他证明了以他名字命名的著名定理 (定理 10.12). 这篇论文投到了声望很高的杂志*Doklady*, 但仅仅因为审稿人认为此问题无趣而遭到拒绝. 该文章最终于 1964 年发表在新西伯利亚的当地杂志*Metody Diskretnogo Analiza*上. 当该文发表出来时, 这个结果已经很出名了, 主要是由于 Zykov 已向他人提到该结果. 当 Vizing 被问到是什么原因使得一个数学结果变得如此显著时, 他答到:

> 一名数学家应该不断地研究与发现新结果, 然后让时间来决定什么是重要的, 什么是不重要的!

根据 Vizing 定理, 每个非空图的边色数都是上述的两个值之一. 我们从圈开始, 考虑一些常见的图. 对于每个圈 $C_n$ $(n \geqslant 3)$, 都有 $\Delta(C_n) = 2$; 因此, $\chi_1(C_n) = 2$ 或者 $\chi_1(C_n) = 3$. 若 $n$ 是偶数, 则交替使用颜色 1 和 2 对 $C_n$ 的边染色, 即可获得一个边染色. 另一方面, 若 $n$ 是奇数, 若交替使用颜色 1 和 2 对 $C_n$ 的边染色, 则 $C_n$ 的最后一条边将与第一条边所染的颜色相同. 由于这两条边是邻接的, 得到矛盾. 因此, 如果 $n \geqslant 3$ 是奇数, 那么 $\chi_1(C_n) = 3$. 图 10.16 所示的是一些圈的边染色.

对边染色做一些简单的考察是有用的. 给定 $n$ 阶图 $G$ 的一个边染色, 则任意两

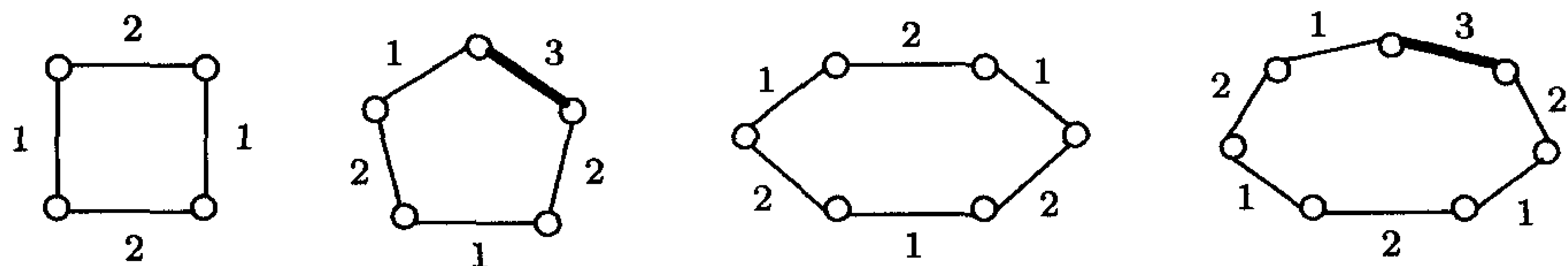



图 10.16 圈的边染色

条相同颜色的边都是不邻接的. 这说明, $G$ 中染成相同的颜色的边不可能多于 $n/2$ 条. 因此, 若 $n$ 是奇数, 则染色相同的边的条数不超过 $(n-1)/2$. 特别地, 对于图 $C_n$, 其中 $n \geqslant 3$ 是奇数, 染成相同的颜色的边不多于 $(n-1)/2$ 条, 并且用两种颜色染色的边不多于 $(n-1)/2+(n-1)/2=n-1$ 条边. 这说明若 $n \geqslant 3$ 是奇数, 则 $\chi_1(C_n) \geqslant 3$.

上面的考察为我们提供了下面一个更一般的结果.

**定理 10.13** 设 $G$ 是一个阶为 $n$, 边数为 $m$ 的图. 若

$$m > \frac{(n-1)\Delta(G)}{2},$$

则 $\chi_1(G)=1+\Delta(G)$.

**证** [直接证法] 在 $G$ 的任一染色中, 染相同颜色的边不多于 $(n-1)/2$ 条. 因此, 用 $\Delta(G)$ 种颜色染色的边不多于 $(n-1)\Delta(G)/2$ 条. 由于 $m>(n-1)\Delta(G)/2$, 所以推知 $\chi_1(G)>\Delta(G)$. 由 Vizing 定理, $\chi_1(G) \leqslant 1+\Delta(G)$, 所以 $\chi_1(G)=1+\Delta(G)$. ■

或许你已经发现, 确定图 $G$ 的边色数其实与下面的做法是相同的: 把 $G$ 的边集划分为个数最少的边独立集 (匹配), 或者把 $G$ 分解为个数最少的 1 正则子图. 如果上述分解中的每一个 1 正则子图都是 $G$ 的生成子图, 那么我们想知道 $G$ 是否可 1 因子分解. 因此, 图的边色数和我们在第 8 章所讨论的若干问题存在着紧密联系. 正如图的 1 因子分解, 图的边染色可以应用于安排问题.

**例 10.14** Alvin (A) 曾邀请 3 对夫妇到他的避暑别墅住一个星期, 他们是 Bob (B) 和 Carrie (C) Hanson, David (D) 和 Edith (E) Irwin, Frank (F) 和 Gena (G) Jackson. 由于这 6 位客人都喜爱网球运动, 所以他决定进行一些网球比赛. 6 位客人中的每一位都要与其配偶之外的每位客人比赛. 另外, Alvin 将分别与 David, Edith, Frank, Gena 进行一场比赛. 若没有人在同一天进行两场比赛, 则要在最少天数内完成比赛, 该如何安排?

**解** 首先构造一个图 $H$, 其顶点为住在 Alvin 的避暑别墅的人, 因此, $V(H)=\{A, B, C, D, E, F, G\}$, $H$ 中的两个顶点是邻接的, 如果这两个顶点 (人) 需要进行一场比赛. (图 10.17 已给出图 $H$.) 为了解答这个问题, 我们需要确定 $H$ 的边色数.

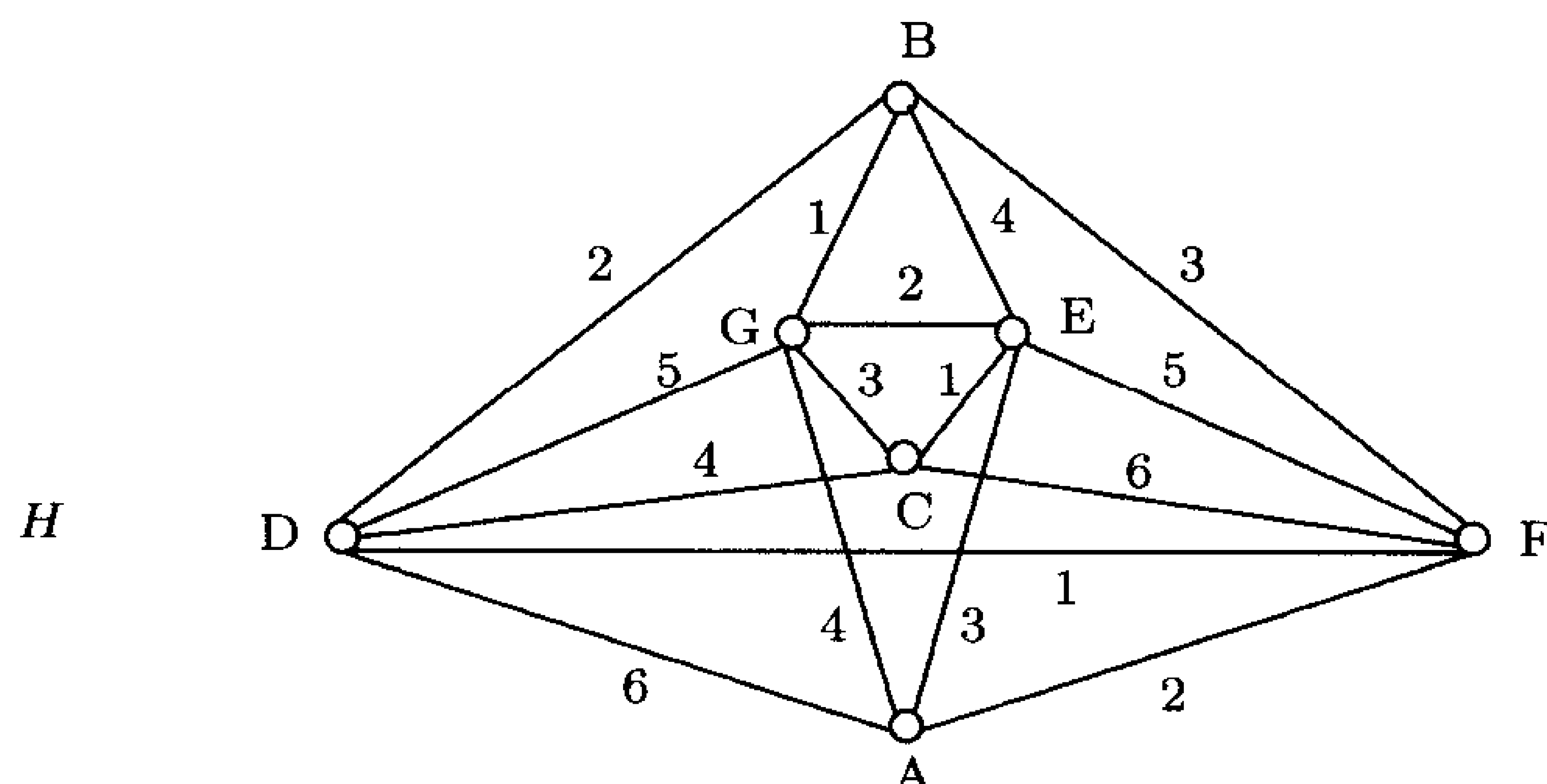



图 10.17　例 10.14 中的图 $H$

易见, $\Delta(H)=5$. 根据定理 10.12, $\chi_1(H)=5$ 或者 $\chi_1(H)=6$. 此外, $H$ 的阶为 $n=7$, 边数为 $m=16$. 由于

$$m=16>15=\frac{(7-1)\times 5}{2}=\frac{(n-1)\Delta(H)}{2},$$

由定理 10.13, 可知 $\chi_1(H)=6$. 图 10.17 列出了 $H$ 的一个 6 边染色, 从而也给出了一个具有最少天数 (6 天) 的时间安排表.

第 1 天：　Bob-Gena, Carrie-Edith, David-Frank
第 2 天：　Alvin-Frank, Bob-David, Edith-Gena
第 3 天：　Alvin-Edith, Bob-Frank, Carrie-Gena
第 4 天：　Alvin-Gena, Edith-Frank Carrie-David
第 5 天：　David-Gena, Edith-Frank
第 6 天：　Alvin-David, Carrie-Frank

◇

我们现在考察正则图的边色数. 根据 Vizing 定理, 若 $G$ 是一个 $r$ 正则图 $(r\geqslant 1)$, 则 $\chi_1(G)=r$ 或者 $\chi_1(G)=r+1$. 而且, $\chi_1(G)=r$ 当且仅当 $G$ 是可 1 因子分解的. 一般地,

*一个 $r$ 正则图 $G$ $(r\geqslant 1)$ 具有边色数 $r$ 当且仅当 $G$ 是可 1 因子分解的.*

下面考虑完全图的边染色. 显然, $\chi_1(K_2)=1=\Delta(K_2)$. 由于 $K_3=C_3$, 所以 $\chi_1(K_3)=3=1+\Delta(K_3)$. 如图 10.18 所示的边染色, $\chi_1(K_4)=3$.

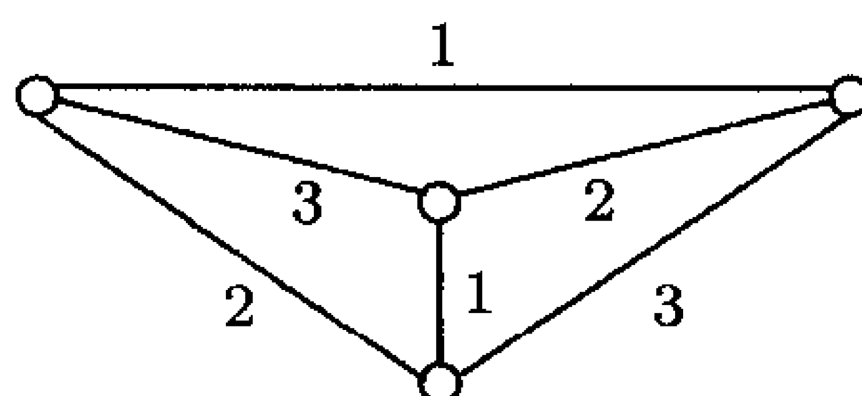



图 10.18　$K_4$ 的一个边染色

由于 $K_n$ 是 $(n-1)$ 正则的, 因而 $\chi_1(K_n)=n-1$ 或者 $\chi_1(K_n)=n$. 而且,

$\chi_1(K_n) = n - 1$ 当且仅当 $K_n$ 是可 1 因子分解的. 不难发现, 该情形只能在 $n$ 为偶数时才能发生.

**定理 10.15** 对于 $n \geqslant 2$ 的每个整数,

$$\chi_1(K_n) = \begin{cases} n, & \text{若 } n \text{ 是奇数} \\ n-1, & \text{若 } n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

现在考虑另一个安排问题.

**例 10.16** 有 5 个人被邀请去参加桥牌比赛, 他们分别是 Allen (A), Brian (B), Charles (C), Doug (D), Ed (E). 桥牌比赛是在两个 2 人组之间进行的. 每个 2 人组 {X, Y}都与其他 2 人组 {W, Z} 比赛, 显然, W 与 Z 不可能是 X 或 Y. 若每个队在同一天不能有多于一次的比赛, 则最少需要多少天即可完成所有的比赛? 并建立相应的时间安排表. 该为此情形建立什么样的图模型?

**解** 我们构造图 $G$, 其顶点集由所有 2 人组构成, 且用 XY, 而不是 {X, Y}, 表示一个顶点. 在 $G$ 中, 两个顶点 (2 人组) XY 和 WZ 是邻接的, 如果他们将进行桥牌比赛. 图 $G$ 已在图 10.19 中给出. 可以发现 $G$ 同构于 Petersen 图.

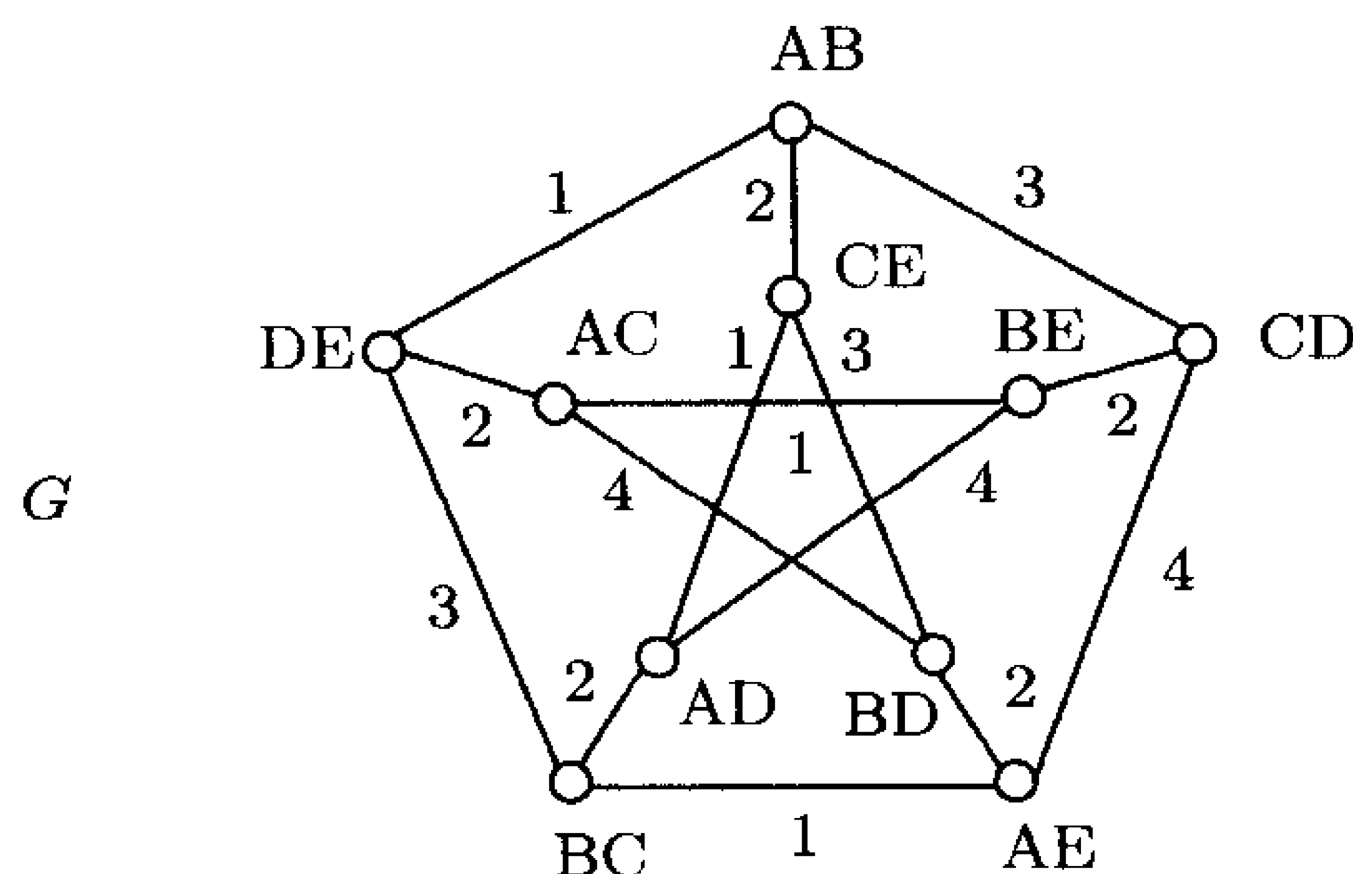



图 10.19 例 10.16 中的图

我们现在确定 $G$ 的边色数. 由于 $G$ 是 3 正则的, 所以 $\chi_1(G) = 3$ 当且仅当 $G$ 是可 1 因子分解的. 然而, 正如 Petersen 自己所指出的, $G$ 不是可 1 因子分解的. 因此, $\chi_1(G) = 4$. 图 10.19 所示的是 $G$ 的一个 4 边染色. 从而可构造一个在最少 4 天内完成比赛的时间表:

第 1 天: AB-DE, AE-BC, AC-BE, AD-CE

第 2 天: AB-CE, AC-DE, AE-BD, AD-BC, BE-CD

第 3 天: AB-CD, BC-DE, BD-CE

第 4 天: AC-BD, AD-BE, AE-CD

◇

我们已经知道, 若 $n \geqslant 4$ 是偶数, 则 $\chi_1(C_n) = \Delta(C_n)$. 显然, 若 $n \geqslant 4$ 是偶数,

则 $C_n$ 是二部图. Denés König 发现, 对于每个二部图, $\chi_1(G) = \Delta(G)$. 此结果有多种不同的证明方法. 下面所给的证明将用到了这样一个事实, 即每个 $r$ 正则二部图 $(r \geqslant 1)$ 都是可 1 因子分解的 (定理 8.15). 该证明类似于定理 2.7 的证明.

**定理 10.17(König 定理)** 若 $G$ 是一个非空二部图, 则

$$\chi_1(G) = \Delta(G).$$

**证** [直接证法] 假设 $\Delta(G) = r \geqslant 1$. 首先, 我们证明, 存在含 $G$ 作为子图的 $r$ 正则二部图 $H$. 若 $G$ 是 $r$ 正则的, 结论显然成立, 此时, 设 $H = G$ 即可. 因此, 我们假设 $\delta(G) < r$. 设 $G$ 的部集为 $U_0$ 和 $W_0$. 设 $G'$ 为 $G$ 的一个拷贝, 且在 $G'$ 中, 用 $U_0'$ 代替 $U_0$, 用 $W_0'$ 代替 $W_0$. 把 $G$ 中每个度小于 $r$ 的顶点都连接到 $G'$ 中与其相应的顶点, 得到一个二部图 $G_1$, 其部集为 $U_1 = U_0 \cup W_0'$ 和 $W_1 = W_0 \cup U_0'$, 且 $\delta(G_1) = \delta(G) + 1$. 若 $G_1$ 是 $r$ 正则, 则 $H = G_1$ 即为所需. 若 $\delta(G_1) < r$, 则设 $G_1'$ 为 $G_1$ 的一个拷贝, 在 $G_1'$ 中, 用 $U_1'$ 代替 $U_1$, 用 $W_1'$ 代替 $W_1$. 把 $G_1$ 中每个度小于 $r$ 的顶点都连接到 $G_1'$ 中与其相应的顶点, 得到一个二部图 $G_2$, 其部集为 $U_2 = U_1 \cup W_1'$ 和 $W_2 = W_1 \cup U_1'$, 并使得 $\delta(G_2) = 2 + \delta(G)$. 继续上述操作, 直至获得一个 $r$ 正则二部图, 此时, 设 $H = G_k$.

根据定理 8.15, $H$ 是可 1 因子分解的, 因此含有 $r$ 个 1 因子 $F_1', F_2', \cdots, F_r'$. 对于 $1 \leqslant i \leqslant r$, 设 $F_i$ 为 $G$ 的 1 正则子图, 其中 $E(F_i) = E(F_i') \cap E(G)$. 则 $F_1, F_2, \cdots, F_r$ 为 $G$ 的边色类, 所以 $\chi_1(G) \leqslant r$. 由于 $\Delta(G) = r$, 所以 $\chi_1(G) \geqslant r$, 从而, $\chi_1(G) = r$. ■

对于图边染色的兴趣可能也是由四色问题引起的. 我们已经知道, 地图的区域染色等价于某个连通平面图 (该地图的对偶) 的顶点染色. 可以肯定, 图染色研究是由四色问题所激发和推动. 虽然 Alfred Bray Kempe 对四色定理的 "证明" 是不正确的, 但它还是包含了一些重要的想法, 这些想法后来得到了推广, 并最终导致了该定理的一个正确证明. 正如前面所提到的, 另一名数学家 Peter Guthrie Tait 也给出了四色定理的一个错误的证明. 但是, 他也提出了一些有趣的想法, 这些想法引出了一些新的研究领域.

一个**三度地图 (cubic map)**是指一个连通的, 3 正则的, 无割边的平图. Tait 发现, 若所有三度地图的区域都能够用 4 种或者更少的颜色来染色, 则所有平面图的区域就能够用 4 种或者更少的颜色来染色. 当然, 考虑其中顶点度仅为 1 或 2 的地图 (平面图) 是没什么意义的. 如果一个平图 $H$ 含有度至少为 4 的顶点, 则可以通过下面方式由 $H$ 构造出一个三度地图 $G$, 在每个度大于或等于 4 的顶点处画一个充分小的圈 $C$, 与 $v$ 关联的每条边和 $C$ 的交点都看成一个新的顶点, 删去 $v$ 以及与其关联的边; 见图 10.20(a). 此时, 若所得的三度地图 $G$ 能够用 4 种或者更少的颜色来染色, 则该染色可以诱导出 $H$ 区域的一个 (用 4 种或者更少颜色的) 染色; 见图 10.20(b).

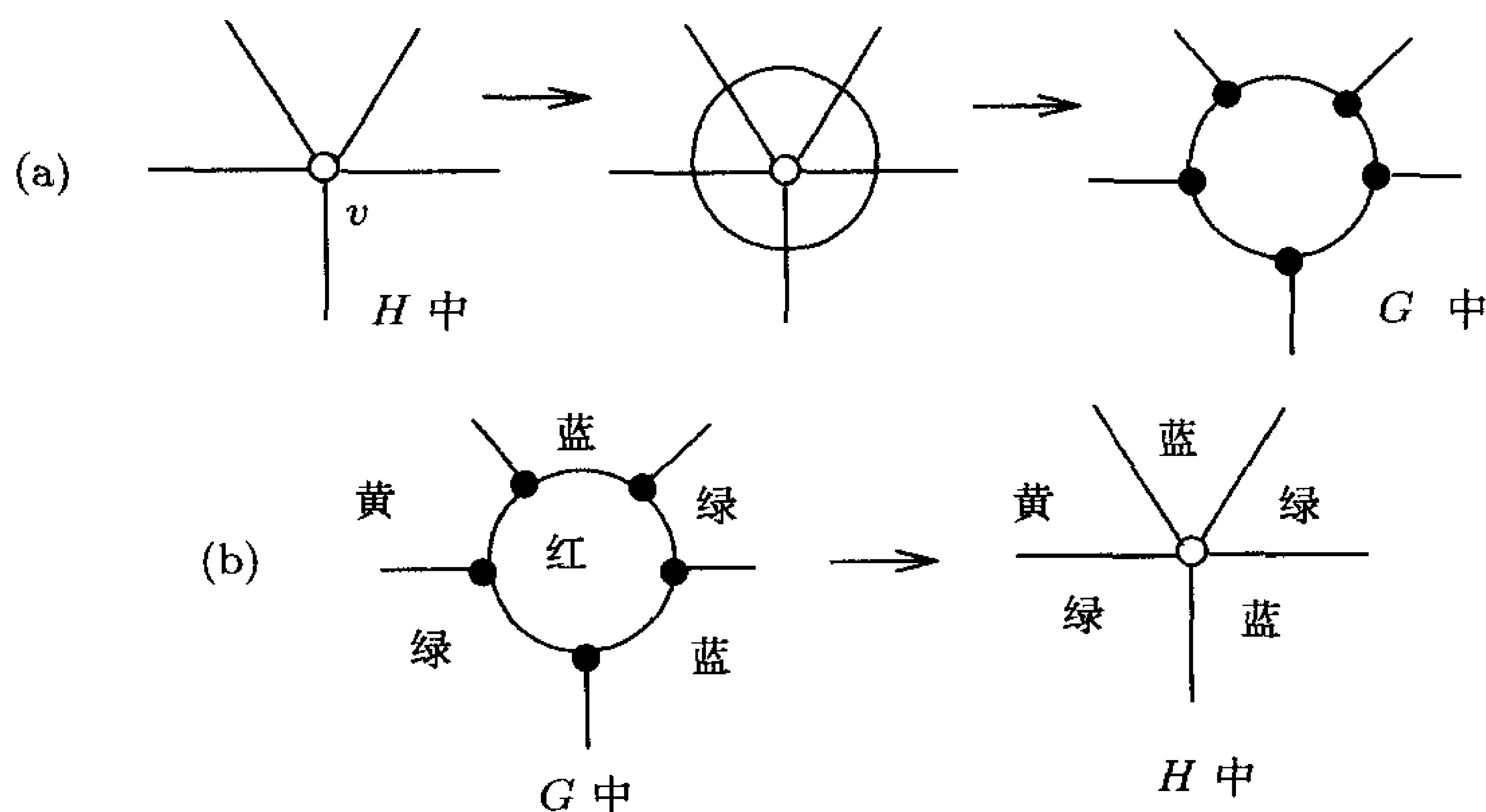



图 10.20 三度地图的区域染色

当然, 如果能证明每个三度地图都能够用 4 种或者更少的颜色来染色, 对三度地图 (而不是任意的地图) 的讨论是非常有趣的. Tait 证明了如下结论.

**定理 10.18** *三度地图 $G$ 的区域能够用 4 种或者更少的颜色来染色当且仅当 $\chi_1(G)=3$.*

实际上, 3 正则图的 3 边染色也称为是**Tait 染色**. 每个 3 正则图 $G$ 都有偶数阶, 并且如果 $G$ 是 Hamilton 的, 则 Hamilton 圈 $C$ 的边可以交替地染成 (不妨设为) 红色和蓝色. 移除这些边可以得到一个 1 因子, 其中的边可以染成 (不妨设为) 绿色. Tait 证明了, 若所有 3 连通且 3 正则的平面图都是 3 边可染色的, 则所有三度地图也都是 3 边可染色的. 根据定理 10.18, 为了证明四色定理, 只要证明每个 3 连通且 3 正则的平面图都具有边色数 3 就足够了. 显然, 若每个 3 连通的且 3 正则的平面图都是 Hamilton 的, 则证明就完成了. 由于 Tait 相信这些图都是 Hamilton 的, 所以就深信自己已经证明了四色定理. 虽然 Tait 的 “证明” 的缺点最终被指出, 但直到 1946 年, William Tutte 才给出一个非 Hamilton 的 3 连通且 3 正则的平面图; 见图 10.21.

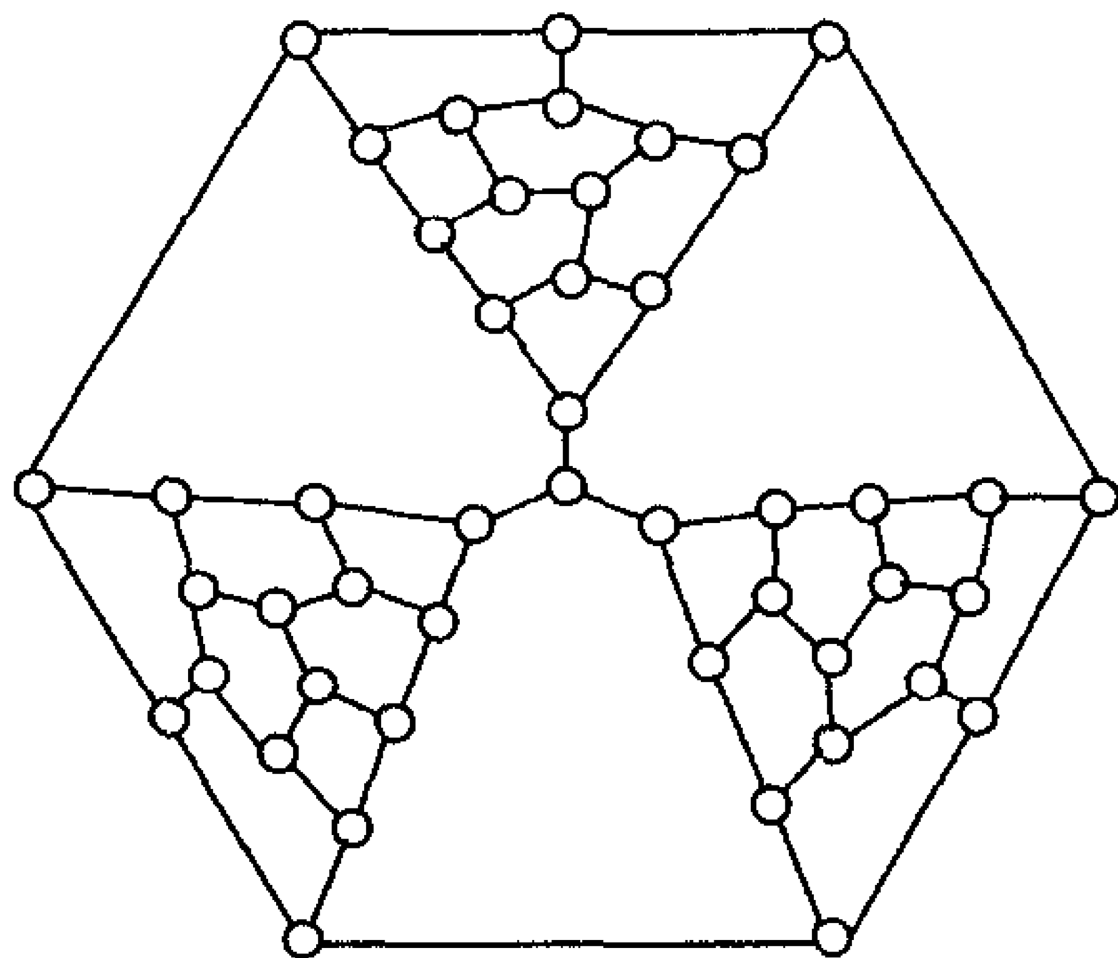


图 10.21 Tutte 图

## 习题

10.17 确定习题 10.1 中每个图的边色数.

10.18 对于正整数 $k$, 设 $H$ 是一个阶为 $4k+1$ 的 $2k$ 正则图. 设 $G$ 是由 $H$ 通过移除 $k-1$ 条相互独立的边所获得的图. 证明：$\chi_1(G)=\Delta(G)+1$.

10.19 来自亚特兰大、波士顿、芝加哥、丹佛、路易维尔、迈阿密、以及纳什维尔的 7 支垒球队受邀请参加比赛, 其中每支队都被安排与一些其他队比赛 (如下所示). 每支队在同一天最多只能进行一场比赛. 建立一个具有最少天数的比赛时间表.

| | |
|---|---|
| 亚特兰大： | 波士顿, 芝加哥, 迈阿密, 纳什维尔 |
| 波士顿： | 亚特兰大, 芝加哥, 纳什维尔 |
| 芝加哥： | 亚特兰大, 波士顿, 丹佛, 路易维尔 |
| 丹佛： | 芝加哥, 路易维尔, 迈阿密, 纳什维尔 |
| 路易维尔： | 芝加哥, 丹佛, 迈阿密 |
| 迈阿密： | 亚特兰大, 丹佛, 路易维尔, 纳什维尔 |
| 纳什维尔： | 亚特兰大, 波士顿, 丹佛, 迈阿密 |

10.20 设 $G$ 是一个具有部集 $U$ 和 $W$ 的二部图, 满足 $\Delta(G)=r\geqslant 1$ 与 $\delta(G)<r$.

(a) 根据定理 8.15 证明：若存在一个含 $G$ 作为子图的 $r$ 正则二部图 $H$, 使得 $H$ 至少有一个部集是 $U$ 或 $W$, 则 $X_1(G)=\Delta(G)$. (由此, 对于上述图 $G$, 给出了 König 定理 10.17 的另一种证明.)

(b) 证明：未必要求 $H$ 为 $r$ 正则二部图, 使得 $H$ 含 $G$ 作为一个子图, 且至少有一个部集是 $U$ 或 $W$.

## 10.4 延伸阅读：Heawood 地图染色定理

在前面已经提到, 在 19 世纪末的 11 年内 (1879—1890), 大家都认为 Alfred Bray Kempe 已经证明了四色定理. 但在 1890 年, 这一切都改变了, 因为 Percy John Heawood 发现了 Kempe 在应用颜色互换方法 (即 Kempe 链) 时犯了一个错误. Heawood 并非偶然读到 Kempe 的文章. 在 1878 年的伦敦数学会会议上, 当 Arthur Cayley 询问四色猜想的进展时, Henry Smith 正在主持该会议. Smith 是牛津大学几何学教授, 他准备在自己的讲座中讨论四色猜想. 不久之后, Heawood 成为 Smith 的一名学生, 他从 Smith 那里获悉猜想的有关情况后, 就开始对该问题产生了兴趣.

在其文章中, Heawood 提出了一个反例 (见图 10.22), 并不是 Kempe 所证明的命题 (四色定理) 的反例, 而是 Kempe 所给的证明的反例. 事实上, Kempe 证明的技巧性很强, Heawood 运用 Kempe 的技巧可证明：每张地图都能够用 5 种或者更少的颜色来染色. 我们已经知道, 这就等价于每个平面图都能够用 5 种或者更少的颜色来染色.

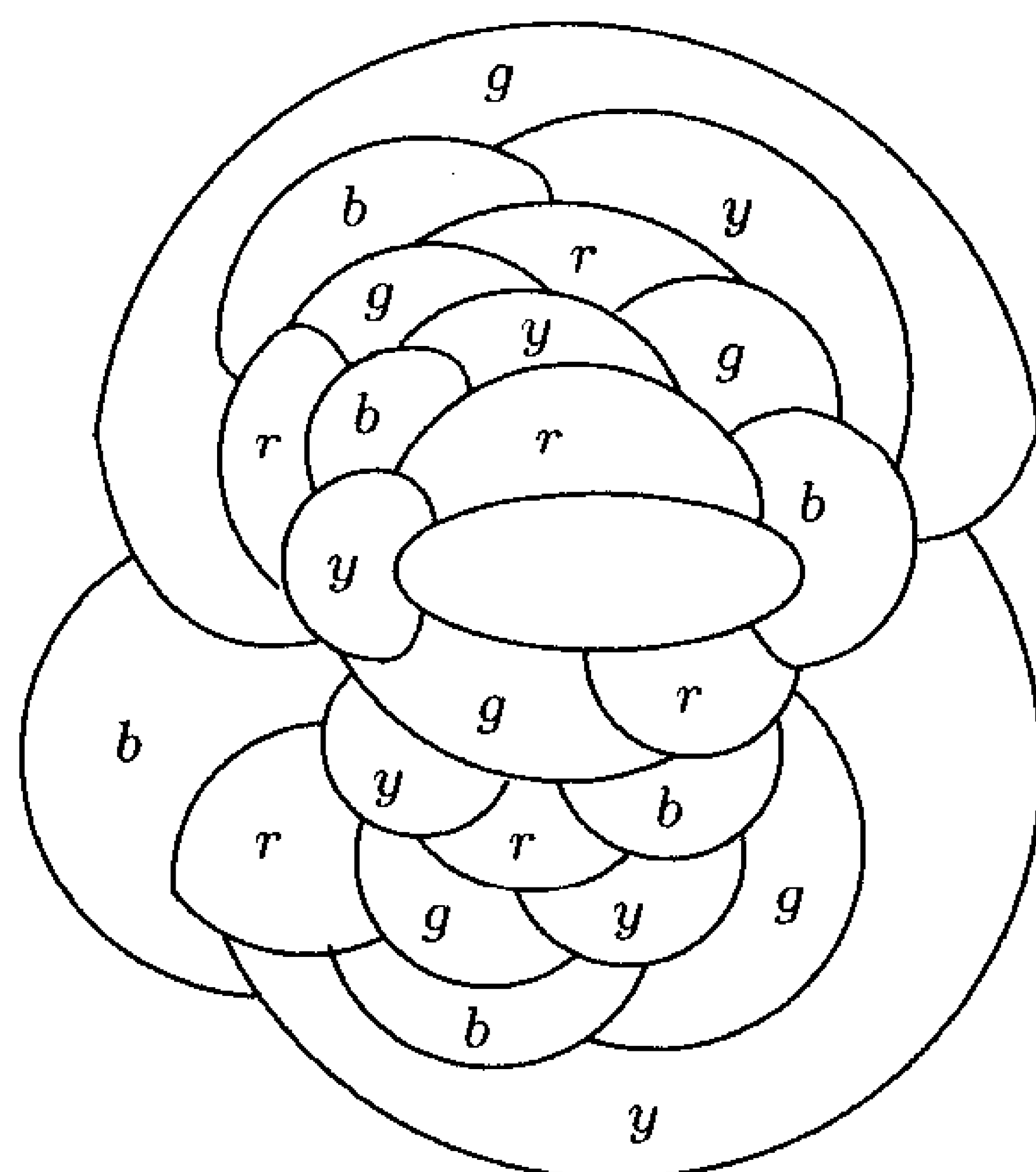



图 10.22 Kempe 证明的一个反例

**定理 10.19 (五色定理)** 每个平面图是 5 可染色的.

**证** [最小反例证法] 假设该命题是错的, 则在所有非 5 可染色的平面图中, 设 $G$ 是阶数最小的一个. 由于 $G$ 不是 5 可染色的, 所以 $G$ 的阶至少为 6.

由推论 9.3 可知, 每个平面图的最小度都不会超过 5. 设 $v$ 为 $G$ 的一个满足 $\deg v = \delta(G)$ 的顶点. 因此, $\deg v \leqslant 5$. 显然, 图 $G - v$ 是平面的. 由于 $G - v$ 的阶小于 $G$ 的阶, 所以图 $G - v$ 是 5 可染色的. 给定 $G - v$ 的一个 5 染色. 若 $\deg v \leqslant 4$, 或者 $\deg v = 5$ 且对 $v$ 的邻点染色的颜色数小于 5, 则在这 5 种颜色中, 必有一种可给 $v$ 染色. 根据上述讨论, 可以得到 $G$ 的一个 5 染色, 导致矛盾. 因此, 我们可以假设 $\deg v = 5$, 并且所有的 5 种颜色都已用来为 $v$ 的邻点染色. 我们把这种情形在图 10.23 中画出来.

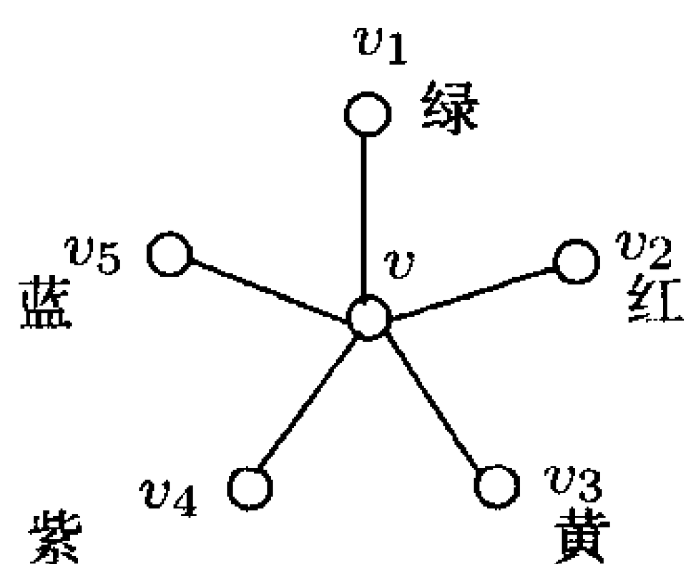



图 10.23 定理 10.19 证明中的一个步骤

假设 $G - v$ 不含顶点都染成红色或蓝色的 $v_2 - v_5$ 路 (所以在 $G - v$ 中, 不存在同时包含 $v_2$ 和 $v_5$ 的红 – 蓝 Kempe 链). 在此情形下, 设 $S$ 为通过红 – 蓝路连接到 $v_5$ 的 ($G - v$ 中) 所有红色和蓝色顶点的集合. 显然, $v_5 \in S$, 但根据假设, $v_2 \notin S$. 互换 $S$ 中顶点的颜色. 因此, $v_5$ 此时染成了红色, 而 $v_2$ 仍然是红色. 从而可以把 $v$

染成蓝色, 这样就得到 $G$ 的一个 5 染色, 导致矛盾. 所以, $G-v$ 必有一条从 $v_2$ 到 $v_5$ 的红 – 蓝路.

由于 $G-v$ 含有一条从 $v_2$ 到 $v_5$ 的红 – 蓝路, 所以不存在从 $v_1$ 到 $v_3$ 的绿 – 黄路. 设 $S'$ 为通过绿 – 黄路连接到 $v_1$ 的 ($G-v$ 中) 绿色和黄色顶点的集合. 则 $v_1 \in S'$, 但 $v_3 \notin S'$. 互换 $S'$ 中顶点的颜色, 则 $v_1$ 被染成黄色, 但这并没有改变 $v_3$ 的颜色. 此时, 绿色可以用来给 $v$ 染色. 把 $v$ 染成绿色, 就可以得到 $G$ 的一个 5 染色, 导致矛盾. ■

Heawood 的文章不仅指出了 Kempe 的错误, 而且也给出了五色定理的一个证明. 然而他并没有停留于此. Heawood 继续考虑着其文章中的其他一些想法. Heawood 文章的主要后续成果是针对于可嵌入到球面的图的最大色数问题的. Heawood 同时也把注意力转到其他曲面上图的色数确定问题上.

对于非负整数 $k$, 设

$$\chi(S_k) = \max\{\chi(G)\},$$

其中 max 取遍嵌入到 $S_k$ 的所有图 $G$. 自 Kempe 的 1879 年的文章之后, 大家都相信 $\chi(S_0) = 4$. 而在 Heawood 的 1890 年的文章之后, 仅知道 $\chi(S_0) = 4$ 或 $\chi(S_0) = 5$. 1976 年, 当 Appel 和 Haken 宣布其成果之后, 确定了 $\chi(S_0) = 4$ (四色定理). 在 Heawood 的 1890 年的文章中, 他试图获得关于 $\chi(S_k)$ 的一个公式, 其中 $k$ 为正整数; 事实上, 他认为他已经做到了. 然而, 他所做的仅是获得了 $\chi(S_k)$ 的一个上界.

**定理 10.20** 对每个正整数 $k$,

$$\chi(S_k) \leqslant \frac{7+\sqrt{1+48k}}{2}.$$

**证** [直接证法] 设 $G$ 为可嵌入到 $S_k$ 的一个图, 并且设

$$h = \frac{7+\sqrt{1+48k}}{2}.$$

由 $h$ 的定义, 可以证明

$$6 + \frac{12(k-1)}{h} = h - 1.$$

(后面会用到这个结果.) 下面证明 $\chi(G) \leqslant h$.

在 $G$ 的所有诱导子图中, 设 $H$ 具有最大的最小度. 根据定理 10.9, 可以得到 $\chi(G) \leqslant 1 + \delta(H)$. 假设 $H$ 的阶为 $n$, 边数为 $m$. 若 $n \leqslant h$, 则 $\delta(H) \leqslant n-1$, $\chi(G) \leqslant n \leqslant h$. 因此, 我们可以假设 $n > h$.

由于 $G$ 可以嵌入到 $S_k$, 所以 $H$ 也能够嵌入到 $S_k$. 因此, 由推论 9.11 可知,

$$k \geqslant \gamma(H) \geqslant \frac{m}{6} - \frac{n}{2} + 1.$$

易见, $m \leqslant 3n+6(k-1)$. 因此

$$n\delta(H) \leqslant \sum_{v\in V(H)} \deg v = 2m \leqslant 6n+12(k-1),$$

所以

$$\delta(H) \leqslant 6+\frac{12(k-1)}{n} \leqslant 6+\frac{12(k-1)}{h} = h-1.$$

从而

$$\chi(G) \leqslant 1+\delta(H) = h = \frac{7+\sqrt{1+48k}}{2},$$

结论成立. ■

根据定理 10.20, 可得 $\chi(S_1) \leqslant 7$. 为了证明 $\chi(S_1)=7$, 需要证明: 存在一个色数为 7 的且可嵌入到环面的图. 事实证明, 确实有这样的图, 即为 $K_7$ (如图 10.24 所示). 因此, 正如 Heawood 所证明的, 对于 $k=1$, $\chi(S_k)=\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48k}}{2}\right\rfloor$. 证明该公式对所有正整数 $k$ 成立又花费了 78 年. 通过考虑很多的情形以及很多的个别图, 终于完成了上述等式的证明. 数学家 Gerhard Ringel 和 Ted Youngs 对该公式的证明发挥了最主要的作用.

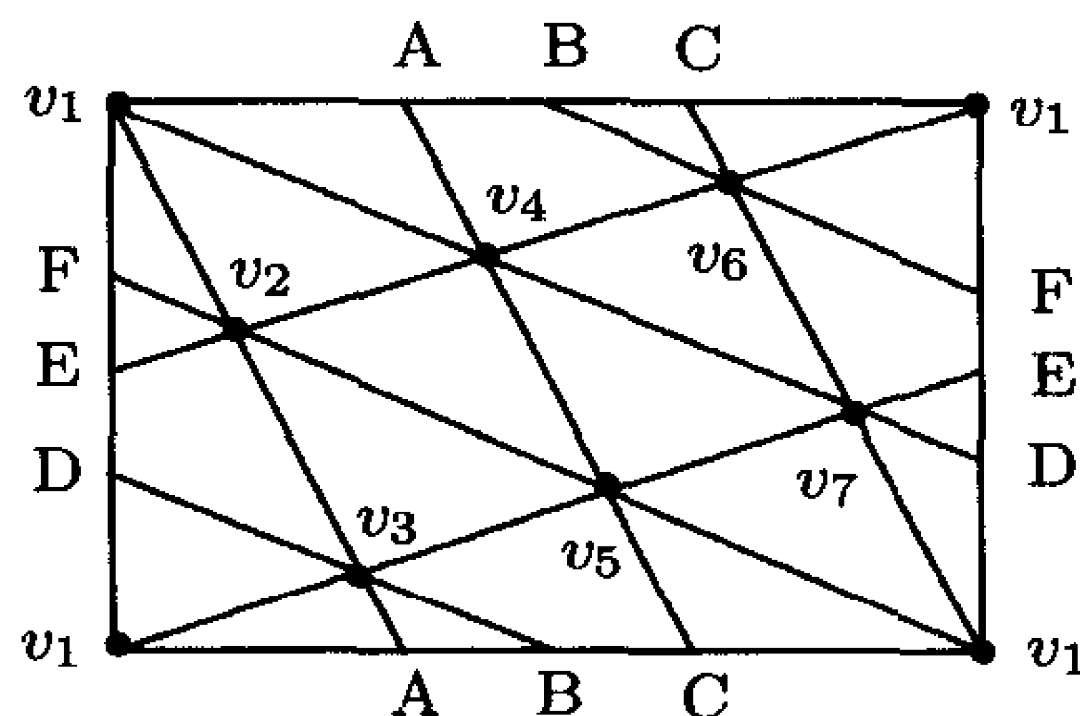



图 10.24 $K_7$ 在 $S_1$ 上的嵌入

**定理 10.21(Heawood 地图染色定理)** 对每个正整数 $k$,

$$\chi(S_k) = \left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48k}}{2}\right\rfloor.$$

**证** [直接证法] 根据定理 10.20, 可得 $\chi(S_k) \leqslant \frac{7+\sqrt{1+48k}}{2}$. 由于 $\chi(S_k)$ 是整数, 所以

$$\chi(S_k) \leqslant \left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48k}}{2}\right\rfloor.$$

为了证明 $\chi(S_k)=\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48k}}{2}\right\rfloor$，我们仅需证明：存在一个色数为 $\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48k}}{2}\right\rfloor$ 且能嵌入到 $S_k$ 的图. 现在就有一个很自然的候选图. 设

$$n=\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48k}}{2}\right\rfloor.$$

当然有

$$\chi(K_n)=n=\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48k}}{2}\right\rfloor. \tag{10.1}$$

接下来，我们证明 $K_n$ 能够嵌入到 $S_k$. 由定理 9.12,

$$\gamma(K_n)=\left\lceil\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\rceil.$$

根据 (10.1),

$$n\leqslant\frac{7+\sqrt{1+48k}}{2}$$

所以 $2n-7\leqslant\sqrt{1+48k}$. 从该不等式解出 $k$, 可得

$$k\geqslant\frac{(n-3)(n-4)}{12}.$$

由于 $k$ 是整数，所以

$$k\geqslant\left\lceil\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\rceil=\gamma(K_n),$$

也就是说，$K_n$ 的亏格至多为 $k$, 从而 $K_n$ 能够嵌入到 $S_k$. ■

我们发现，定理 10.21 的证明依赖于 $\gamma(K_n)$ 的一个公式. 这就是花费如此长的时间和如此多的努力而得到的结果. 结合定理 10.21 和四色定理，就可获得如下结论.

**推论 10.22** 对每个非负整数 $k$,

$$\chi(S_k)=\left\lfloor\frac{1+\sqrt{1+48k}}{2}\right\rfloor.$$

**习题**

10.21 证明：当 $k=0$ 时，定理 10.20 的证明是不成立的.

## 10.5 专题探索：局部染色

在图 $G$ 的标准染色中，$G$ 的每个顶点都分配了一种颜色 (不妨设为一个正整数)，并且满足邻接的顶点被分配不同的颜色. (对于不邻接的顶点，染色并无要求.) $G$ 的**色数** $\chi(G)$定义为 $G$ 的所有染色中所需颜色数的最小值.

如前所述, 图的色数可以用另外一种等价方式定义. 图 $G$ 的**染色**是一个函数 $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 具有性质: 对于 $G$ 的每对邻接的顶点 $u, v$, 都有 $c(u) \neq c(v)$. $G$ 的一个$k$ **染色**使用了 $k$ 种颜色. 定义 $G$ 的一个染色 $c$ 的**值** **(value)**为

$$\chi(c) = \max\{c(v) : v \in V(G)\},$$

即, $\chi(c)$ 是由 $c$ 分配到 $G$ 的所有顶点的最大颜色 (正整数). $G$ 的**色数** $\chi(G)$可以定义为

$$\chi(G) = \min\{\chi(c) : c \text{ 为 } G \text{ 的一个染色}\}.$$

在所给的色数第一个定义 (标准定义) 中, 我们在 $G$ 的所有染色中最小化颜色数; 而在第二个 (非标准的) 定义中, 我们在 $G$ 的所有染色中最小化最大颜色. 这两种定义等价的原因为: 若 $\chi(G) = k$, 则 $G$ 的每个 $k$ 染色都必需使用所有而且仅使用颜色 $1, 2, \cdots, k$.

多年来, 许多数学家都在研究图染色的变形与推广. 下面是其中一个例子, 设 $P$ 为一般的图所具有的一个图论性质.(例如, $P$ 可能是如下的一些性质, 独立的, 无圈的, 平面的, 或对于固定的 $d \in \mathbf{N}$, 最大度至多为 $d$.) 每个这样的性质 $P$ 都为 $G$ 提供了一个染色, 其中 $V(G)$ 被划分成子集 $V_1, V_2, \cdots, V_k$, 使得由 $V_i$ 所诱导的子图 $\langle V_i \rangle$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 具有性质 $P$. 每个集合 $V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 称为是一个**色类**. 存在这样的 $k$ 划分的最小整数 $k$ 就是$\boldsymbol{P}$ **色数**, 记为 $\chi(G; P)$. 当 $P$ 是独立的性质时, $\chi(G; P) = \chi(G)$. 这些类型的染色称为是**条件染色** **(conditional coloring)**.

以上所述的图的条件染色, 说明如何把染色的标准定义推广到对色类的一些附加性质, 同时染色的标准定义也可以修改, 使得局部要求 (即邻接顶点需染成不同颜色) 可以用一个更全局的要求来替代.

对于图 $G$ 以及非空子集 $S \subseteq V(G)$, 记 $m_S$ 为诱导子图 $\langle S \rangle$ 的边数. 图 $G$ 的一个标准染色可视为满足如下性质的函数 $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 对任意两个邻接的顶点 $u$ 和 $v$, $|c(u) - c(v)| \geqslant 1$; 对于任意两个不邻接的顶点 $u$ 和 $v$, $|c(u) - c(v)| \geqslant 0$. 该定义还可以按如下重新表述. 图 $G$ 的一个标准染色是指满足如下性质的函数: $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 使得对 $G$ 顶点的每个 2 元集 $S = \{u, v\}$,

$$|c(u) - c(v)| \geqslant m_S.$$

可以发现, 上述定义用了单个但更一般的性质. 按这种方式定义图的标准染色启发我们可以将该概念加以推广.

设图 $G$ 的阶为 $n \geqslant 2$. $G$ 的**局部染色** **(local coloring)**定义为满足如下性质的函数 $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 使得对每个集合 $S \subseteq V(G)$ (其中 $2 \leqslant |S| \leqslant 3$), 存在顶点 $u, v \in S$, 满足

$$|c(u) - c(v)| \geqslant m_S.$$

局部染色 $c$ 分配给 $G$ 顶点的最大颜色称为是 $c$ 的**值**, 并记为 $\chi_\ell(c)$. $G$ 的**局部色数 (local chromatic number)** $\chi_\ell(G)$ 定义为

$$\chi_\ell(G) = \min\{\chi_\ell(c)\},$$

其中 min 取遍 $G$ 的所有局部染色 $c$. 若 $G$ 的一个局部染色 $c$ 满足 $\chi_\ell(c) = \chi_\ell(G)$, 则该局部染色 $c$ 称为是 $G$ 的**最小局部染色 (minimum local coloring)**.

对于每个 $n$ $(2 \leqslant n \leqslant 5)$, 图 10.25 所示的是 $K_n$ 的一个最小局部染色. 因此, $\chi_\ell(K_2) = 2$, $\chi_\ell(K_3) = 4$, $\chi_\ell(K_4) = 5$, $\chi_\ell(K_5) = 7$.

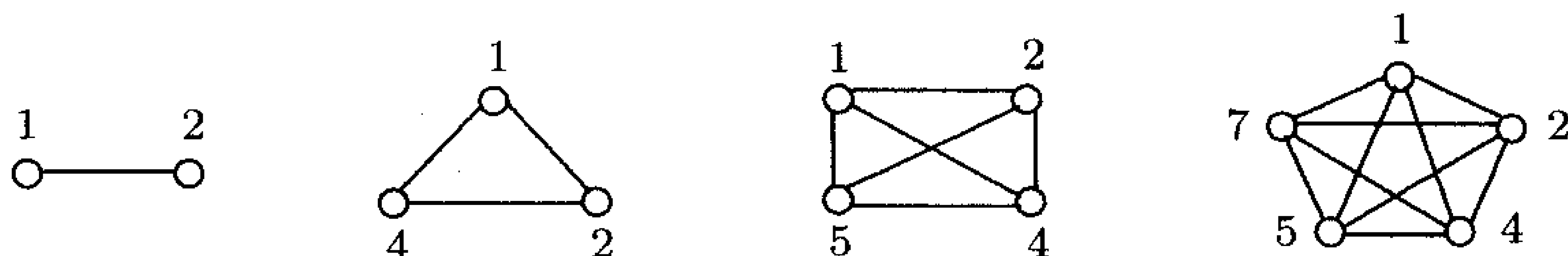



图 10.25　$K_n$ $(2 \leqslant n \leqslant 5)$ 的最小局部染色

图 $G$ 的局部色数比 $G$ 的色数要稍微全局化一些, 因为给 $G$ 的顶点分配颜色依赖 $G$ 的 2 阶与 3 阶子图, 而不是仅仅依赖于 2 阶子图.

在通常的染色中, 只要 $H$ 为 $G$ 的子图, 则有 $\chi(H) \leqslant \chi(G)$, 由此也可得到

$$\chi_\ell(H) \leqslant \chi_\ell(G).$$

我们发现, 如果 $c$ 是图 $G$ 的一个局部染色, 其值为 $s$, 那么如下定义的 $c$ 的**补染色 (complementary coloring)** $\overline{c}$, 使得对每个 $v \in V(G)$

$$\overline{c}(v) = s + 1 - c(v),$$

也是 $G$ 的一个局部染色. 图 10.26 中给出了 $K_3$ 的一个局部染色及其补染色 $\overline{c}$.

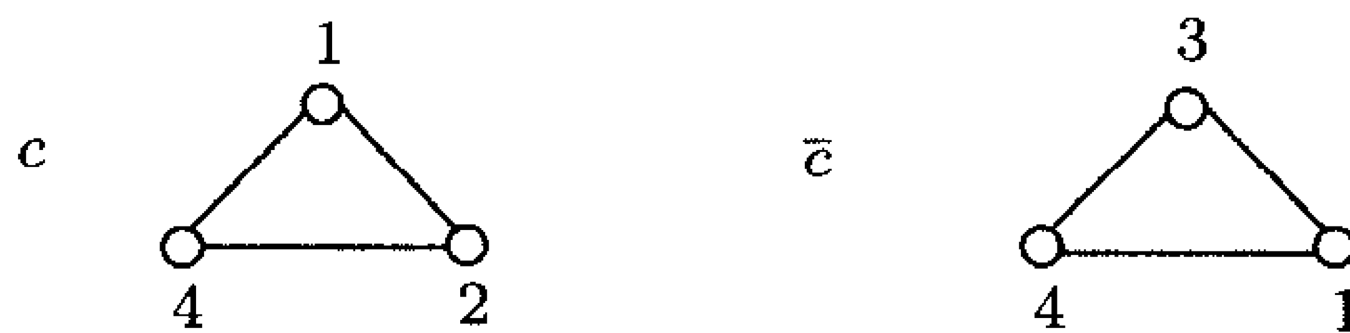



图 10.26　举例说明补染色

可以发现, $G$ 的每个局部染色都是 $G$ 的染色. 给定图 $G$ 的一个标准 $r$ 染色, 也就是说, $G$ 的顶点被染成颜色 $1, 2, \cdots, r$, 使得邻接的顶点所染的颜色不同. 如果对每个整数 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, 用颜色 $2i-1$ 来代替颜色 $i$, 则获得 $G$ 的一个局部染色 (尽管可能不是最小局部染色). 例如, 图 10.27(b) 中图 $G$ 的局部染色 $c'$ 是由图 10.27(a) 中 $G$ 的 3 染色 $c$, 通过用颜色 $2i-1$ 来代替颜色 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 所获得的. 但 $c'$ 不是 $G$ 的最小局部染色. 实际上, 图 10.27(c) 中 $G$ 的局部染色 $c''$ 是最小的, 因此, $\chi_\ell(G) = 4$.

根据上述讨论, 可以得到下面结论.

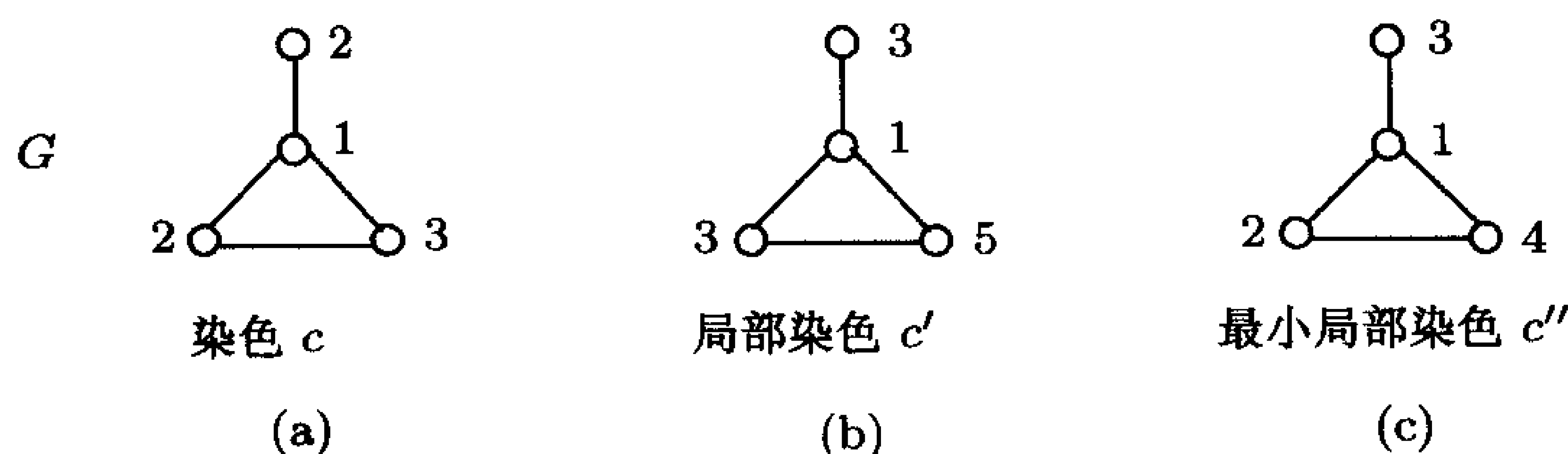



图 10.27 图的染色和局部染色

**定理 10.23** 对每个阶至少为 3 的图 $G$,

$$\chi(G) \leqslant \chi_\ell(G) \leqslant 2\chi(G) - 1.$$

首先, 我们考虑定理 10.2 中下界的紧性. 我们已经知道 $\chi_\ell(K_2) = \chi(K_2) = 2$. 虽然 $\chi_\ell(K_3) = 4$, $\chi(K_3) = 3$, 但 $\chi_\ell(C_5) = \chi(C_5) = 3$. 而且, Grötzsch 图的色数和局部色数都为 4. 这些图的最小局部染色也是最小染色, 如图 10.28 所示. 因此, 存在图 $G_k$, $k \in \{2, 3, 4\}$, 使得 $\chi_\ell(G_k) = \chi(G_k) = k$.

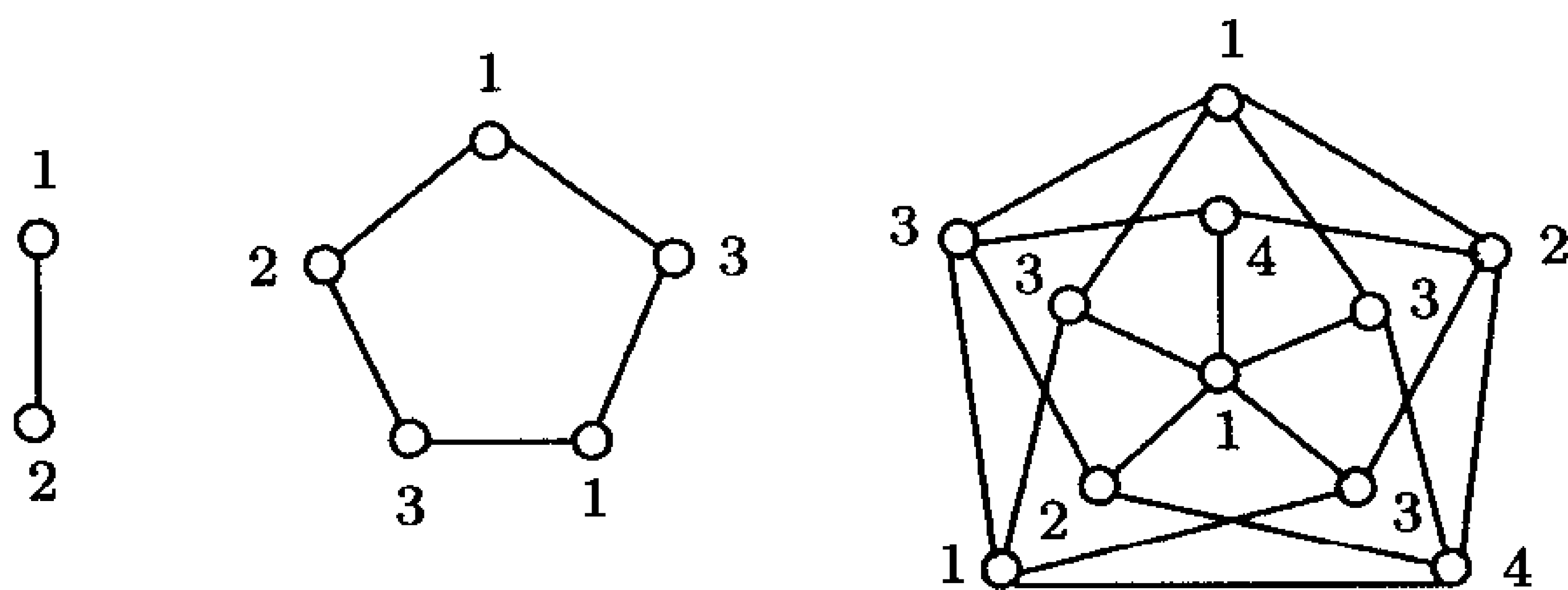


图 10.28 满足 $\chi(G) = \chi_\ell(G)$ 的图 $G$

现在我们再来考虑定理 10.23 中上界的紧性. 首先, 设 $G$ 是一个阶至少为 3 的连通二部图. 则根据定理 10.2, 有 $\chi(G) = 2$. 由于 $G$ 含有阶为 3 的路 $P_3$, 并且 $\chi_\ell(P_3) = 3$ (图 10.29 所示的是 $P_3$ 的一个最小局部染色), 所以 $\chi_\ell(G) \geqslant 3$. 另一方面, 由定理 10.23 可得, $\chi_\ell(G) \leqslant 3$ , 因此 $\chi_\ell(G) = 3$, 此时, 我们获得定理 10.23 中所描述的上界的等式. 我们可以重述定理如下.

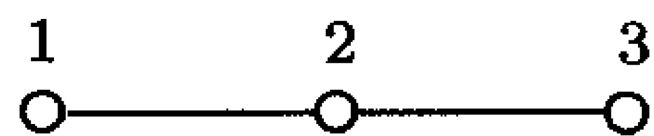



图 10.29 $P_3$ 的一个最小局部染色

**定理 10.24** 若 $G$ 是一个阶至少为 3 的连通二部图, 则 $\chi_\ell(G) = 3$.

**习题**

10.22 对于每个 $n \geqslant 3$, 确定 $\chi_\ell(C_n)$.

10.23 确定 $K_3$ 和 $K_4$ 的所有最小局部染色.

10.24 确定 $\chi_\ell(K_{2,2,2})$ 和 $\chi_\ell(K_{3,3,3})$.

10.25 确定 $\chi_\ell(K_6)$.

10.26 确定 $\chi_\ell(K_{1,1,2})$, $\chi_\ell(K_{1,2,2})$, $\chi_\ell(K_{1,2,3})$.

# 第 11 章　Ramsey 数

## 11.1　图的 Ramsey 数

自 1938 年以来 (除去二战期间的 3 年), William Lowell Putnam 数学竞赛每年都如期举行. 该项赛事是由美国数学协会主办, 旨在刺激美国和加拿大地区的大学和学院的良性竞争. 自 1962 年以来, 每年的赛题都是由 12 个具有挑战性的数学问题组成. 1953 年的赛题中包含了下面这样一个问题.

**问题 A2**　对于一个阶为 6 且边数为 15 的完全图, 其每条边用红、蓝两种颜色染色. 证明: 必定可以找到 3 个顶点, 使得连接它们的三条边都有相同的颜色.

上述问题涉及到图论中的 Ramsey 数, 以 Frank Plumpton Ramsey 命名. Ramsey 于 1903 年 2 月 22 日出生于英国剑桥. 1915 年, Ramsey 进入温彻斯特学院学习, 并于 1920 年完成学业. 随后, 他获得剑桥大学三一学院的奖学金, 并在此研究数学. 1924 年, 他当选为剑桥大学国王学院的 fellow, 这是一个很高的荣誉, 因为他从未参加过国王学院的工作.

1925 年, Ramsey 发表了第一篇重要的论文*The Foundations of Mathematics*(数学的基础). 此文意图改进由 Bertrand Russell 和 Alfred North Whitehead 合作的论文*Principia Mathematica*(数学基本原理). 他的第二篇论文*On a problem of formal logic*(关于形式逻辑的一个问题) 递交到伦敦数学会. 就是这篇论文, 引出了一些以他名字命名的概念和理论.

除了数学, Ramsey 对经济学和哲学也有浓厚的兴趣. 它在经济学上的工作包括概率论、赋税论、最优储蓄理论. 然而, 哲学才是他主要的兴趣. Ramsey 的工作效率很高, 以致于他每天仅仅工作 4 个小时. 在剩余的时间里, 他在享受生活的乐趣, 如打网球、散步、听音乐. 他的大好前程意外终止于 26 岁, Ramsey 于 1930 年 1 月 19 日去世.

Frank Ramsey 证明了比以下结论更为一般的定理, 为了能与图联系得更紧密一些, 我们这里仅介绍 Ramsey 定理的一种特殊情形.

**定理 11.1(Ramsey 定理)**　对于任意 $k+1 \geqslant 3$ 个正整数 $t, n_1, n_2, \cdots, n_k$, 都存在一个正整数 $N$, 使得下面命题成立: 若集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$的每个 $t$ 元子集都用 $k$ 种颜色 $1, 2, \cdots, k$ 中的一种颜色染色, 则对某个整数 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 存在 $\{1, 2, \cdots, N\}$的包含 $n_i$ 个元素的子集 $S$, 使得 $S$ 的每个 $t$ 元子集都染色为 $i$.

为了理解 Ramsey 定理与图论的联系, 设 $\{1,2,\cdots,N\}$ 为完全图 $K_N$ 的顶点集. 首先考虑 Ramsey 定理在 $t=1$ 时的情形. 根据 Ramsey 定理, 存在正整数 $N$, 使得下面命题成立: 若集合 $\{1,2,\cdots,N\}$ 的每个 1 元子集 (即 $K_N$ 的顶点) 用 $k$ 种颜色 1, 2, $\cdots$, $k$ 的一种染色, 则对于某个整数 $i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$, 存在 $n_i$ 个染色为 $i$ 的顶点. 这是鸽笼原理 (见附录 1) 的一种简单变形. 事实上, 整数

$$N=1+\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)$$

满足条件.

Ramsey 定理在 $t=2$ 时的情形是相当迷人的. 在该情形下, 集合 $\{1,2,\cdots,N\}$ 的任意 2 元子集用 1, 2, $\cdots$, $k$ 中的一种颜色染色, 这可解释为完全图 $K_N$ 的边染色. 在此情形下, Ramsey 定理可陈述为:

**定理 11.2(Ramsey 定理)** *对于任意 $k\geqslant 2$ 个正整数 $n_1$, $n_2$, $\cdots$, $n_k$, 存在一个正整数 $N$, 使得下面命题成立: 若 $K_N$ 的每条边被 $k$ 种颜色 1, 2, $\cdots$, $k$ 中的一种染色, 则对某个整数 $i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$, 存在一个完全子图 $K_{n_i}$, 使得 $K_{n_i}$ 的每条边都染色为 $i$.*

Ramsey 定理可直观 (非严谨地) 地解释为: 对于任意充分大的结构, 无论它表现得多么的无序, 该结构必定包含任意给定基数的有序子结构.

Ramsey 定理在 $k=2$ (有两种颜色) 时的特殊情形引起我们特别的兴趣. 图 $G$ 的一个**红 – 蓝染色 (red-blue coloring)**是指如下的一种分配方案, 即将红、蓝两种颜色分配给 $G$ 的边, 每条边分配一种颜色. 设 $F$ 为一个图, 并设 $G$ 有一个同构于 $F$ 的子图, 若该子图的每条边都染成红色, 则称该子图为**红** $F$; 若该子图的每条边都染成蓝色, 则称该子图为**蓝** $F$. 设 $F_1$ 和 $F_2$ 是两个非空图, $K_n$ 是 $n$ 阶完全图. 给定 $K_n$ 的一个红 – 蓝染色, 则 $K_n$ 可能会有一个红 $F_1$, 或者有一个蓝 $F_2$, 或者同时都有, 或者都没有.

由 Ramsey 定理, 若我们考虑两个完全图 $K_s$ 和 $K_t$, 且对一个充分大的完全图 $K_N$ 进行红 – 蓝染色, 无论如何染色, 我们必定可找到一个红 $K_s$ 或一个蓝 $K_t$. 因此, 若 $F_1$ 为 $s$ 阶图, $F_2$ 为 $t$ 阶图, 则在 $K_N$ 中, 我们必定可找到一个红 $F_1$ 或一个蓝 $F_2$.

对两个非空图 $F_1$ 和 $F_2$, **Ramsey 数** $r(F_1,F_2)$ 定义为满足下面条件的最小正整数 $n$, 使得: 若 $K_n$ 的每条边都染成红色或蓝色, 无论如何染色, 我们必定可找到一个红 $F_1$ 或一个蓝 $F_2$. 根据上面描述, 我们已经给出了 Ramsey 数 $r(F_1,F_2)$ 的定义.

为了证明 $r(F_1,F_2)=n$, 我们必须验证下面两个陈述:

(1) $K_n$ 的每种红 – 蓝染色都包含红 $F_1$ 或蓝 $F_2$ (此时证明了 $r(F_1,F_2)\leqslant n$).

(2) 存在 $K_{n-1}$ 的某种红 – 蓝染色, 对于该染色, $K_{n-1}$ 既不含红 $F_1$ 也不含蓝 $F_2$. (此时证明了 $r(F_1, F_2) \geqslant n$).

下面以确定 $r(K_3, K_3)$ 为例说明上述讨论; 这将直接关联到前面所提的 1953 年 Putnam 数学竞赛的那个问题.

**例 11.3**　$r(K_3, K_3) = 6$.

**解**　给定 $K_6$ 的一种红 – 蓝染色, 考虑 $K_6$ 的某个顶点 $v_1$. 由于 $v_1$ 关联 5 条边, 由鸽笼原理知, 这 5 条边中至少有 3 条边染相同的颜色, 不妨设为红色. 假设 $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4$ 是红边, 如图 11.1 所示. 若 $v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4$ 中的任一条边染红色, 即可得到一个红 $K_3$; 否则, $v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4$ 均染蓝色, 则它们构成了一个蓝 $K_3$. 因此, $r(K_3, K_3) \leqslant 6$.

为了验证 $r(K_3, K_3) \geqslant 6$, 我们必须证明: 存在 $K_5$ 的一个既不含红 $K_3$ 也不含蓝 $K_3$ 的红 – 蓝染色. 设 $V(K_5) = \{v_1, v_2, \cdots v_5\}$. 我们按下面方式定义 $K_5$ 的一个红 – 蓝染色, 将 5 圈 $v_1, v_2, \cdots, v_5, v_1$ 上的边染成红色, 将其余的边染成蓝色, 如图 11.2 所示, 其中红边被画成了粗体. 由于该红 – 蓝染色既不含红 $K_3$, 也不含蓝 $K_3$, 故 $r(K_3, K_3) \geqslant 6$. ◇

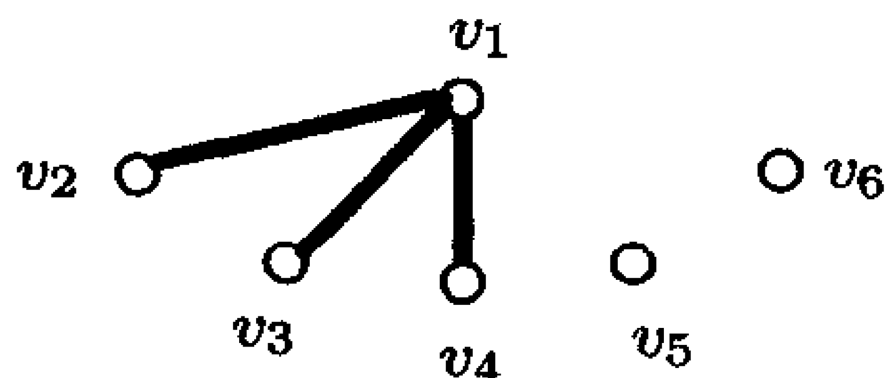



图 11.1　$K_6$ 中的三条红边

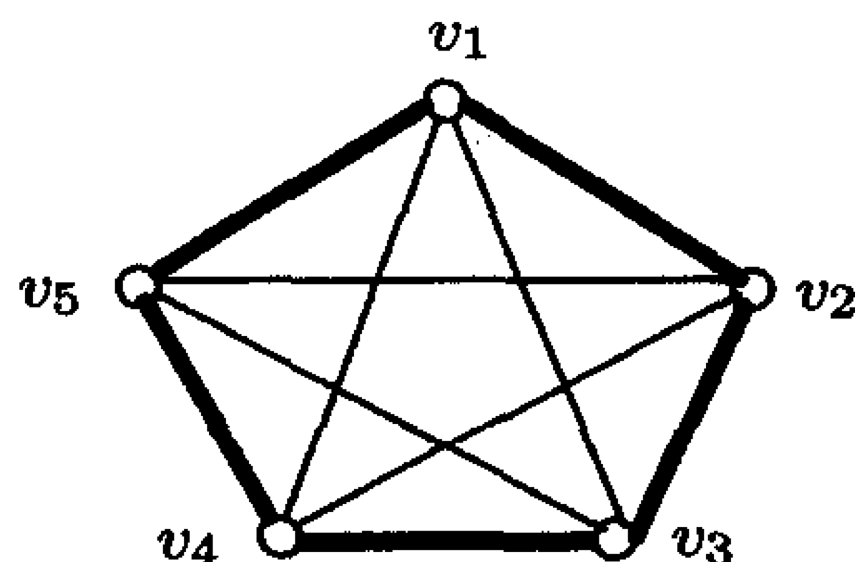



图 11.2　$K_5$ 的一个既不含红 $K_3$ 也不含蓝 $K_3$ 的红 – 蓝染色

对于两个非空图 $F_1$ 和 $F_2$, 关于 Ramsey 数 $r(F_1, F_2)$ 有一个重要的发现. 设 $F_1$ 的阶为 $n_1$, $F_2$ 的阶为 $n_2$, 且 $\max\{n_1, n_2\} = n_1$. 如果将 $K_{n_1-1}$ 的所有边染成红色, 由于 $K_{n_1-1}$ 中没有足够多的顶点, 故 $K_{n_1-1}$ 不包含红 $F_1$; 由于 $K_{n_1-1}$ 中没有边染成蓝色, 故 $K_{n_1-1}$ 也不包含蓝 $F_2$. 因此

$$r(F_1, F_2) \geqslant n_1 = \max\{n_1, n_2\}.$$

这就意味着, 两个图 $F_1$ 和 $F_2$ 的 Ramsey 数 $r(F_1, F_2)$ 至少为 $F_1$ 和 $F_2$ 中较大的阶数.

对于每个整数 $t \geqslant 2$, 下面确定 Ramsey 数 $r(K_2, K_t)$.

**例 11.4**　对于每个整数 $t \geqslant 2$,

$$r(K_2, K_t) = t.$$

**解** 由于 $t$ 为 $K_2$ 和 $K_t$ 的最大阶数, 故 $r(K_2, K_t) \geqslant t$. 给定 $K_t$ 的一个红 – 蓝染色, 若 $K_t$ 的某条边染成红色, 即可得一个红 $K_2$. 否则, $K_t$ 的每条边都染成蓝色, 即可得一个蓝 $K_t$. 因此, $r(K_2, K_t) \leqslant t$. ◇

设 $F_1$ 和 $F_2$ 为两个非空图, 且设 $r(F_1, F_2) = n$. 由 Ramsey 数的定义, $n$ 是满足下面条件的最小整数, 使得 $K_n$ 的每个红 – 蓝染色都产生一个红 $F_1$ 或一个蓝 $F_2$. 在 Ramsey 数的讨论时, 实际所用的颜色是无关紧要的, 因此 $n$ 也是满足下面条件的最小整数, 使得 $K_n$ 的每个红 – 蓝染色都产生一个蓝 $F_1$ 或一个红 $F_2$(或等价地, 一个红 $F_2$ 或一个蓝 $F_1$). 因而,

$$r(F_1, F_2) = r(F_2, F_1);$$

即, 在 $r(F_1, F_2)$ 中, $F_1$ 和 $F_2$ 的次序是无关紧要的. 特别地, $r(K_t, K_2) = t$ $(t \geqslant 2)$.

在例 11.3, 我们已经证明 $r(K_3, K_3) = 6$. 该 Ramsey 数有一个众所周知的通俗解释:

*有多少人参加一个宴会, 才能保证有三个相互认识的人或者三个相互陌生的人?*

对于 $n$ 个人的聚会, 我们可以构造一个完全图 $K_n$, 其顶点为参加聚会的这些人. 当两个人相识时, 则在他 (她) 们对应的顶点间连接一条红边; 当两个人陌生时, 则在他 (她) 们对应的顶点间连接一条蓝边. 因此, 该问题的解就是确定 Ramsey 数 $r(K_3, K_3)$. 根据前面的讨论, 答案是 6.

**例 11.5** $r(K_3, K_4) = 9$.

**解** 给定 $K_9$ 一个红 – 蓝染色, 我们证明其包含一个红 $K_3$ 或一个蓝 $K_4$. 首先注意到, $K_9$ 的每个顶点恰好关联三条红边的情形是不可能发生的; 否则由这些红边诱导的 $K_9$ 的子图是 9 阶的 3 正则图, 但这样的图并不存在. 因此, 有下面两种情形.

**情形 1** *存在一个顶点 $v_1$, 它关联 4 条红边.* 不妨设 $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5$ 是 $K_9$ 中的红边. 若顶点 $v_2, v_3, v_4, v_5$ 中某两个顶点由一条红边连接, 即可得一个红 $K_3$; 否则, 顶点 $v_2, v_3, v_4, v_5$ 任意两点之间均由一条蓝边连接, 则即可得一个蓝 $K_4$.

**情形 2** *存在一个顶点 $v_1$, 它关联 6 条蓝边.* 不妨设 $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4$, $v_1v_5$, $v_1v_6, v_1v_7$ 是蓝边. 由于 $r(K_3, K_3) = 6$, 则子图

$$H = \langle \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} \rangle \cong K_6$$

包含一个红 $K_3$ 或一个蓝 $K_3$. 若 $H$ 包含一个红 $K_3$, 则 $K_9$ 必定包含红 $K_3$. 若 $H$ 包含一个蓝 $K_3$, 则 $K_9$ 必定包含蓝 $K_4$.

因此, $r(K_3, K_4) \leqslant 9$. 考虑 $K_8$ 的一个红 – 蓝染色, 其中由红边和蓝边分别诱导的 $K_8$ 的子图见图 11.3(a) 和 11.3(b). 由于该红 – 蓝染色既不含红 $K_3$, 也不含蓝 $K_4$, 故 $r(K_3, K_4) \geqslant 9$. ◇




图 11.3　$K_8$ 的一个红 – 蓝染色

回顾前文, 图 $G$ 的补图 $\overline{G}$ 与 $G$ 有相同的顶点集, 且 $\overline{G}$ 中的两个顶点是邻接的当且仅当它们在 $G$ 中是不邻接的. 若 $G$ 的阶为 $n$, 则 $\overline{G}$ 的阶同样也为 $n$. 进一步地, 若 $V(K_n)=V(G)=V(\overline{G})$, 则 $K_n$ 的每条边或属于 $G$, 或属于 $\overline{G}$. 若我们认为 $G$ 的边都染成红色, $\overline{G}$ 的边都染成蓝色, 则可得两个图 Ramsey 数的另外一种定义方式. 设 $F_1$ 和 $F_2$ 为两个非空图, **Ramsey 数** $r(F_1,F_2)$ 是指满足下面条件的最小正整数 $n$, 使得: 对任一 $n$ 阶图 $G$, $G$ 必包含一个同构于 $F_1$ 的子图或者 $\overline{G}$ 包含一个同构于 $F_2$ 的子图. 尽管可以用术语图和补图来研究 Ramsey 数, 但我们将继续借助完全图的红 – 蓝染色进行研究.

我们已经知道, 对于任一整数 $t\geqslant 2$, $r(K_2,K_t)=t$; $r(K_3,K_3)=6$; $r(K_3,K_4)=9$. $r(K_s,K_t)$ 是第一类得到广泛研究的 Ramsey 数, 通常称之为**经典 Ramsey 数 (classical Ramsey number)**. 事实上, $r(K_s,K_t)$ 通常表示为 $r(s,t)$. 尽管 Ramsey 数 $r(K_s,K_t)$ 已经研究了数十年, 但对于 $s,t\geqslant 3$, 我们对 $r(s,t)$ 还知之甚少. 事实上, 当 $3\leqslant s\leqslant t$ 时, 已知的 Ramsey 数仅有

$$\begin{array}{lll} r(K_3,K_3)=6 & r(K_3,K_6)=18 & r(K_3,K_9)=36 \\ r(K_3,K_4)=9 & r(K_3,K_7)=23 & r(K_4,K_4)=18 \\ r(K_3,K_5)=14 & r(K_3,K_8)=28 & r(K_4,K_5)=25. \end{array}$$

特别地, 我们还不知道 $r(K_5,K_5)$ 的值, 但可以确定

$$43\leqslant r(K_5,K_5)\leqslant 49.$$

对于许多未知的 Ramsey 数 $r(K_s,K_t)$, 所给的界往往偏离精确值很远. 例如

$$798\leqslant r(K_{10},K_{10})\leqslant 12\,677.$$

回顾前文, 图 $G$ 的一个顶点子集 $S$ 称为是**独立的**, 若 $S$ 中任意两点在 $G$ 中不邻接. 特别地, 若 $S$ 是由 $G$ 的 $s$ 个顶点构成, 且满足 $\langle S\rangle\cong K_s$, 则 $S$ 是图 $\overline{G}$ 的独立集. 若用术语图和补图描述, 则 Ramsey 数 $r(K_s,K_t)$ 就是满足下面条件的最小正整数 $n$, 使得对任一 $n$ 阶图 $G$, $K_s$ 是 $G$ 的子图或者 $K_t$ 是 $\overline{G}$ 的子图. 等价地, Ramsey 数 $r(K_s,K_t)$ 是满足下面条件的最小正整数 $n$, 使得任一 $n$ 阶图 $G$ 包含 $s$ 阶完全子图或者包含 $t$ 个顶点的独立集. 例如, 由于 $r(K_3,K_3)=6$, $r(K_3,K_4)=9$, 若 $G$ 为不

含三角形的 6 阶, 或 7 阶, 或 8 阶的图, 则 $G$ 必含 3 个顶点的独立集; 若 $G$ 为不含 4 阶完全子图的 9 阶图, 则 $G$ 必含一个由 3 个顶点构成的独立集.

下面, 我们考虑某些 Ramsey 数 $r(F_1, F_2)$, 其中 $F_1$ 和 $F_2$ 不全是完全图. 下面来确定 Ramsey 数 $r(P_3, K_3)$, 其中 $P_3$ 和 $K_3$ 如图 11.4 所示. 确定 Ramsey 数 $r(P_3, K_3)$, 我们将如何入手? 由于 $P_3$ 和 $K_3$ 的最大阶数是 3, 故 $r(P_3, K_3) \geqslant 3$. 如果我们将 $K_3$ 的一条边染成红色, 其余两条边染成蓝色, 则这种红 – 蓝染色既不含红 $P_3$ 也不含蓝 $K_3$, 因此该染色方案可避免红 $P_3$ 和蓝 $K_3$ 的出现. 故, $r(P_3, K_3) \geqslant 4$.




图 11.4 确定 $r(P_3, K_3)$

另一方面, $K_4$ 的一种红 – 蓝染色, 如图 11.5 所示 (粗体的边代表红边), 同样可以避免红 $P_3$ 和蓝 $K_3$ 的出现. 因此, $r(P_3, K_3) \geqslant 5$. 如果我们很难找到 $K_5$ 的一种红 – 蓝染色, 使得它可以避免红 $P_3$ 和蓝 $K_3$ 的出现, 则我们有理由猜想 $r(P_3, K_3) = 5$. 下面, 我们将给出 $r(P_3, K_3) = 5$ 的一个正式讨论.

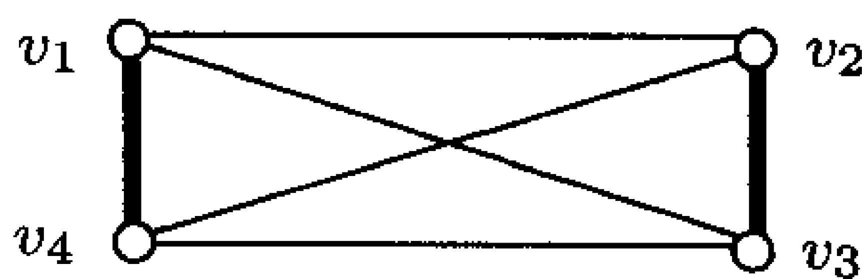



图 11.5 $K_4$ 的一个红 – 蓝染色, 它可避免红 $P_3$ 和蓝 $K_3$ 的出现

**例 11.6** $r(P_3, K_3) = 5$.

**解** 首先, 我们证明 $r(P_3, K_3) \geqslant 5$. 由于图 11.5 所示的 $K_4$ 的红 – 蓝染色可以避免红 $P_3$ 和蓝 $K_3$ 的出现, 因此 $r(P_3, K_3) \geqslant 5$.

下面只需证明 $r(P_3, K_3) \leqslant 5$ 即可. 给定 $K_5$ 的一个红 – 蓝染色, 考虑 $K_5$ 的顶点 $v_1$. 若 $v_1$ 关联两条红边, 即可得到一个红 $P_3$. 否则 $v_1$ 至多关联一条红边. 此时, 与 $v_1$ 关联的蓝边有三条, 分别记为 $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4$. 若 $v_2, v_3, v_4$ 中某两个顶点之间由一条蓝边连接, 即可得到一个蓝 $K_3$. 否则, $v_2v_3$ 和 $v_3v_4$ 是红边, 则得到一个红 $P_3$. 因此, $r(P_3, K_3) \leqslant 5$. ◇

当然, $P_3 \cong K_{1,2}$. 因而, $r(K_{1,2}, K_3) = 5$. 下面将采用与上述讨论不同的方法来确定 $r(K_{1,3}, K_3)$.

**例 11.7** $r(K_{1,3}, K_3) = 7$.

**解** 首先, 我们证明 $r(K_{1,3}, K_3) \geqslant 7$. 考虑 $K_6$ 的一个红 – 蓝染色, 如图 11.6 所示 (粗体表示红边). 由于红色子图是 $2K_3$, 蓝色子图是 $K_{3,3}$, 因而在该红 – 蓝染色中既不包含红 $K_{1,3}$, 也不包含蓝 $K_3$. 故 $r(K_{1,3}, K_3) \geqslant 7$.

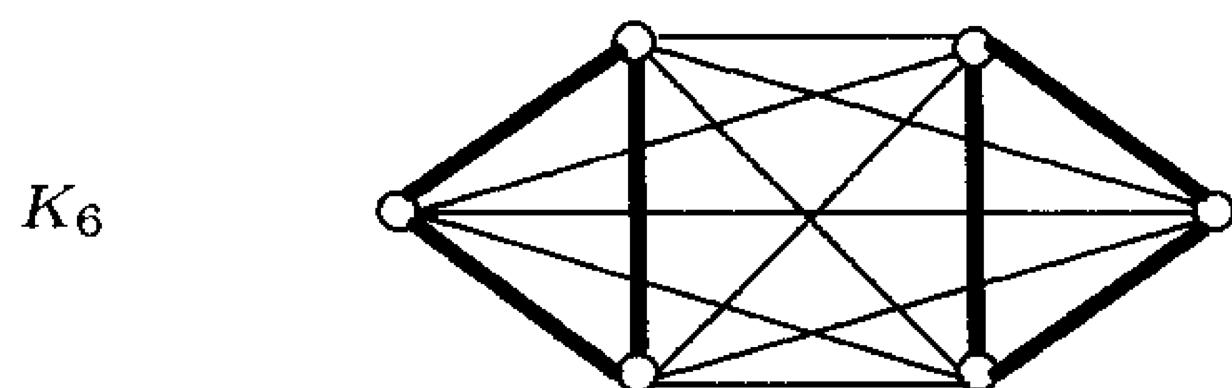


图 11.6 $K_6$ 的红 – 蓝染色, 它可避免红 $K_{1,3}$ 和蓝 $K_3$ 的出现

下面我们证明 $r(K_{1,3},K_3)\leqslant 7$. 假设 $r(K_{1,3},K_3)>7$, 则存在 $K_7$ 的一种既不含红 $K_{1,3}$, 也不含蓝 $K_3$ 的红 – 蓝染色. 因而, 对于 $K_7$ 的顶点 $v_1$, 至多有两条红边与之关联, 因此至少有四条蓝边与之关联, 分别记为 $v_1v_i$ ($2\leqslant i\leqslant 5$). 若 $\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$ 中某两个顶点之间由一条蓝边连接, 即可得到蓝 $K_3$, 从而导致矛盾. 因此, $\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$ 中任两个顶点之间的边均为红边. 特别地, 边 $v_2v_3,v_2v_4,v_2v_5$ 是红边, 它们构成了一个红 $K_{1,3}$, 也导致矛盾. ◇

前面所确定的两个 Ramsey 数属于同一类型 $r(F_1,F_2)$, 其中 $F_1$ 是树, $F_2$ 是完全图. 特别地, 在*Journal of Graph Theory*(图论杂志) 的第一期 (1977 年), Vašek Chvátal 建立了 $r(F_1,F_2)$ 的一个简单公式, 其中 $F_1$ 是任一树, $F_2$ 是任一完全图. 尽管它的证明有些复杂, 但想获得如此一般性的结果, 证明已经是相对简单的了. 回顾定理 4.9, 若 $T$ 是一个阶为 $k$ 的树, $G$ 是一个图, 且对 $G$ 的每个顶点 $v$, $\deg v\geqslant k-1$, 则图 $G$ 包含一个同构于 $T$ 的子图.

**定理 11.8** 对于每个阶为 $m\geqslant 2$ 的树 $T_m$, 以及每个整数 $n\geqslant 2$,

$$r(T_m,K_n)=(m-1)(n-1)+1.$$

**证** [直接证法和归纳证法] 首先, 我们证明 $r(T_m,K_n)\geqslant(m-1)(n-1)+1$. 给定 $(m-1)(n-1)$ 阶完全图 $K_{(m-1)(n-1)}$ 的一个红 – 蓝染色, 使得其红色子图为 $(n-1)K_{m-1}$, 即红色子图是由 $K_{m-1}$ 的 $n-1$ 个拷贝构成. 由于红色子图的每个连通分支具有阶 $m-1$, 故它不包含阶超过 $m-1$ 的连通子图. 当然, 不存在 $m$ 阶红树. 蓝色子图为完全 $(n-1)$ 部图 $K_{m-1,m-1,\cdots,m-1}$, 其中每个部集恰由 $m-1$ 个顶点构成. 因而, 不存在蓝 $K_n$. 由于该红 – 蓝染色避免了 $m$ 阶的红树和蓝 $K_n$ 的出现, 故

$$r(T_m,K_n)\geqslant(m-1)(n-1)+1.$$

下面, 我们证明 $r(T_m,K_n)\leqslant(m-1)(n-1)+1$. 我们对完全图 $K_n$ 阶数进行归纳. 当 $n=2$ 时, 证明

$$r(T_m,K_2)\leqslant(m-1)(2-1)+1=m.$$

给定 $K_m$ 的一个红 – 蓝染色, 若 $K_m$ 的某一条边为蓝色, 即可得到蓝 $K_2$; 否则, $K_m$ 的每条边均为红色, 此时必可得到红树 $T_m$. 因此, $r(T_m,K_2)\leqslant m$. 故当 $n=2$ 时, 不等式

$$r(T_m, K_n) \leqslant (m-1)(n-1)+1$$

成立. 假设当 $k \geqslant 2$ 时, 对于任一阶为 $m$ 的树, 都有

$$r(T_m, K_k) \leqslant (m-1)(k-1)+1.$$

这就意味着, $K_{(m-1)(k-1)+1}$ 的任意红 – 蓝染色均包含红 $T_m$ 或蓝 $K_k$. 我们将证明

$$r(T_m, K_{k+1}) \leqslant (m-1)k+1.$$

给定 $K_{(m-1)k+1}$ 的一个红 – 蓝染色, 我们考虑如下两种情形.

**情形 1** *在 $K_{(m-1)k+1}$ 中, 存在一个顶点 $v_1$ 与 $(m-1)(k-1)+1$ 条蓝边关联.* 不妨设 $v_1v_i(2 \leqslant i \leqslant (m-1)(k-1)+2)$ 为蓝边. 考虑子图

$$H = \langle \{v_i : 2 \leqslant i \leqslant (m-1)(k-1)+2\} \rangle \cong K_{(m-1)(k-1)+1}.$$

由归纳假设, $H$ 包含一个红 $T_m$ 或一个蓝 $K_k$. 若 $H$ 包含红 $T_m$, 则 $K_{(m-1)k+1}$ 同样包含 $T_m$. 否则 $H$ 包含蓝 $K_k$. 此时, $\langle \{v_1\} \cup V(K_k) \rangle$ 即可构成 $K_{(m-1)k+1}$ 的一个蓝 $K_{k+1}$.

**情形 2** *$K_{(m-1)k+1}$ 的每个顶点均至多与 $(m-1)(k-1)$ 条蓝边关联.* 此时, $K_{(m-1)k+1}$ 的每个顶点均至少关联 $m-1$ 条红边. 因而, $K_{(m-1)k+1}$ 的红色子图的最小度至少为 $m-1$. 由定理 4.9, 该红色子图包含红 $T_m$. 故 $K_{(m-1)k+1}$ 包含红 $T_m$. ■

由定理 11.8, 对于任意正整数 $s$ 和 $t \geqslant 2$,

$$r(K_{1,s}, K_t) = s(t-1)+1.$$

下面的例子针对于 Ramsey 数 $r(F_1, F_2)$, 其中 $F_1$ 和 $F_2$ 都不是完全图.

**例 11.9** $r(K_{1,3}, C_4) = 6$.

**证** 如图 11.7 所示, 可见 $K_5$ 的该红 – 蓝染色既不包含红 $K_{1,3}$, 也不包含蓝 $C_4$, 因此 $r(K_{1,3}, C_4) \geqslant 6$.

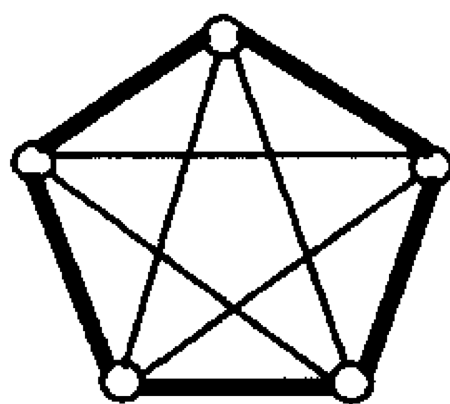


图 11.7 $K_5$ 的一个红 – 蓝染色, 它可避免红 $K_{1,3}$ 和蓝 $C_4$ 的出现

我们只需验证 $r(K_{1,3}, C_4) \leqslant 6$ 即可. 给定 $K_6$ 的一个红 – 蓝染色, 并记 $K_6$ 的顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_6$. 由于 $r(K_3, K_3) = 6$, 则 $K_6$ 的任一红 – 蓝染色均包含红 $K_3$ 或蓝 $K_3$. 我们考虑如下两种情形.

**情形 1** *存在一个红 $K_3$.* 不妨假设 $v_1, v_2, v_3$ 为红 $K_3$ 的三个顶点. 若该红－蓝染色不包含红 $K_{1,3}$, 则连接 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 和 $\{v_4,v_5,v_6\}$ 之间的每条边均为蓝边. 此时, 即可得到蓝 $C_4$.

**情形 2** *存在一个蓝 $K_3$.* 不妨假设 $v_1, v_2, v_3$ 为蓝 $K_3$ 的三个顶点. 若 $\{v_4,v_5,v_6\}$ 中的某个顶点与 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 中某两个顶点之间由蓝边连接, 则可得到一个蓝 $C_4$. 若 $\{v_4,v_5,v_6\}$ 中的某个顶点与 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 中所有顶点之间均由红边连接, 则可得到一个红 $K_{1,3}$. 因此, 我们可以假设: $\{v_4,v_5,v_6\}$ 中的每个顶点与 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 中某一个顶点以蓝边连接, 而与其余两个顶点以红边连接. 若 $v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6$ 中有一条边是红边, 则可得到一个红 $K_{1,3}$. 因此, 我们可以假设 $v_4, v_5, v_6$ 是蓝 $K_3$ 的顶点. 此时, 连接 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 和 $\{v_4,v_5,v_6\}$ 之间的任意两条蓝边均位于一个蓝 $C_4$ 上. ◇

## 习题

11.1 设 $F_1$ 为 $s$ 阶图, $F_2$ 为 $t$ 阶图, 证明: $r(F_1,F_2) \leqslant r(K_s,K_t)$.

11.2 已知 $r(K_4,K_5)=25$, 证明: 若 $G$ 为 25 阶图且 $G$ 不含 $K_4$ 作为子图, 则 $G$ 包含 5 个相互不邻接的顶点.

11.3 证明: $r(K_4,K_4) \leqslant 18$.

11.4 确定 $r(P_3,P_3)$.

11.5 确定 $r(2K_2,P_3)$.

11.6 确定 $r(K_{1,3},P_3)$.

11.7 确定 $r(2K_2,2K_2)$.

11.8 确定 $r(2K_2,3K_2)$.

11.9 确定 $r(K_{1,3},K_{1,3})$.

11.10 确定 $r(P_3,P_3 \cup P_2)$.

11.11 确定 $r(K_{1,4},K_{1,4})$.

11.12 确定 $r(P_4,P_4)$.

11.13 确定 $r(C_4,C_4)$.

11.14 证明: 利用不同于例 11.9 的如下方法, 证明: $r(K_{1,3},C_4)=6$. 该方法为: (1) 假设 $K_6$ 的一个红－蓝染色不含红 $K_{1,3}$, (2) 利用事实: 6 阶 3 正则图仅有 $K_{3,3}$ 和 $K_3 \times K_2$.

11.15 设 $G$ 为 $r(K_s,K_t)-1$ 阶完全图, 其中 $s,t \geqslant 2$. 证明: $G$ 的任一红－蓝染色包含红 $K_{s-1}$ 或蓝 $K_{t-1}$.

11.16 证明: 对于任一整数 $n \geqslant 2$, $r(K_3,K_n) \leqslant \binom{n+1}{2} = \frac{n^2+n}{2}$. [提示: $\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n$.]

11.17 根据习题 11.16, $\binom{n+1}{2}$ 阶完全图的任一红－蓝染色中均可产生一个红 $K_3$ 或一个蓝 $K_n$. 利用这一事实和组合恒等式 $\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$ 给出一个涉及 Ramsey 数的结论. [注: 对于整数 $k$ 和 $n$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, 且若 $n < k$, 定义 $\binom{n}{k} = 0$).]

## 11.2 Turán 定理

对于整数 $s,t \geqslant 2$, 若 $r(K_s,K_t)=n$, 则任一 $n$ 阶图包含一个 $s$ 个顶点的独立集或一个 $t$ 阶完全子图. 因而, 每个阶至少为 $n$ 的图, 若它不包含 $s$ 个顶点的独立集, 则必包含一个同构于 $K_t$ 的子图. 事实上, 要求一个给定阶数的图包含一个指定阶数的完全图作为子图, 有一个更为自然的充分条件.

假设图 $G$ 的阶为偶数 $n \geqslant 4$, 即对于某个整数 $k \geqslant 2$, $n=2k$. 设 $m$ 为 $G$ 的边数, 则 $0 \leqslant m \leqslant \binom{n}{2}=\binom{2k}{2}$. 当然, 若 $m=\binom{n}{2}$, 则 $G \cong K_n$. 此时, 对于任意 $n$ 阶图 $H$, 图 $G$ 包含一个同构于 $H$ 的子图. 因而, 若 $G$ 的边数足够多, 则 $G$ 包含一个同构于 $H$ 的子图. 特别地, 若 $G$ 的边数足够多, 则 $G$ 包含一个三角形. 然而, 上述的 "足够多" 是多少呢? 当 $n=4$ 时, 我们对该问题作出回答.

注意到, 4 圈 $C_4$ 不包含三角形, 事实上, $C_4$ 是唯一的边数为 4 且不包含三角形的 4 阶图. 因而, 若 4 阶图 $G$ 含有 4 条边, 则该条件不能保证 $G$ 包含三角形. 不难发现, 含有 5 条边的 4 阶图是唯一的, 记该图为 $G_1$, 如图 11.8 所示. 由于 $G_1$ 包含三角形, 则每个阶为 4, 边数至少为 5 的图均包含三角形. 对于 6 阶图, 我们考虑同样的问题. 易见, 图 11.8 所示的图 $H \cong K_{3,3}$ 是边数为 9 且不包含三角形的 6 阶图. 那么, 边数为 10 的 6 阶图又将怎样呢? 尽管验证所有边数为 10 的 6 阶图并不是很容易, 但我们可以证明每个这样的图都至少包含一个三角形. 注意到 $5=2^2+1$, $10=3^2+1$. 因而, 对于 $n=2k$, 其中 $k=2$ 或 $k=3$, 每个边数为 $k^2+1$ 的 $n$ 阶图均包含三角形, 但也存在一个边数为 $k^2$ 且不包含三角形的 $n$ 阶图. 下面我们将证明, 对于每个整数 $k \geqslant 2$, 上述论断是正确的.

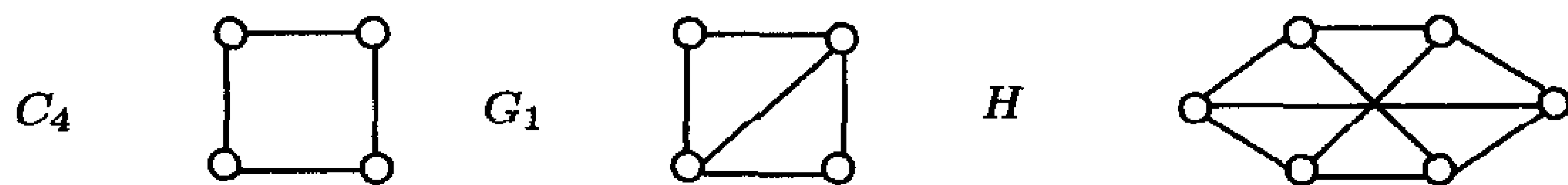



图 11.8 图 $C_4, G_1, H$

**定理 11.10** *设 $n=2k$ $(k \geqslant 2)$ 为偶数. 若边数为 $m$ 的每个 $n$ 阶图均包含一个三角形, 则满足该性质的最小正整数 $m$ 为 $k^2+1$.*

**证** [最小反例证法] 首先, 注意到完全二部图 $K_{k,k}$ $(k \geqslant 2)$ 的阶为 $2k$, 边数为 $k^2$, 但 $K_{k,k}$ 不包含三角形. 因此, 我们只需证明任意阶为 $2k$, 边数为 $k^2+1$ $(k \geqslant 2)$ 的图均包含三角形即可. 假设该论断不成立, 则存在一个最小整数 $k \geqslant 2$, 以及一个阶为 $2k$ 且边数为 $k^2+1$ 的图 $G$, $G$ 不包含三角形. 这就意味着, 阶为 $2(k-1)$ 且边数为 $(k-1)^2+1$ 的每个图均包含三角形. 我们已经知道, 阶为 4 且边数为 5 的每个图都包含三角形; 阶为 6 且边数为 10 的每个图也包含三角形, 故 $k \geqslant 4$. 设 $uv$ 是 $G$ 的一条边. $G$ 中不同于 $u,v$ 的顶点有 $2k-2$ 个, 由于 $G$ 不包含三角形, 则这 $2k-2$

个顶点中任一个均至多与 $u$,$v$ 中的一个邻接. 因而, $G$ 中至多有 $2k-2$ 条边与 $uv$ 邻接. 从而, 图 $H=G-u-v$ 至少包含 $(k^2+1)-(2k-1)=k^2-2k+2$ 条边. 由于 $H$ 的阶为 $n-2=2(k-1)$, 边数至少为 $k^2-2k+2=(k-1)^2+1$, 故 $H$ 包含三角形. 因为 $H$ 是 $G$ 的子图, 所以 $G$ 同样包含三角形, 导致矛盾. ■

前面已经提到, $K_{k,k}$ $(k \geqslant 2)$ 的阶为 $2k$, 边数为 $k^2$, 且 $K_{k,k}$ 不包含三角形. 下面, 用类似于定理 11.10 的证明方式, 我们将证明, $K_{k,k}$ 是唯一满足上述性质的图.

**定理 11.11** 对每个整数 $k \geqslant 2$, $K_{k,k}$ 是唯一的阶为 $2k$, 边数为 $k^2$, 且不包含三角形的图.

**证** [最小反例证法] 假设该定理不成立, 则存在一个最小整数 $k \geqslant 2$, 以及一个阶为 $2k$ 且边数为 $k^2$ 图 $G \ncong K_{k,k}$, $G$ 不包含三角形. 由于 $K_{2,2}$ 是唯一的阶为 4, 边数为 4, 且不包含三角形的图, 故 $k \geqslant 3$.

设 $uv$ 是 $G$ 的一条边. $G$ 中不同于 $u$,$v$ 的顶点有 $2k-2$ 个, 由于 $G$ 不包含三角形, 则这 $2k-2$ 个顶点中任一个均至多与 $u$,$v$ 中的一个邻接. 因而, $G$ 中至多有 $2k-2$ 条边与 $uv$ 邻接. 从而, 图 $H=G-u-v$ 至少包含 $k^2-(2k-1)=(k-1)^2$ 条边. 若 $H$ 至少包含 $(k-1)^2+1$ 条边, 由定理 11.10, 则 $H$ 包含三角形, 进而 $G$ 包含三角形, 导致矛盾. 因此, $H$ 恰好包含 $(k-1)^2$ 条边. 由于 $H$ 不包含三角形, 故 $H \cong K_{k-1,k-1}$. 设 $U_1$ 和 $V_1$ 是 $H$ 的两个部集, 从而 $V(H)=U_1 \cup V_1$ 中的任一顶点恰好与 $u$, $v$ 中的一个顶点邻接. 若 $u$(或 $v$) 同时邻接于 $U_1$ 的某个顶点和 $V_1$ 的某个顶点, 则 $G$ 包含三角形, 导致矛盾. 因此, $u$ 仅邻接于 $U_1$ 中的顶点或 $V_1$ 中的顶点, 而 $v$ 恰好与其相反. 不妨设 $u$ 邻接于 $V_1$ 中的顶点, $v$ 邻接于 $U_1$ 中的顶点. 此时, $G \cong K_{k,k}$, 其中两个部集分别为 $U_1 \cup \{u\}$ 和 $V_1 \cup \{v\}$. ■

结合定理 11.10 和定理 11.11, 我们得到下面结论.

**定理 11.12** 设 $G$ 是阶为 $2k \geqslant 4$ 的图. 若 $G$ 的边数至少为 $k^2+1$, 或者 $G$ 的边数为 $k^2$ 且 $G \ncong K_{k,k}$, 则 $G$ 包含三角形.

应用上面方法讨论奇数阶图, 我们可以证明下面定理.

**定理 11.13** 设 $G$ 是阶为 $2k+1 \geqslant 3$ 的图. 若 $G$ 的边数至少为 $k^2+k+1$, 或者 $G$ 的边数为 $k^2+k$ 且 $G \ncong K_{k,k+1}$, 则 $G$ 包含三角形.

可以把定理 11.12 和定理 11.13 组合成一个定理, 如下所示.

**推论 11.14** 设 $G$ 是阶为 $n \geqslant 3$ 的图. 若 $G$ 的边数至少为 $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$, 或 $G$ 的边数为 $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ 且 $G \ncong K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$, 则 $G$ 包含三角形.

例如, 根据推论 11.14, 若 7 阶图 $G$ 的边数至少为 13, 或其边数为 12 且 $G \ncong K_{3,4}$, 则 $G$ 包含三角形.

前面已经讨论一个 $n \geqslant 3$ 阶图 $G$ 所需的边数, 以保证 $G$ 包含一个同构于

$K_3$ 的子图. 下面, 我们将该问题推广到更为一般的情形. 例如, 对于整数 $k$ 和 $n$ $(2 \leqslant k < n)$, 确定最小的正整数 $m$, 以使得每个边数为 $m$ 的 $n$ 阶图都包含一个同构于 $K_{k+1}$ 的子图.

该问题的起源可追溯到 Paul Turán, 我们在前面曾遇到的这位数学家. Paul Turán 于 1910 年 8 月 28 日出生于匈牙利布达佩斯. 在学生时期, 他就与 Paul Erdős, Tibor Gallai, George Szekeres, Esther Klein 成为朋友. 尽管 Turán 最为人们熟知是因为他在概率和解析数论方面的贡献, 但是他在图论上的贡献导致了极值图论的诞生.

1911 年, George Szekeres (读为 sack-er-ash) 同样也出生于布达佩斯, 他比 Turán 小一岁. Szekeres 在布达佩斯技术大学学习化学工程. 大家知道, 学生在大学期间, 经常会参加一些兴趣小组. 上面我们提到的也是如此, 他们在一起讨论数学问题. 1937 年, Szekeres 与 Esther Klein 结婚, 成为夫妻.

在 20 世纪 30 年代后期, Szekeres, Klein 以及其他一些在匈牙利的犹太人的生活变得日益艰难. 为此, 他们决定前往上海. 1948 年, Szekeres 成为澳大利亚阿德莱德大学的一名教员. 1963 年, 他成为悉尼新南威尔斯士大学纯粹数学的主席. 虽然他于 1976 年退休, 但他仍然继续工作在数学领域. 2001 年, 澳大利亚数学会创立了 George Szekeres 奖, 以表达对他的敬意.

1940 年, Szekeres 呆在上海, 在此期间他曾写信给 Paul Turán, 讲述了他在证明 William Burnside 的一个猜想过程中所做的一些不成功的尝试. 在收到这封信后, Turán 仔细思考了该问题, 并提出了下面问题:

*一个不含 $k$ 阶完全子图的 $n$ 阶图所能有的最大边数是多少?*

虽然 Turán 发现这个问题十分有趣, 但当时他主要关心的是解析数论问题. 1940 年 9 月, 他首次被送到集中营. 一天, 他在集中营的一名同伴喊了 Turán 的名字. 这恰好被集中营的一名军官听见, 他知道 Turán 是一位数学家的名字. 这名军官于是就安排 Turán 从事一些非体力的任务, 并且可以在户外活动. 这段时期, 他又重新考虑了这个问题. 遗憾的是, Turán 没有纸张去探究这些想法的细节. 尽管如此, 因为考虑这个不寻常而又优美的问题, 他仍然感到无比的快乐. 最终, Turán 完全地解决了该问题, 他对这个结果十分满意. 二战期间, Turán 在集中营里度过了大约 32 个月. 自 1949 年, 他成为布达佩斯大学的一名教授. Turán 于 1976 年 9 月 26 日去世.

我们通过如下形式考虑 Turán 提出的问题: 对于整数 $k$ 和 $n$ $(2 \leqslant k < n)$, 在所有不含 $K_{k+1}$ 作为子图的 $n$ 阶图中, 其最多的边数是多少? 首先我们证明, 对于任意两个整数 $k$ 和 $n$ $(2 \leqslant k < n)$, 在所有不包含 $K_{k+1}$ 作为子图的 $n$ 阶图中, $k$ 部图是具有最大边数的图之一. 回顾到, 一个图 $G$ 称为是 $k$ 部的, 若 $V(G)$ 可划分为 $k$ 个独立子集. 在给出主要结论之前, 我们先回顾一些基本事实.

若 $G$ 是阶为 $n$, 边数为 $m$ 的图, 图论第一定理告诉我们

$$\sum_{v\in V(G)} \deg v = 2m.$$

设 $V_1$ 是 $V(G)$ 的非空真子集, $G_1 = \langle V_1\rangle$. 假设 $G_1$ 的边数为 $m_1$, 连接 $V_1$ 中顶点和 $V(G) - V_1$ 中顶点的边有 $m_2$ 条. 因此, 和数 $\sum_{v\in V_1} \deg_G v$ 对 $G_1$ 的每条边计数两次, 对连接 $V_1$ 的顶点到 $V(G) - V_1$ 的顶点的每条边计数一次, 即

$$\sum_{v\in V_1} \deg_G v = 2m_1 + m_2.$$

上述过程可如图 11.9 所示.

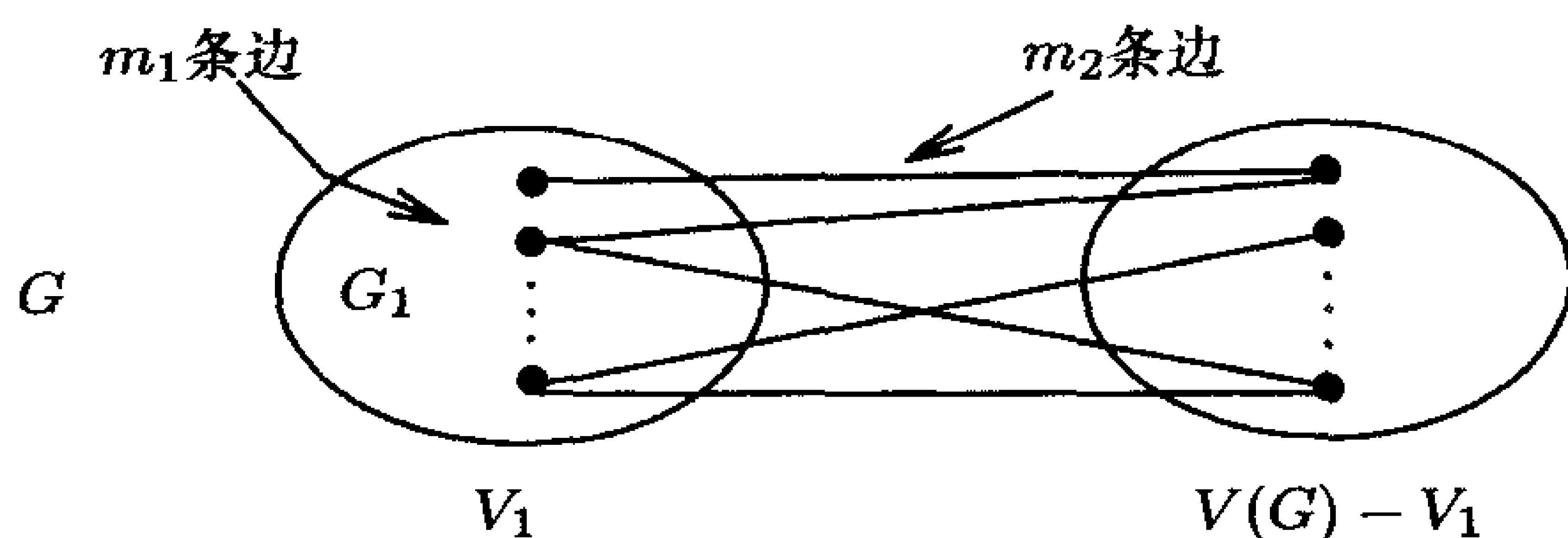



图 11.9 子图的顶点度求和

**定理 11.15** 设 $k$ 和 $n$ 为两个整数, 且满足 $2 \leqslant k < n$. 则在所有不包含 $K_{k+1}$ 作为子图的 $n$ 阶图中, 具有最大边数的图至少有一个为 $k$ 部图.

**证** [反证法] 假设结论不成立, 则存在一个最小整数 $k \geqslant 2$ 和一个整数 $n > k$, 使得在所有不包含 $K_{k+1}$ 的 $n$ 图中, 具有最大边数 $m$ 的图都不是 $k$ 部图. 由推论 11.14, $k \geqslant 3$.

设 $G$ 是阶为 $n$, 边数为 $m$ 的图, 且不包含 $K_{k+1}$ 作为子图. 由假设, $G$ 不是 $k$ 部图. 设 $v$ 是 $G$ 中具有最大度的顶点, 即 $\deg v = \Delta$, $F$ 是由 $v$ 在 $G$ 中的邻域所诱导的子图, 即 $F = \langle N(v)\rangle$. 因而, $F$ 的阶为 $\Delta$. 假设 $F$ 的边数为 $s$. 由于 $G$ 不包含 $K_{k+1}$ 作为子图, $v$ 邻接于 $F$ 的每个顶点, 故 $F$ 不包含 $K_k$ 作为子图. 由假设, 在所有不包含 $K_k$ 作为子图的 $\Delta$ 阶图中, 具有最大边数 (设为 $s'$) 的图至少有一个是 $(k-1)$ 部图, 记为 $F'$. 显然, $s' \geqslant s$.

设

$$H \cong F' + \overline{K}_{n-\Delta}.$$

因此 $H$ 是阶为 $n$, 边数为 $s' + \Delta(n-\Delta)$ 的 $k$ 部图, 且不包含 $K_{k+1}$ 作为子图. 故, $m > s' + \Delta(n-\Delta)$. 注意到

$$m \leqslant s + \sum_{v\in V(G)-V(F)} \deg_G v \leqslant s + \Delta(n-\Delta) \leqslant s' + \Delta(n-\Delta) < m,$$

从而导致矛盾. ∎

设 $n \geqslant 3$ 为整数, 对于每个正整数 $k \leqslant n$, 设 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 是 $k$ 个整数, 且满足

$$n = t_1 + t_2 + \cdots + t_k, 1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_k, t_k - t_1 \leqslant 1.$$

对于任意两个整数 $k$ 和 $n$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 整数 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 是唯一的. 例如, 若 $n = 11$, $k = 3$, 则 $t_1, t_2, t_3$ 为 3, 4, 4; 若 $n = 14$, $k = 6$, 则 $t_1, t_2, \cdots, t_6$ 为 2, 2, 2, 2, 3, 3. 完全 $k$ 部图 $K_{t_1,t_2,\cdots,t_k}$ 称为是**Turán 图** $T_{n,k}$. 因而, Turán 图 $T_{n,k}$ 是 $n$ 阶 $k$ 部图, 其每个部集的基数最多相差 1. $T_{n,k}$ 的每个部集的基数或为 $\lfloor n/k \rfloor$, 或为 $\lceil n/k \rceil$. 若 $n/k$ 是整数, 则 $\lfloor n/k \rfloor = \lceil n/k \rceil$; 若 $n/k$ 不是整数, 设 $r$ 是 $n$ 除以 $k$ 的余数, 则 $r$ 恰好是 $T_{n,k}$ 具有基数为 $\lceil n/k \rceil$ 的部集的个数.

**定理 11.16** 设 $k$ 和 $n$ 为整数, 且满足 $1 \leqslant k \leqslant n$, $n \geqslant 3$. 在所有 $n$ 阶 $k$ 部图中, Turán 图 $T_{n,k}$ 是唯一具有最大边数的图.

**证** [反证法] 在所有 $n$ 阶 $k$ 部图中, 设 $G$ 是一个具有最大边数的图. 设 $G$ 的部集为 $V_1, V_2, \cdots, V_k$, 其中 $V_i$ 的基数为 $n_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_k$. 则

$$G \cong K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}.$$

假设 $n_k - n_1 \geqslant 2$. 设 $H \cong K_{n_1+1,n_2,\cdots,n_k-1}$, 即 $H$ 可认为是由图 $G$ 通过把其最大部集 $V_k$ 中的一个顶点 $v$ 移至最小部集 $V_1$ 后所得到的 $n$ 阶完全 $k$ 部图. 这种移动可导致与 $v$ 关联的 $G$ 中 $n_1$ 条边的损失, 和 $H$ 中 $n_k - 1$ 条新边的获得, 且无其他改变. 由于 $n_k - n_1 \geqslant 2$, 故 $H$ 的边数多于 $G$. 该矛盾可推出 $n_k - n_1 \leqslant 1$, 即 $G$ 同构于 Turán 图 $T_{n,k}$. ∎

结合定理 11.15 和定理 11.16, 我们可得到如下结论.

**定理 11.17(Turán 定理)** 设 $k$ 和 $n$ 为整数, 且满足 $2 \leqslant k < n$. 在所有不包含 $K_{k+1}$ 作为子图的 $n$ $(n \geqslant 3)$ 阶图中, Turán 图 $T_{n,k}$ 是唯一的具有最大边数的图.

前面已经提到, 对于一个给定的正整数 $n$ 和一个阶至多为 $n$ 的图 $F$, 存在一个最小正整数 $m$, 使得任意阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图均包含同构于 $F$ 的子图. 对于每对整数 $k, n$ $(2 \leqslant k < n)$, 当 $F \cong K_{k+1}$ 时, Turán 定理确定了 $m$ 的精确值.

下面看该类问题的另外一个特例, 即 $F \cong C_n$ $(n \geqslant 3)$. 所考虑问题就是: 一个 $n$ $(n \geqslant 3)$ 阶图至少有多少条边才能保证它是 Hamilton 的. 若 $n = 3$, 唯一的 3 阶 Hamilton 图是 $K_3$. 对于 $n = 4$, 从图 11.10 中的图 $G_1$ 可以看出, 4 条边并不是足够的. 大家知道, 边数为 5 的 4 阶图是唯一的 (如图 11.10 中图 $G_2$ 所示), 该图是 Hamilton 的. 对于 $n = 5$, 讨论变得有些复杂. 不难发现, 边数为 7 的 5 阶图 $G_3$ 不是 Hamilton 的. 这表明: 要保证 5 阶图 $G$ 是 Hamilton 的, 其边数至少为 8. 事实上, 我们可以证明 8 就是答案. 综上所述, 若图 $G$ 阶为 $n$ $(3 \leqslant n \leqslant 5)$, 边数至少为 $m$ $(m = \binom{n-1}{2} + 2)$, 则 $G$ 是 Hamilton 的. 上述结论对每个整数 $n \geqslant 3$ 都成立. 在证明这一结论之前, 我们先回顾一些结论. 首先, 由定理 6.6, 若图 $G$ 为 $n \geqslant 3$ 阶的图,

且对 $G$ 的每对不邻接的顶点 $u, v$, $\deg u + \deg v \geqslant n$, 则 $G$ 是 Hamilton 的. 此外, 对于任意整数 $k \geqslant 2$,

$$\binom{k}{2} = 1 + 2 + \cdots + (k-1).$$

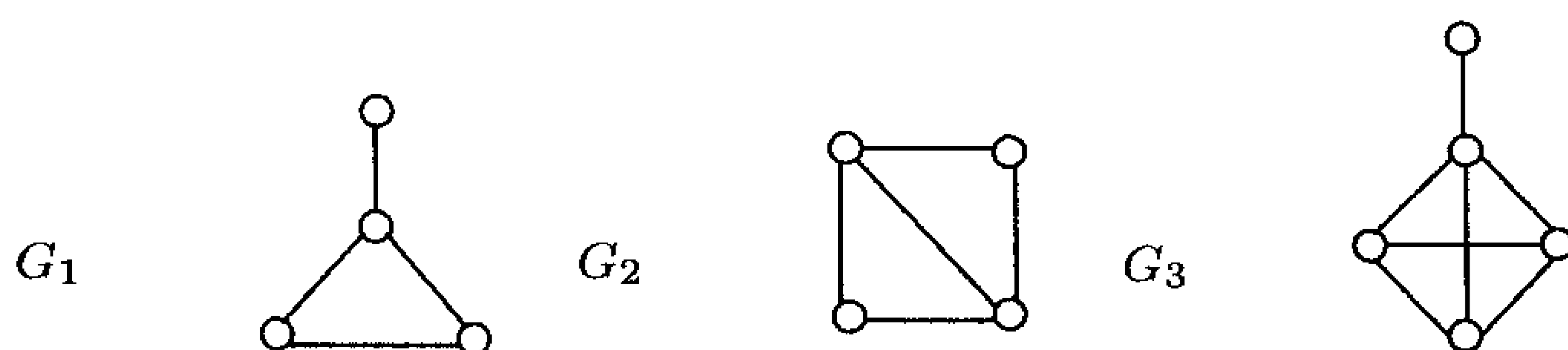



图 11.10　考察非 Hamilton 图的最大边数

**定理 11.18**　每个阶为 $n \geqslant 3$ 且边数至少为 $\binom{n-1}{2} + 2$ 的图是 Hamilton 的.

**证**　[最小反例证法] 假设上述结论不正确, 则存在一个最小的正整数 $n$, 以及一个 $n$ 阶图 $G$, $G$ 的边数为 $\binom{n-1}{2} + 2$, 但 $G$ 不是 Hamilton 的. 因为结论对 3, 4, 5 阶图成立, 所以上述 $n \geqslant 6$. 由于 $G$ 不是 Hamilton 图, 显然 $G$ 不是完全图.

设 $u$ 和 $v$ 是 $G$ 的任两个不邻接的顶点, 则 $H = G - u - v$ 的边数为 $\binom{n-1}{2} + 2 - \deg u - \deg v$. 由于 $H$ 的阶为 $n-2$, 则 $H$ 的边数不可能超过 $\binom{n-2}{2}$. 因而,

$$\binom{n-1}{2} + 2 - \deg u - \deg v \leqslant \binom{n-2}{2}.$$

故

$$\begin{aligned}\deg u + \deg v &\geqslant \binom{n-1}{2} - \binom{n-2}{2} + 2\\ &= [1 + 2 + \cdots + (n-2)] - [1 + 2 + \cdots + (n-3)] + 2 = n.\end{aligned}$$

由定理 6.6, 图 $G$ 是 Hamilton 的, 导致矛盾. ■

## 习题

11.18　证明定理 11.13: 设 $G$ 为 $2k+1 \geqslant 3$ 阶图. 若 $G$ 的边数至少为 $k^2+k+1$, 或 $G$ 的边数为 $k^2+k$ 且 $G \ncong K_{k,k+1}$, 则 $G$ 包含三角形.

11.19　(a) 在所有不包含 $K_4$ 的 10 阶图中, 具有最大边数的图是唯一的, 记为 $G$. 确定 $G$ 和它的边数.

(b) 确定满足下面条件的最小正整数 $m$, 使得每个阶为 10 且边数为 $m$ 的图均包含 $K_4$ 作为子图.

11.20　证明: 每个阶为 $n \geqslant 4$, 边数至少为 $2n-3$ 的图均包含 $K_4 - e$ 或者 $K_4 - e$ 的一个细分.

11.21　确定 Turán 图 $T_{n,k}$, 其中

(a) $n = 5$, $k = 1$;

(b) $n = 7$, $k = 2$;

(c) $n = 6$, $k = 3$;

(d) $n = 6$, $k = 4$;

(e) $n = k = 5$.

11.22 设 $n \geqslant 3$ 为整数. 确定满足下述条件的最小正整数 $m$, 使得每个阶为 $n$, 边数为 $m$ 的图 $G$ 均

(a) 包含 $P_3$ 作为子图.

(b) 包含 $P_3$ 作为诱导子图.

11.23 设 $n \geqslant 2$ 为整数. 确定满足下面条件的最小正整数 $m$, 使得每个阶为 $n$, 边数为 $m$ 的图 $G$ 均包含一个度至少为 $k$ 的顶点 (其中 $1 \leqslant k < n$).

11.24 设 $n \geqslant 2$ 为偶数. 确定满足下面条件的最小正整数 $m$, 使得每个阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图 $G$ 均包含 1 因子.

11.25 设 $n \geqslant 2$ 为整数. 确定满足下面条件的最小正整数 $m$, 使得每个阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图 $G$ 均包含一条 Hamilton 路.[提示：利用定理 11.18]

11.26 设 $n \geqslant 4$ 为整数. 确定满足下面条件的最小正整数 $m$, 使得每个阶为 $n$, 边数为 $m$ 的图 $G$ 均包含长度为 $3, 4, \cdots, n$ 的圈. [提示：考虑习题 11.25.]

11.27 利用数学归纳法证明定理 11.18：*每个阶为 $n \geqslant 3$, 边数至少为 $\binom{n-1}{2} + 2$ 的图是 Hamilton 的.*

## 11.3 专题探索：彩色 Ramsey 数

我们已经知道, Ramsey 数起源于整数子集的染色问题. 下面将介绍一个与 Ramsey 数密切相关的概念, 它涉及对某个整数序列里的整数染色问题. 一个有限序列的**长度 (length)**是指该序列里的元素个数. 一个整数序列称为是**单色的 (monochromatic)**, 若该序列中的每个整数都染成相同颜色; 一个整数序列称为是**彩色的 (rainbow)**, 若该序列中任意两个整数都染成不同的颜色. 一个正整数序列称为是**等差序列 (arithmetic sequence)**, 若该序列可表示成 $a, a+b, a+2b, \cdots, a+(n-1)b$, 其中 $a, b, n$ 为某些正整数. 1927 年, Bartel Leendert van der Waerden 证明了下面定理.

**定理 11.19** *对于任意两个正整数 $n$ 和 $k$, 存在正整数 $N$, 使得下面命题成立：若 $1, 2, \cdots, N$ 中每个整数都染成颜色 $1, 2, \cdots, k$ 中的一种颜色, 则存在长度为 $n$ 的单色等差序列.*

Bartel van der Waerden (1903–1996) 是一名多产的数学家, 他对数学的许多分支都有兴趣, 包括代数几何、抽象代数、数学史等. 他还是四十多名博士的导师. 对于给定的正整数 $n$ 和 $k$, 定理 11.19 中 $N$ 的最小值称为是**van der Waerden 数 (van der Waerden number)**. 1975 年, Endre Szemerédi 给出定理 11.19 的推广结果：

*每个具有正密度的正整数序列都包含任意长度的等差序列.*

(对于正整数序列 $s$, 设 $A_n(s)$ 为 $s$ 的位于区间 $[0,n]$ ($n \in \mathbf{N}$) 上元素项的个数. 若 $\lim_{n\to\infty} A_n(s)/n$ 存在, 则称该极限为 $s$ 的**密度 (density)**.) Szemerédi 定理曾经是 Paul Erdős 和 Paul Turán 于 1936 年提出的一个猜想. Klaus Roth, 1958 年 Fields 奖 (相当于数学界的诺贝尔奖) 获得者, 于 1953 年验证了该定理在 $k=3$ 时的情形. W. Timothy Gowers, 1998 年 Fields 奖获得者, 给出了定理的一个新证明以及当 $k=4$ 时的一个更好的界.

受 van der Waerden 工作的启发, Paul Erdős 和 Ronald Graham 定义: 对于正整数 $n$, 整数 $H(n)$ 是满足下面条件的最小正整数 $N$: 若 $1,2,\cdots,N$ 中每个整数染成颜色 $1,2,\cdots,k$ 中任一种颜色, 则存在一个长度为 $n$ 的或者为单色的或者为彩色的等差序列. 针对于图的一个关联定理要归功于 Paul Erdős 和 Richard Rado.

若 $F$ 是所有边都染成相同颜色的图, 则称 $F$ 为**单色 (monochromatic)**$F$. 若 $F$ 的所有边都染成不同的颜色, 则称 $F$ 为**彩色 (rainbow)**$F$. 设完全图 $K_n$ 的顶点集为由 $n$ 个正整数构成的集合. $K_n$ 的一个边染色称为是**最小染色 (minimum coloring)**, 若两条边 $ij$ 和 $k\ell$ 染成相同颜色当且仅当 $\min\{i,j\}=\min\{k,\ell\}$; $K_n$ 的一个边染色称为是**最大染色 (maximum coloring)**, 若两条边 $ij$ 和 $k\ell$ 染成相同颜色当且仅当 $\max\{i,j\}=\max\{k,\ell\}$.

顶点集为 $\{1,2,3,4,5\}$ 的 $K_5$ 的一个边染色可如图 11.11 所示. 该图包含一个单色三角形, 一个彩色三角形, 一个最小染色三角形和一个最大染色三角形.

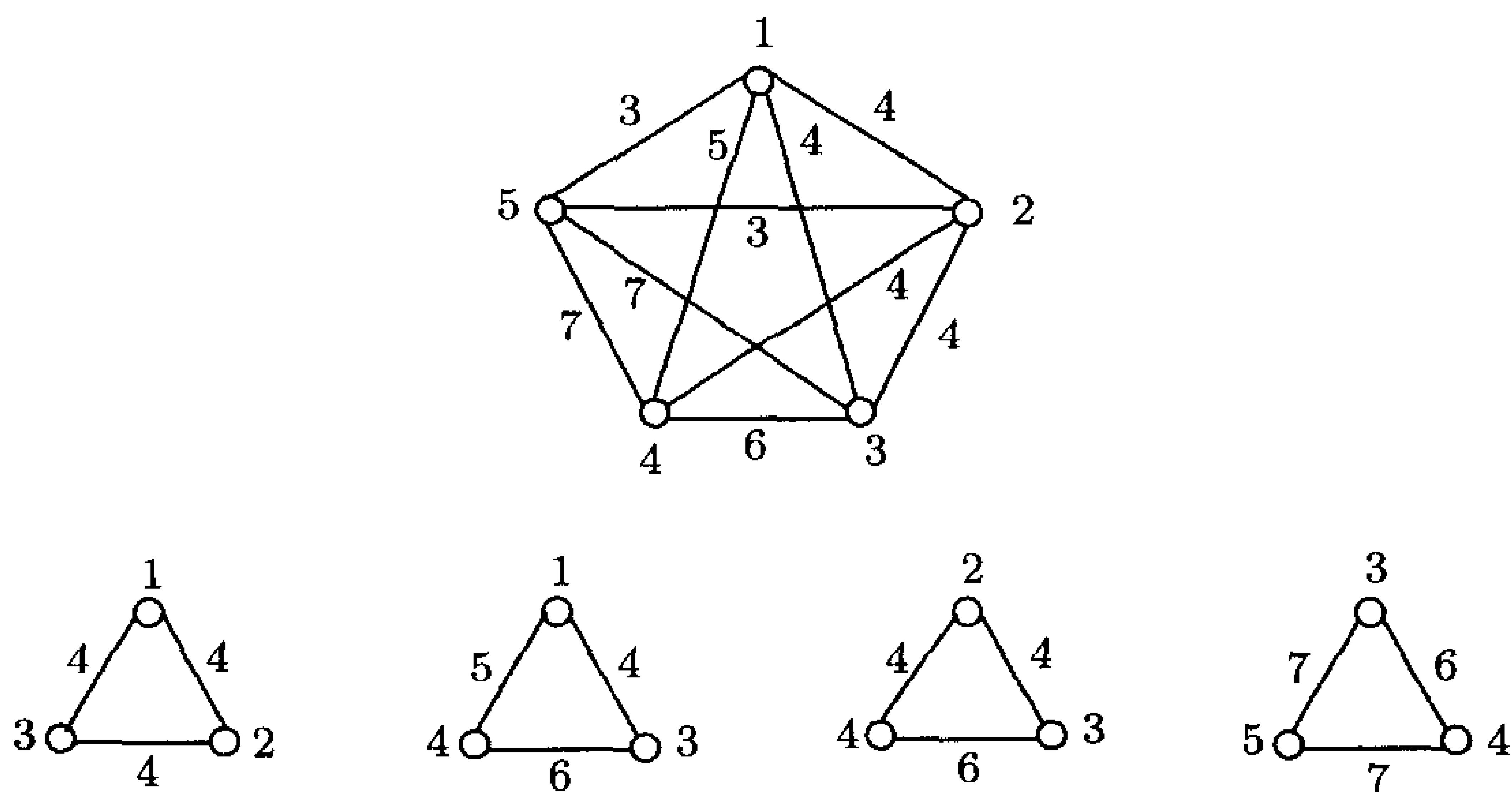


图 11.11　$K_5$ 的染色

Erdős 和 Rado 证明了, 若一个充分大完全图的边被一个无限集合染色, 则必存在给定阶数的完全子图, 它或是单色的, 或是彩色的, 或有最小染色, 或有最大染色.

**定理 11.20**　*对于每个正整数 $k$, 存在正整数 $n$ 使得下面命题成立: 若顶点集为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $K_n$ 的每条边被任一正整数染色, 则存在 $k$ 阶完全子图, 它或是单*

色的, 或是彩色的, 或有最小染色, 或有最大染色.

Arie Bialostocki 和 William Voxman 定义：对于一个非空图 $F$, **彩色 Ramsey 数 (rainbow Ramsey number)** $RR(F)$ 定义为满足下面条件的最小正整数 $n$, 使得：若完全图 $K_n$ 的每条边被任一种颜色染色, 则或产生一个单色 $F$, 或产生一个彩色 $F$. 然而, 并不是所有的图都可以定义彩色 Ramsey 数.

**定理 11.21** 设 $F$ 为一个非空图. 则彩色 Ramsey 数 $RR(F)$ 有定义当且仅当 $F$ 是一个森林.

**证** [逆否证法, 直接证法] 首先, 假设 $F$ 不是森林, 则 $F$ 包含一个长度为 $k \geqslant 3$ 的圈 $C$. 设 $n$ 为一个整数, $n \geqslant k$. 设完全图 $K_n$ 的顶点集为 $\{1, 2, \cdots, n\}$. 对于 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 将颜色 $i$ 分配给边 $ij$, 这显然是 $K_n$ 的最小染色. 我们可以假设 $C: v_1, v_2, \cdots, v_k, v_1$, 其中 $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$, 且

$$\min\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} = v_1.$$

因而, 边 $v_1v_2$ 和 $v_1v_k$ 的颜色是 $v_1$, 而边 $v_2v_3$ 的颜色不是 $v_1$. 即, 在 $K_n$ 的这种边染色下, 没有单色圈或彩色圈. 因此, 若 $F$ 是一个含圈的图, 则 $RR(F)$ 没有定义.

下面证明充分性. 设 $F$ 是一个 $k$ 阶的森林. 由定理 11.20, 则存在正整数 $n$, 使得下面命题成立：若 $K_n$ 的边被正整数集 (无论以何种方式) 染色, 则存在 $k$ 阶完全子图 $G$, 使得它或是单色的, 或是彩色的, 或有最小染色, 或有最大染色. 由于 $G$ 包含同构于 $F$ 的子图, 若存在一个单色 $G$ 或一个彩色 $G$, 则必存在一个单色 $F$ 或一个彩色 $F$.

假设 $G$ 或有最小染色, 或有最大染色. 不失一般性, 假设 $G$ 有最小染色. 我们将证明, 在此情形下 $G$ 含有一个彩色 $F$. 若 $F$ 是不连通的, 则通过在 $F$ 上添加边, 可构造一个阶为 $k$ 的树 $T$. 选择 $T$ 的某个顶点 $r$ 作为 $T$ 的根. 假设 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$, 其中

$$v_1 < v_2 < \cdots < v_k.$$

按照到 $r$ 的距离, 给 $T$ 中每个顶点按顺序 $v_k, v_{k-1}, v_{k-2}, \cdots, v_1$ 标号. 也就是说, 根 $r$ 标号为 $v_k$, 某个与 $r$ 邻接的顶点标号为 $v_{k-1}$, 依此类推, 直到 $T$ 中距离 $r$ 最远的顶点, 将该顶点标号为 $v_1$. ($k = 8$ 时的标号可如图 11.12 所示.)

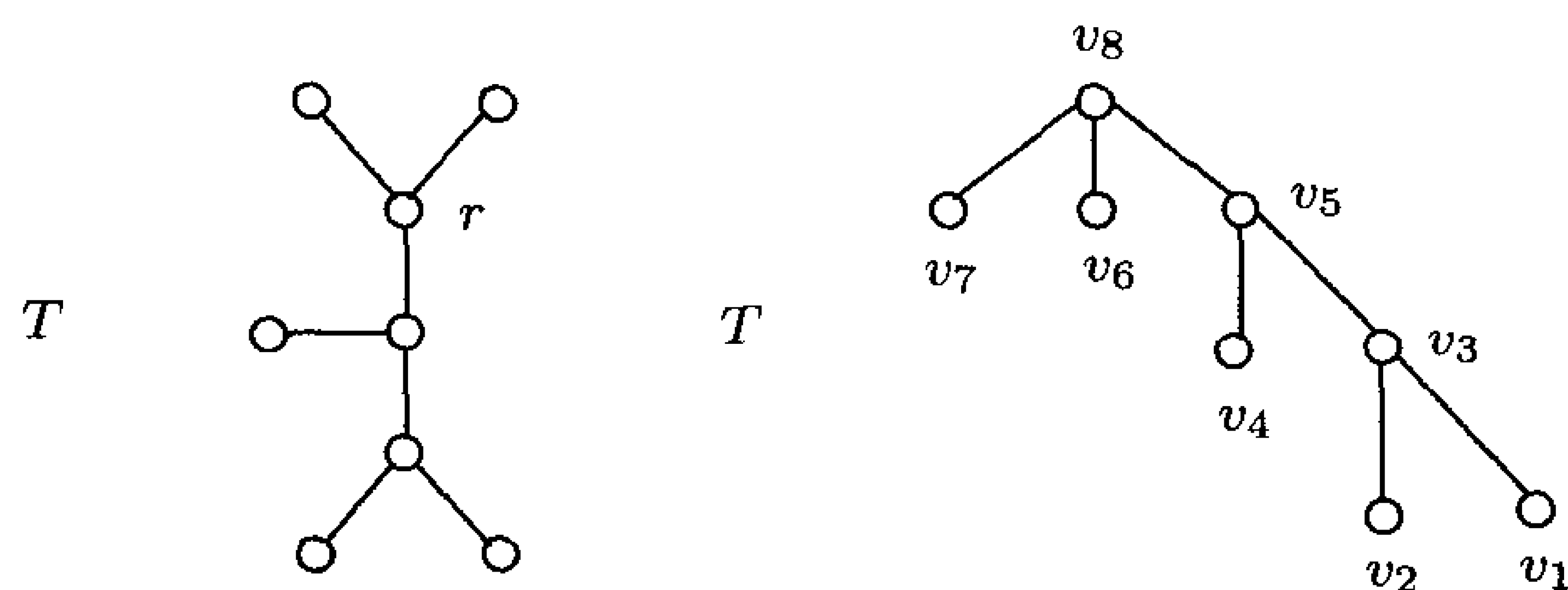



图 11.12 定理 11.21 证明中的一个步骤

由此, $G$ 的最小染色把颜色 $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$ 分配给 $T$ 的每条边. 此时, 我们可得到一个彩色 $T$, 从而得到一个彩色 $F$. 因此, 在任何情形下都可以定义彩色 Ramsey 数. ■

下面考虑一个例子.

**例 11.22** *确定* $RR(K_{1,3})$.

**解** 因为图 11.13 中 $K_5$ 的红 – 蓝染色既不含单色 $K_{1,3}$, 也不含彩色 $K_{1,3}$, 所以 $RR(K_{1,3}) \geqslant 6$. 下面只需证明 $RR(K_{1,3}) \leqslant 6$. 给定 $K_6$ 的一个不含单色 $K_{1,3}$ 的边染色, 考虑 $K_6$ 的一个顶点 $v$. 由于 $v$ 关联 5 条边, 则这 5 条边中至多有两条被染成相同颜色. 因此, 与 $v$ 关联的 5 条边中有三条边被染成了不同颜色, 从而产生一个彩色 $K_{1,3}$. ◇

前面考虑的是对于单个图 (森林) 的彩色 Ramsey 数, Linda Eroh 将这一概念按下述方式推广到两个图的彩色 Ramsey 数. 对于两个非空图 $F_1$ 和 $F_2$, **彩色 Ramsey 数 (rainbow Ramsey number)** $RR(F_1, F_2)$ 定义为满足下面条件的最小正整数 $n$: 若 $K_n$ 的每条边被任一颜色 (数) 染色, 则或存在一个单色 $F_1$, 或存在一个彩色 $F_2$. 考虑到定理 11.21, 我们不能期望 $RR(F_1, F_2)$ 对每对非空图 $F_1, F_2$ 都有定义. 事实上, Eroh 确定了 $RR(F_1, F_2)$ 有定义的充要条件.

**定理 11.23** *设 $F_1$ 和 $F_2$ 为两个非空图. 则彩色 Ramsey 数 $RR(F_1, F_2)$ 存在当且仅当 $F_1$ 是星图或 $F_2$ 是森林.*

设 $F_1$ 和 $F_2$ 分别为 $n_1$ 阶和 $n_2$ 阶的非空图, 且使得 $RR(F_1, F_2)$ 有定义, 则

$$RR(F_1, F_2) \geqslant \max\{n_1, n_2\}.$$

下面我们考虑两个例子, 这两个例子均涉及 3 阶路 $P_3$ 和图 $F$ (如图 11.14 所示) 的彩色 Ramsey 数.

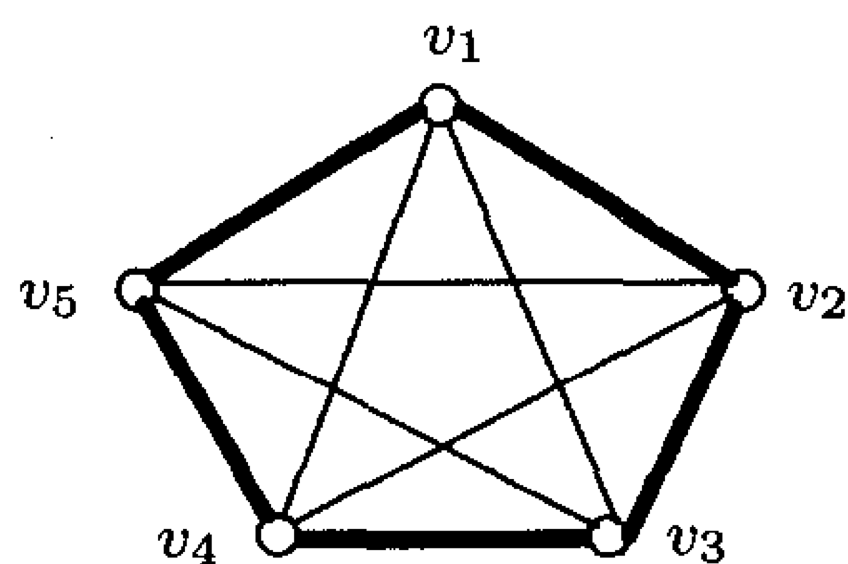



图 11.13 $K_5$ 的红 – 蓝染色

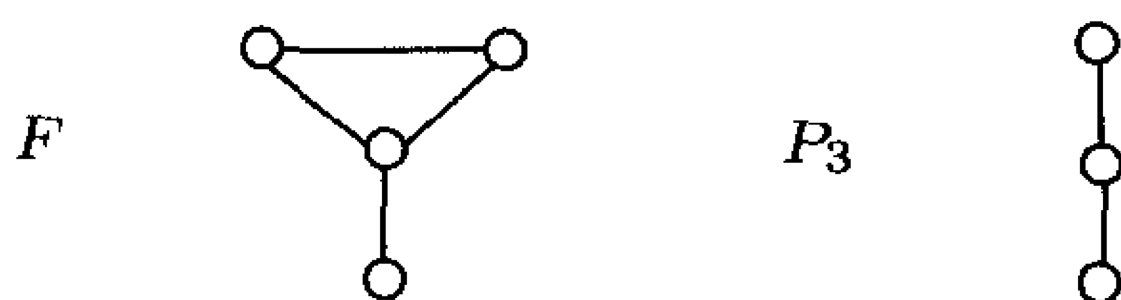



图 11.14 图 $F$ 和 $P_3$

**例 11.24** $RR(F, P_3) = 4$.

**解** 由于 $P_3$ 为森林, 由定理 11.23 知, $RR(F, P_3)$ 存在. 因为 $F$ 的阶为 4, 所以 $RR(F, P_3) \geqslant 4$. 首先, 我们将 $K_4$ 的每条边用任一颜色 (数) 染色. 假设不存在彩色

$P_3$, 则 $K_4$ 的任意两条邻接的边均被染成了相同的颜色. 进而, $K_4$ 的所有边均被染成了相同的颜色. 故存在单色 $F$, 所以 $RR(F, P_3) = 4$. ◇

下面我们交换 $F$ 和 $P_3$ 的次序.

**例 11.25** $RR(P_3, F) = 5$.

**解** 由于 $P_3 \cong K_{1,2}$ 是星图, 由定理 11.23 知, $RR(F, P_3)$ 存在. 考虑如图 11.15 所示的 $K_4$ 的边染色. 在该边染色中, 我们使用了颜色 1, 2, 3. 不难发现, 该边染色既不包含单色 $P_3$ 也不包含彩色 $F$, 故 $RR(P_3, F) \geqslant 5$.

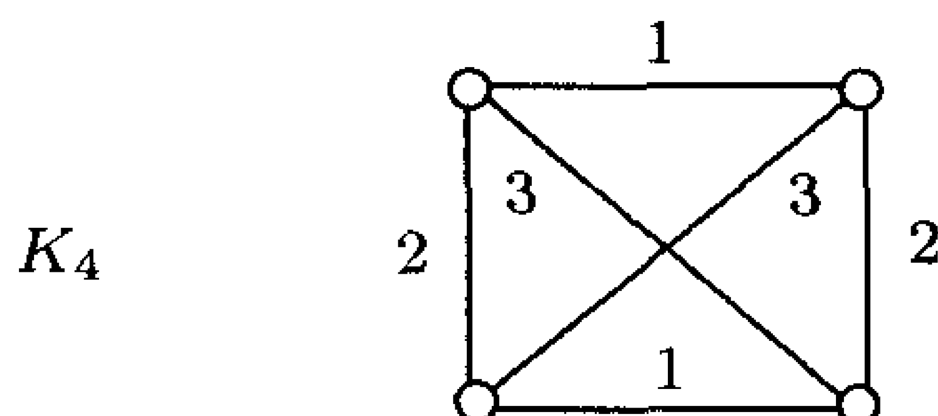



图 11.15 $K_4$ 的一个边染色, 它不含单色 $P_3$ 也不含彩色 $F$

给定 $K_5$ 的一个边染色, 并假设该边染色不包含单色 $P_3$. 设 $K_5$ 的顶点为 $v, v_1, v_2, v_3, v_4$. 由于不包含单色 $P_3$, 故可假设边 $vv_i$ 染色为 $i(i = 1, 2, 3, 4)$, 如图 11.16 所示.

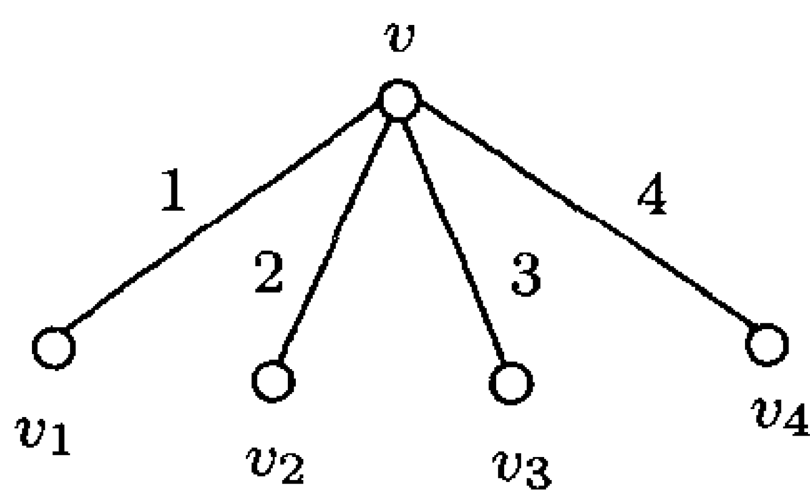



图 11.16 $K_5$ 中边 $vv_i$ 的染色 $(i = 1, 2, 3, 4)$

由于 $K_5$ 不含单色 $P_3$, 故边 $v_1v_2$ 不可能被 1 或 2 染色. 不管 $v_1v_2$ 是被 3 或 4, 或其他颜色染色, 我们均可得到一个彩色 $F$. 因而, $RR(P_3, F) = 5$. ◇

例 11.24 和例 11.25 表明：尽管 $RR(F_1, F_2)$ 和 $RR(F_2, F_1)$ 均有定义, 但它们未必相等. 这一点不同于 Ramsey 数.

设 $F_1$ 和 $F_2$ 为两个非空图, 其中 $F_2$ 的边数为 $m$. **受限彩色 Ramsey 数 (restricted rainbow Ramsey number)** $rr(F_1, F_2)$ 定义为满足下面条件的最小正整数 $n$, 使得：若 $K_n$ 的每条边被 (至多)$m$ 种颜色中的任一种颜色染色, 则或存在单色 $F_1$, 或存在彩色 $F_2$.

下面通过计算 $rr(2K_2, K_3)$ 来说明受限彩色 Ramsey 数. 注意到, 若连通图 $F$ 不包含 $2K_2$, 则它的任意两条边都是邻接的, 即 $F$ 或是星图, 或是 $K_3$.

**例 11.26**　确定 $rr(2K_2, K_3)$.

**解**　如图 11.17 所示, $K_5$ 的三种颜色 (红、蓝和绿) 的染色不包含单色 $2K_2$, 其中画成粗体的边表示红边, 画成标准的边表示蓝边, 画成虚线的边表示绿边. 考虑到任一彩色 $K_3$ 必包含红边, 因此包含 $v_1$. 然而, $v_1$ 仅关联红边, 所以包含 $v_1$ 的任一 $K_3$ 均有两条红边. 因此, 该染色不存在彩色 $K_3$, 故 $rr(2K_2, K_3) \geqslant 6$.

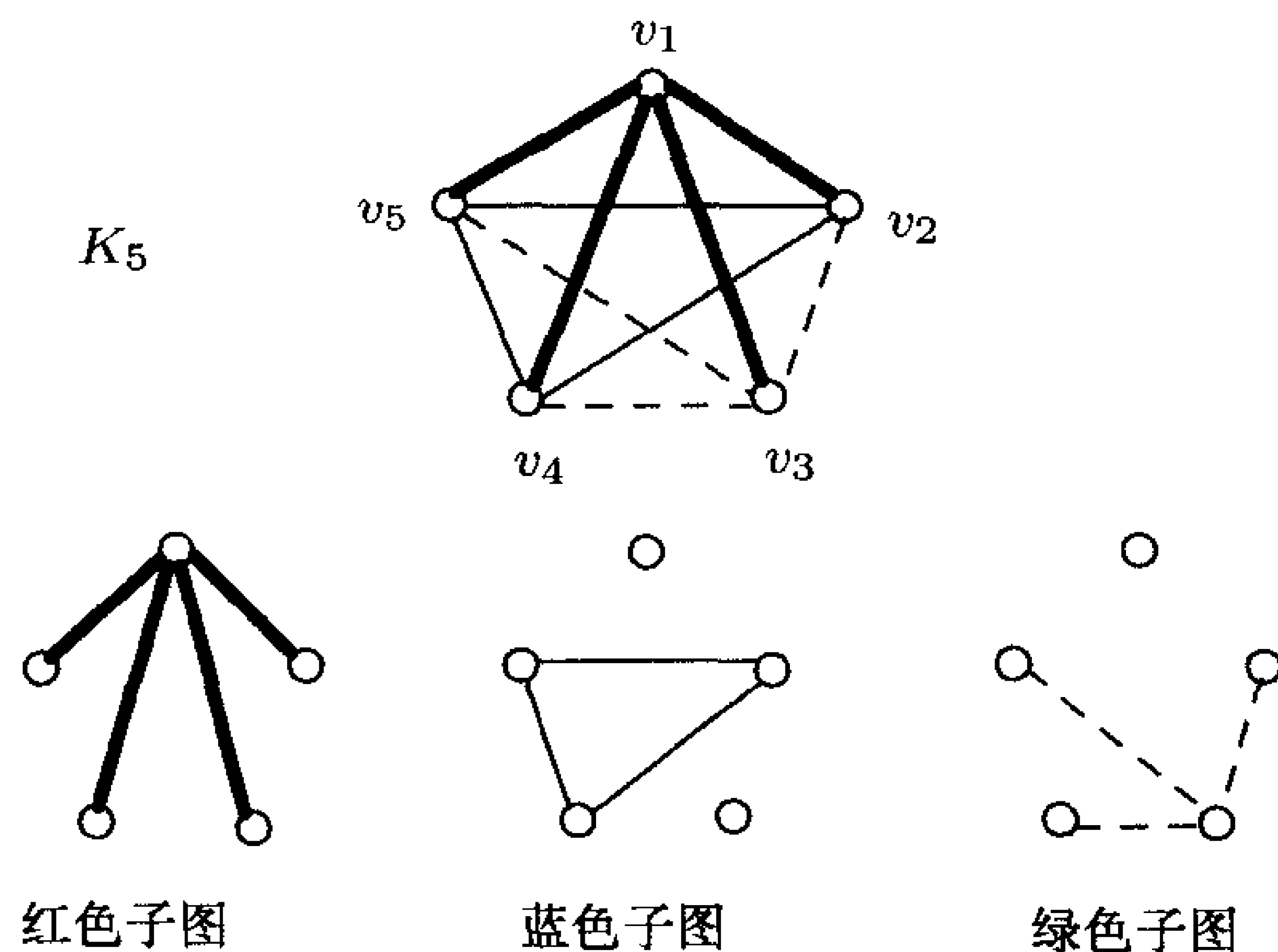



图 11.17　$K_5$ 的一个红 – 蓝 – 绿染色

为了证明 $rr(2K_2, K_3) \leqslant 6$, 考虑给定 $K_6$ 的至多三种颜色 (红、蓝和绿) 的一个染色. 由于 $K_6$ 有 15 条边, 则其中至少 5 条边被染成了相同的颜色. 若 $K_6$ 中有 6 条或 6 条以上颜色相同的边, 则必存在两条不邻接且颜色相同的边, 从而得到了一个单色 $2K_2$. 因而, 我们可以假设 $K_6$ 中每种颜色的边各有 5 条, 且这 5 条边关联于一个共同的顶点. 假设 5 条红边关联于顶点 $v$, 5 条蓝边关联于顶点 $u$. 由于边 $uv$ 不可能同时为红色和蓝色, 从而导致矛盾.　◇

## 习题

11.28　确定 $RR(K_{1,4})$.

11.29　对于图 11.18 中的树 $T$, 确定 $RR(T)$.

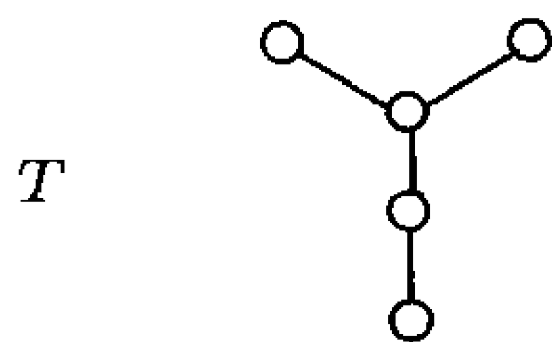



图 11.18　习题 11.29 的树 $T$

11.30　(a) 确定 $RR(P_3, 2K_2)$.

(b) 确定 $RR(2K_2, P_3)$.

11.31　确定 $RR(K_2, mK_2)$.

11.32　确定 $RR(C_n, P_2)$.

11.33 确定 $RR(C_n, P_3)$.

11.34 确定 $RR(K_{1,n}, P_3)$.

11.35 设图 $F_1$ 为图 $G_1$ 的子图, 图 $F_2$ 为图 $G_2$ 的子图, 且 $RR(F_1, F_2)$ 和 $RR(G_1, G_2)$ 都存在. 证明：$RR(F_1, F_2) \leqslant RR(G_1, G_2)$.

11.36 证明：$RR(K_{1,3}, 3K_2) \geqslant 7$.

11.37 给出 $rr(K_3, K_3)$ 的上界和下界.

11.38 考虑下面问题：对于哪些类型的非空图 $F_1$ 和 $F_2$, 可使得 $rr(F_1, F_2)$ 有定义?

11.39 一个边已被染色的非空图 $F$ 称为是**星染色的 (star-colored)**, 若 $F$ 的任意两条不邻接的边都染成不同的颜色. 非空图 $F$ 的**galaxy Ramsey 数** $GR(F)$ 定义为满足下面条件的最小正整数 $n$, 使得：若 $K_n$ 的每条边被任一种颜色染色, 则或存在单色 $F$, 或存在彩色 $F$, 或存在星染色的 $F$. 对于图 11.14 中的图 $F$, 确定 $GR(F)$.

11.40 对于哪些非空图 $F$, galaxy Ramsey 数有定义? (参见上题中 galaxy Ramsey 数的定义.)

## 11.4 延伸阅读：Erdős 数

在 1996 年 9 月 20 日之后的一两天内, 一条消息出现在全世界数学家的电脑屏幕上：在波兰华沙的 Banach 中心召开的图论研讨会上, 参加会议的 Paul Erdős 不幸去世. 从此数学界损失了一位独一无二的非凡的数学家, 无论在哪个方面他都被认为是成就卓著的.

1913 年 3 月 26 日, Paul Erdős(读为 AIR-dish) 出生在匈牙利布达佩斯的一个犹太人家庭. Paul Erdős 出生前不久, 他的两个姐姐都被猩红热夺去了生命. 1914 年, 欧洲爆发第一次世界大战, Paul Erdős 的父亲被俄国人俘虏, 作为战俘送到西伯利亚关押了 6 年. Paul Erdős 是公认的数学神童. 在 4 岁时, 他在数字方面表现出极大兴趣和令人惊叹的才能, 他独立地发现了负数. Paul Erdős 还可以心算出四位数的乘积.

Paul Erdős 的父母都是数学教师, 他们对孩子进行了良好的早期教育. 在 Erdős 16 岁时, 父亲给他讲解无穷级数、集合论以及一些他一生都热爱的课题.

高中时期, Paul Erdős 酷爱解决难题. 作为全国数学竞赛的冠军, 他 (和 Paul Turán, Tibor Gallai 一起) 被送到布达佩斯的 Pázmány 大学深造. Erdős 和朋友们经常在布达佩斯的小山上散步, 谈论很多的话题, 但数学始终是他们谈论的中心.

19 岁时, Erdős 在 Leopold Fejér 的指导下拿到了数论方面的博士学位 (尽管 Fejér 是因分析方面的工作而闻名). Erdős 对 Pafnuty Lvovich Chebyshev 的定理给出了优美的证明, 该定理为：*对每个整数 $n \geqslant 2$, 在 $n$ 与 $2n$ 之间存在一个素数*. Chebyshev 是一位在数论、概率论及逼近论方面作出重要贡献的俄国数学家. 事实上, Erdős 证明了：在 $n$ 和 $2n$ 之间存在一个属于某个确定等差数列的素数.

我们已经数次提到匈牙利数学家对图论的深远影响. 事实上, 杰出的难题解答者及数学教育家 George Pólya (1887—1985) 也出生于布达佩斯. Pólya 是名著*How to Solve It*(如何解决问题) 的作者, 该书销量超过一百万册 (此书最初竟然难以找到英文语种的出版商).

Pólya 给出以下几点理由, 以说明为何匈牙利人在数学方面产生重大影响: (1) 许多针对高中生的数学期刊激发了学生对数学的兴趣, (2) 开展针对学生的数学竞赛, (3) Leopold Fejér 使很多年轻人迷上了数学.

当 Erdős 于 1934 年毕业时, 他已被认为是一流的数论学家. 依靠四年的奖学金, 他来到英国的曼彻斯特. 在那里, 他频繁访问各个大学, 从事研究工作. 随着第二次世界大战在欧洲境内爆发, 他离开欧洲前往美国, 随后的十年再也没有回到过欧洲. 1938 到 1939 年间, Erdős 在高等研究院 (the Institute for Advanced Study) 设立了一个奖学金. 他认为这是自己在数学上最有价值的一年. 就是在这一年概率数论诞生了. 在此期间, Erdős 还解决了维数理论中一个著名的未解之题. 尽管如此,Erdős 奖学金仍然没有得到维持. Erdős 仅靠同事们的接济维持生计.

1943 年, Erdős 获得普度大学的研究讲师职位, 1945 年再一次失业. 这些都没有阻碍 Erdős 研究的脚步. 1946 年, Erdős 与他人合作, 开创了极图理论的研究.

与此同时, 二战也愈演愈烈. Erdős 为父母和朋友的命运忧心忡忡. 因为, Erdős 的父亲于 1942 年因心脏病发作而去世, 他的母亲沉浸在悲伤之中. 他的母亲, 以及他的密友 Paul Turán, Tibor Gallai 在战争中幸存下来. Vera Sós, Gallai 的一名学生, 也在二战中幸存了下来. 后来她嫁给了 Turán, 成为了 Erdős 的合作研究者.

1948 年, Erdős 在高等研究院结识了年轻数学家 Atle Selberg. 他们合作证明了素数定理: 对于任意正整数 $n$, 设 $\pi(n)$ 为小于 $n$ 的素数的个数. 则

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}, \text{ 即 }, \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}} = 1.$$

著名数学家 Carl Friedrich Gauss 于 1791 年曾猜想该定理是正确的, 但直到 1896 年才由 Jacques Hadamard 和 Charles de la Vallée Poussin 给出独立的证明 (应用复分析理论). 1949 年, Erdős 和 Selberg 独立地给出了该定理的初等证明 (也就是说, 没有用现代复分析方法). 1950 年, Selberg 获得 Fields 奖.

尽管大部分数学家都会有一个固定的工作和生活的地方, 但 Erdős 在其一生的大部分时间里都没有工作和家庭. 他从一个大学到另一个大学, 一个国家到另一个国家, 一个洲到另一个洲, 拜访了一位又一位数学家, 不断讨论, 提出问题, 并解决问题. 和他合作过的人有的知名, 有的不知名, 有的是已成名的数学家, 有的是学生. 在其一生的大部分旅途中, Erdős 与母亲相伴. 1971 年, 91 岁的母亲去世, Erdős 开始独自旅行. 由于他对物质上的事情不感兴趣, 数学界的许多朋友经常照顾他, 或在

日常生活中援助他，送他衣服、食物或钱.

Erdős 是解决难题的高手，经常同时研究几个极具挑战性的难题. 虽然他不是直接发展理论的人，但他所研究的问题经常促使他人建立或发展一些理论. 这些问题主要来源于组合学、图论，以及数论领域. 然而，Erdős 并不满足于单纯的解决难题. 他经常在证明里寻找那些导致结论正确的关键性视角. 尽管个人经济能力有限，Erdős 仍乐意提供金钱激励别人解决难题. 对某些问题的解答，Erdős 不惜出价数千美元. 他对数学上的发现并不保守. 一旦发现有趣的问题，Erdős 就会告诉他刚认识的一些人. 1980 年，在西密歇根大学就有这样一段轶闻. 在 Erdős 赶去参加一个学术讨论会的前几分钟，他提出了一个猜想. 随后，Erdős 向听众提及这个猜想并出资 5 美元寻求它的证明或反例.

Erdős 自己创作或与他人合作的论文大约有 1500 篇，超过任何一位数学家. 由于他访问了太多的地方，遇到了太多数学家，所以他有很多的合作者 —— 超过 500 人. 这与很多数学家，尤其是早期数学家的工作方式相反，他们通常进行独立研究. 对 Erdős 来说，科学研究工作是一项社会活动，需要与他人合作. 有超过 4600 人从未和 Erdős 合作过论文，但他们都和 Erdős 的合作者合作过论文. 这种现象促使了**Erdős 数 (Erdős number)**定义的产生. 仅有 Paul Erdős 拥有 Erdős 数 0. 与 Erdős 合作过的任一位数学家拥有 Erdős 数为 1. 那些不拥有 Erdős 数 1，但与拥有 Erdős 数 1 的数学家合作过的数学家，则拥有 Erdős 数 2. 更一般地，对整数 $k \geqslant 3$，若一名数学家没有小于 $k$ 的 Erdős 数，但与拥有 Erdős 数为 $k-1$ 的数学家合作过，则这名数学家拥有 Erdős 数 $k$.

Erdős 数可以从另一个角度来考虑. 一个**合作图 (collaboration graph)** $G$ 是把所有数学家构成的集合作为顶点集，两个顶点 (数学家) 是邻接的，若他们合作过论文 (该论文可能还有其他合作者). 一个数学家 (顶点) 的 Erdős 数就是在合作图中该顶点与 Erdős 顶点之间的距离. 合作图的一个小子图可如图 11.19 所示. Erdős 数是一个动态概念 (其值随时间变化而变化)，合作图也是如此.

例如，数学家 Ernst Straus 与 Erdős 和 Albert Einstein 都合作过，故 Straus 有 Erdős 数 1. 由于 Einstein 从未和 Erdős 合作过，则他的 Erdős 数为 2. 事实上，Erdős 和 Einstein 仅见过一次，那一次他们讨论的内容是宗教信仰，而不是数学或物理学. 直到本书的写作之际，由奥克兰大学的 Jerrold Grossman 开发的网站包含大量关于 Erdős 数的信息，其网址为：`http://www.oakland.edu/~grossman/erdos`.

Augustin-Louis Cauchy, Leonhard Euler, Arthur Cayley, Paul Erdős 是独自创作或与他人合作数学论文数量最多的四位数学家. 有趣的是，后三位数学家都与图论有联系，前面我们已经看到. 事实上，他们都对图论这门学科作出了大量重要的贡献.

与合作图和 Erdős 数相关的，还有一些从事其他职业的人. 或许，最知名的是以

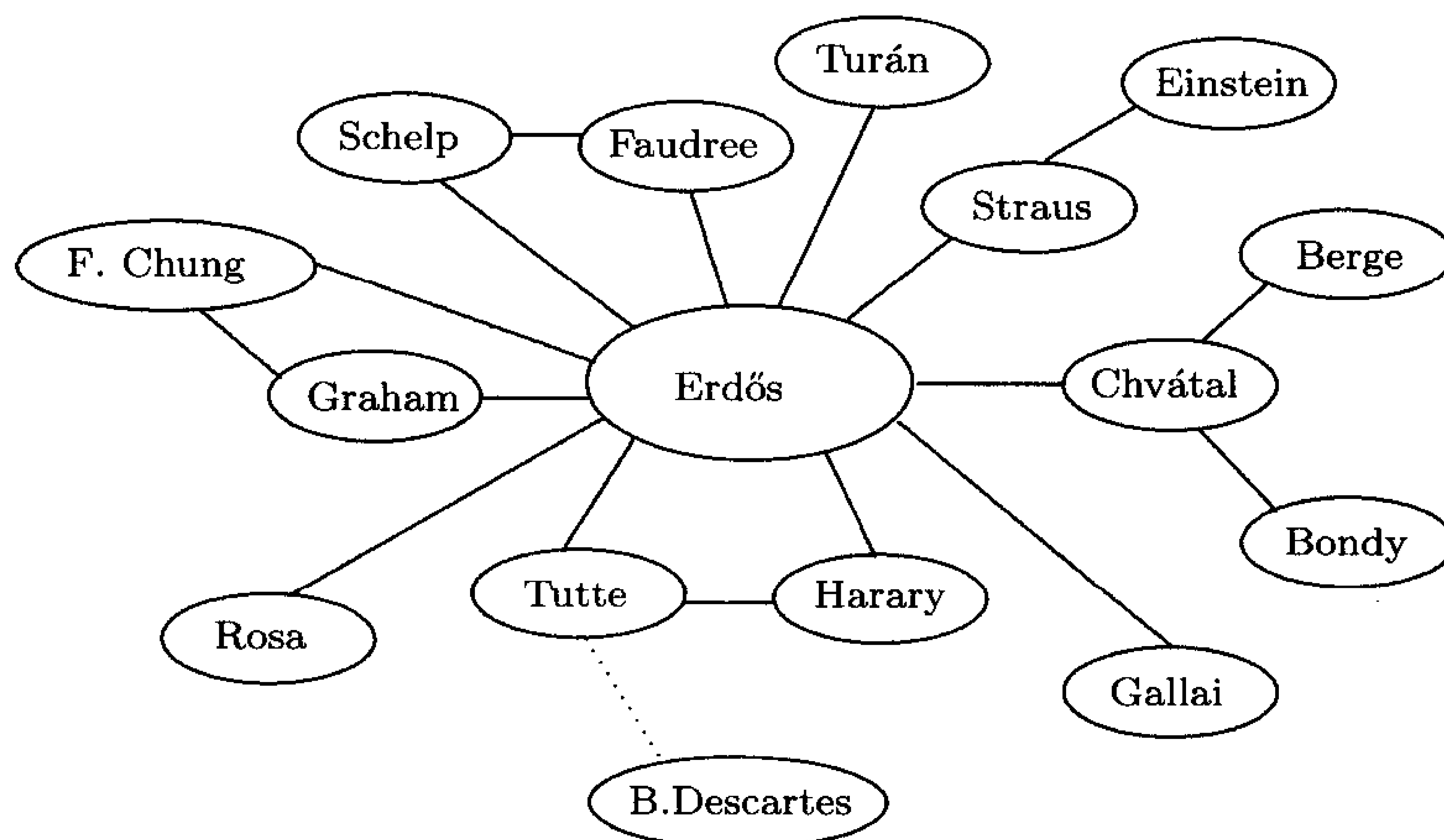



图 11.19 合作图的一个子图

电影演员 Kevin Bacon 命名的**Kevin Bacon 游戏**. 在此情形下, 对应的图是以电影演员作为顶点, 两个演员 (顶点) 是邻接的, 若他们在同一部电影里合作过. 一个演员的**Kevin Bacon 数**定义为图中该演员 (顶点) 与 Kevin Bacon 顶点之间的距离. 因而, 仅有 Kevin Bacon 有 Kevin Bacon 数 0. Tom Hanks 有 Kevin Bacon 数 1, 因为他与 Kevin Bacon 在电影*Apollo* 13 中合作过; Sarah Jessica Parker 有 Kevin Bacon 数 1, 因为她和 Kevin Bacon 在电影*Footloose*中合作过. Cary Grant 有 Kevin Bacon 数 2, 因为他从没有和 Kevin Bacon 在同一部电影中合作过, 却和 Walter Matthau 合作过电影*Charade*, 而 Walter Matthau 在电影*JFK*中与 Kevin Bacon 有过合作. 直到本书的写作之际, 我们可以浏览网站 `http://oracleofbacon.org` 以了解许多电影演员的 Kevin Bacon 数.

Erdős 数和 Kevin Bacon 数来源于心理学家 Stanley Milgram(1933–1984) 于 1967 年的一个实验. Milgram 研究美国的人与人之间的相识关系链. 因为每个人都有自己的熟人, 而熟人又有熟人, 所以 Milgram 断言: 就平均而言, 任意两个人可通过长度为 6 的路相连, 这就导致了习语六度分离的产生.

也有一部以六度分离为名的剧本和电影, 它是由 John Guare 创作, 并由 Will Smith 主演. 故事改编于 David Hampton 的现实生活, Hampton 是一个骗子, 他曾使许多 80 年代的人确信他是电影演员 Sidney Poitier 的儿子.

事实上, 近年来 Erdős 数和 Kevin Bacon 数已经被推广为**Erdős-Bacon 数**. 那些在电影里出演角色且与他人合作过数学论文的人都可能拥有 Erdős-Bacon 数, 即他们的 Erdős 数与 Kevin Bacon 数之和. 例如, 物理学家 Brian Greene 与 John Di Benedetto 在电影*Frequency*中合作过, 而 John Di Benedetto 则在电影*Sleepers*中

与 Kevin Bacon 合作过. 另一方面, Greene 曾与丘成桐合作过一篇论文, 丘成桐与 Ronald Graham 合作过, 而 Ronald Graham 有 Erdős 数 1. 因而, Greene 的 Erdős-Bacon 数为 $2 + 3 = 5$.

前面已经介绍, Ronald Graham 与 Ramsey 数、彩色 Ramsey 数, 以及与 Paul Erdős 都有联系. 事实上, Graham 对图论的许多领域, 数学的众多学科, 以及数学团体都作出了重要的贡献. Ronald Graham 在芝加哥大学攻读过电子工程本科, 在阿拉斯加大学费尔班克斯分校攻读过物理本科. 作为一名本科生, Graham 依靠马戏团表演和为太阳马戏团打工谋生. 1962 年, 在 Derrick Lehmer 的指导下, Graham 获得加州大学伯克利分校的博士学位. 然后, Graham 来到贝尔实验室, 并在此工作了 37 年. 1999 年, 他成为了加州大学圣戈分校的计算机科学和工程的 Irwin–Joan Jacobs 教授.

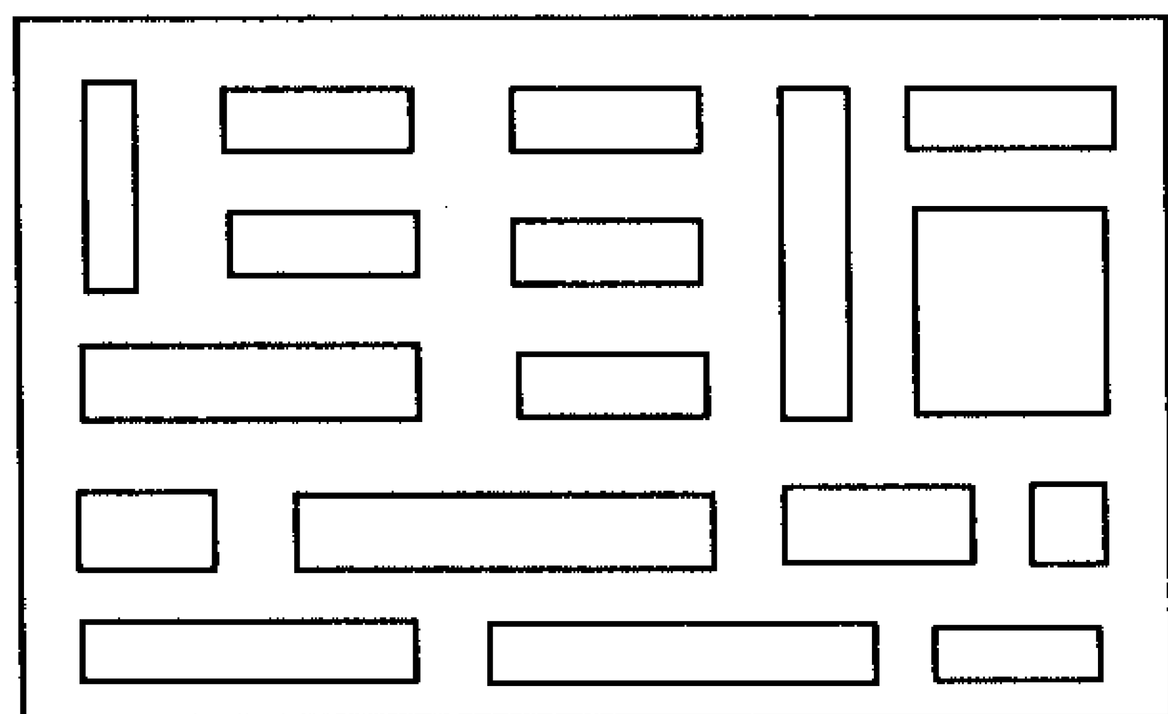
2003 年, Ronald Graham 成为美国数学协会的第六任主席. 1993-1995 年期间, 他还担任过美国数学会的主席.

在数学领域之外, Graham 还是一位熟练的杂耍人, 曾担任国际杂耍人协会的主席. Graham 经常到各地演讲, 包括在迪斯尼世界的迪斯尼研究所.

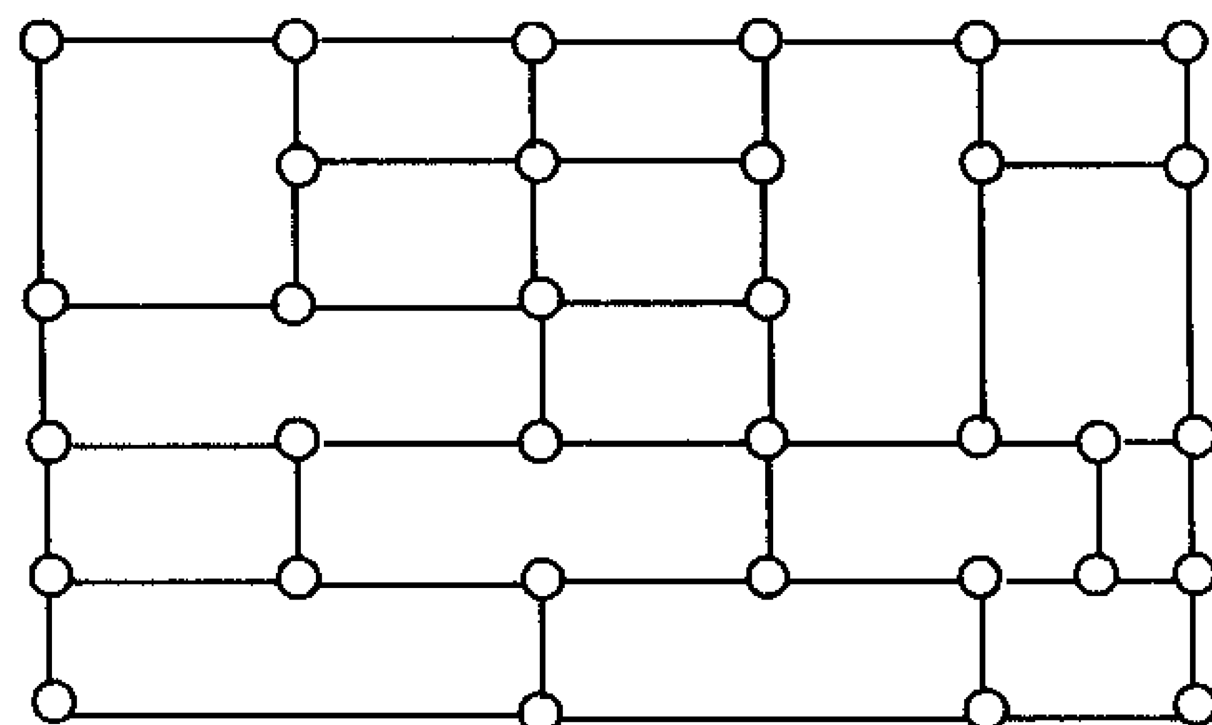
# 第12章 距 离

## 12.1 图的中心

在前面我们已经多次提到如何用图为城镇的街道建模. 当然, 由于城镇不断地扩张, 对应图的顶点数或 (和) 边数也要增多. 首先回顾一下, 图 12.1 给出某城镇的街道系统 $T$ 和对应的图模型 $G_T$.



城镇 T



$G_T$

图 12.1 某城镇 T 和它的图模型

随着一个城镇发展成为城市, 将会面临许多新的问题. 比如, 当城镇的规模较小时, 它的消防基本可以通过付费的方式依赖于相邻城市. 然而, 当城镇达到一定规模, 已经具备了一定的经济能力, 就很有必要拥有自己的消防部门. 假设该城镇决定建立自己的消防站, 那么接下来的问题就是: 该消防站应该建立在什么地方? 假设我们决定把消防站建立在某街道的交叉路口 (当然这并没有回答我们的问题). 显然, 建立消防站的主要原因是为了使该城市所有市民在遇到火灾时都能得到保护. 因此, 城镇里的每个地方都不能离消防站太远. 我们已经发现, 该问题的回答涉及到城镇 T 中的距离, 也即图 $G_T$ 中的距离.

我们重新回顾一下图中距离的定义. 对于图 $G$ 的两个顶点 $u$ 和 $v$, 从 $u$ 到 $v$ 的**距离** $d(u,v)$ 是指 $G$ 中一条最短的 $u-v$ 路的长度. 一条长为 $d(u,v)$ 的 $u-v$ 路称为是一条 $u-v$ **测地线 (geodesic)**. 为了使 $d(u,v)$ 对 $G$ 中所有顶点对 $u,v$ 都有定义, 图 $G$ 必须是连通的. 因此在讨论与距离有关的问题时, 总假定 $G$ 是连通的. 对任一连通图 $G$, 上面所定义的距离均满足下面性质.

1. 对任意 $u,v \in V(G)$, $d(u,v) \geqslant 0$.

2. 对任意 $u, v \in V(G)$, $d(u,v) = 0$ 当且仅当 $u = v$.

3. 对任意 $u, v \in V(G)$, $d(u,v) = d(v,u)$ [**对称性 (the symmetric property)**].

4. 对任意 $u, v, w \in V(G)$, $d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$ [**三角不等式 (the triangle inequality)**].

除性质 4 (三角不等式) 之外, 其他性质很容易验证. 下面验证性质 4. 在图 $G$ 中, 设 $P_1$ 是一条 $u-v$ 测地线, $P_2$ 是一条 $v-w$ 测地线. $P_2$ 连接 $P_1$, 即可产生一条长度为 $d(u,v) + d(v,w)$ 的 $u-w$ 链. 根据定理 1.6, $G$ 含有一条长度至多为 $d(u,v) + d(v,w)$ 的 $u-w$ 路. 故 $d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$. 因为距离 $d$ 满足性质 2(对称性), 所以我们可以说两顶点之间的距离, 而不必说从一个顶点到另一个顶点的距离.

事实上, 满足性质 1–4 的距离 $d$ 是一个**度量 (metric)**, 因此 $(V(G), d)$ 形成一个**度量空间 (metric space)**. 一般而言, 当距离为一个度量时, 就变得非常有用了, 因为该概念已得到广泛的研究. 对连通图来说, 有很多概念是依据距离而定义的, 它们可以提供很多有价值的图结构信息.

对连通图 $G$ 中的一个顶点 $v$, $v$ 的**离心率 (eccentricity)** $e(v)$ 定义为 $G$ 中 $v$ 到所有顶点的最远距离. 在 $G$ 的所有顶点中, 最小离心率定义为 $G$ 的**半径 (radius)**, 最大离心率定义为 $G$ 的**直径 (diameter)**, 分别记为 $\mathrm{rad}(G)$ 和 $\mathrm{diam}(G)$. $G$ 中顶点 $v$ 称为是 $G$ 的一个**中心顶点 (central vertex)**, 如果 $e(v) = \mathrm{rad}(G)$. 由 $G$ 的所有中心顶点诱导的子图称为是 $G$ 的**中心 (center)**, 记为 $\mathrm{Cen}(G)$. 如果 $G$ 的每个顶点均为 $G$ 的一个中心顶点, 则 $\mathrm{Cen}(G) = G$, 此时 $G$ 称为是**自中心的 (self-centered)**. 例如, 如果 $G \cong C_n$ $(n \geqslant 3)$, 则 $G$ 是自中心的.

为了进一步阐明刚才所给出的这些概念, 我们考虑图 12.2 中的图 $H$, 其中每个顶点都是以它的离心率标号. 由于最小离心率为 2, 最大离心率为 4, 所以有 $\mathrm{rad}(H) = 2$, $\mathrm{diam}(H) = 4$. 同时, $H$ 的中心也在图 12.2 中给出.

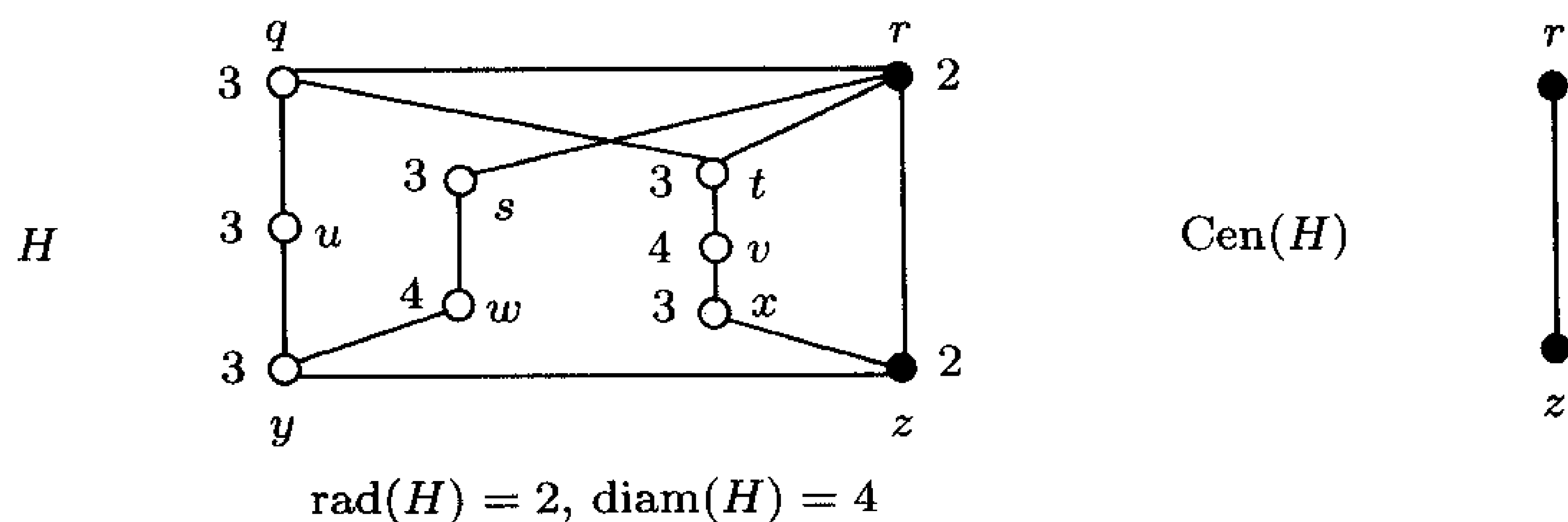



图 12.2 一个图的所有顶点的离心率

观察图 12.2 中的图 $H$, 我们可以得到很多启发. 前面已经提到 $\mathrm{rad}(H) = 2$ 和 $\mathrm{diam}(H) = 4$. 术语 “半径” 和 “直径” 对我们来说非常熟悉, 我们首先会想到圆

周, 它的直径始终是半径的两倍. 基于这个事实以及图 12.2 的图 $H$ 的性质 (满足 $\mathrm{diam}(H) = 2\,\mathrm{rad}(H)$), 我们会认为, 对每个连通图 $G$, 都成立 $\mathrm{diam}(G) = 2\,\mathrm{rad}(G)$. 然而, 事实并非如此. 图 12.3 列出的三个图 $G_2, G_3, G_4$ 的半径均为 2, 可是当 $k = 2, 3, 4$, 却有 $\mathrm{diam}(G_k) = k$. 因此, 对图而言, 直径和半径之间没有一个确定的关系. 当半径为 2 时, 图 12.3 列出了所有可能出现的直径.

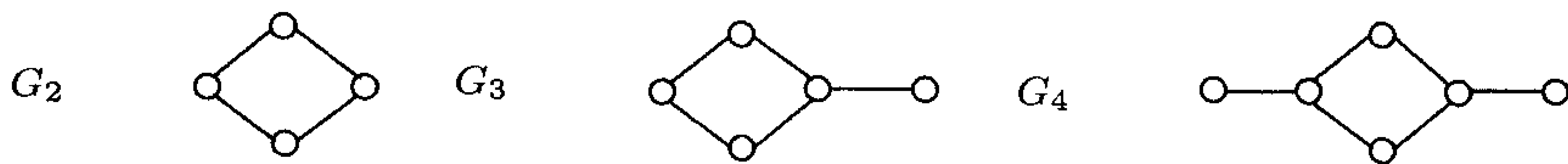



图 12.3 三个半径为 2 的图

**定理 12.1** 对每个非平凡连通图 $G$,

$$\mathrm{rad}(G) \leqslant \mathrm{diam}(G) \leqslant 2\,\mathrm{rad}(G).$$

**证** [直接证法] 显然, 不等式 $\mathrm{rad}(G) \leqslant \mathrm{diam}(G)$ 成立, 因为最小离心率不会超过最大离心率. 设 $u$ 和 $v$ 是满足 $d(u, v) = \mathrm{diam}(G)$ 的两个顶点, $w$ 是 $G$ 的一个中心顶点. 因此 $e(w) = \mathrm{rad}(G)$, 并且 $w$ 与 $G$ 中其他顶点的距离至多为 $\mathrm{rad}(G)$. 根据三角不等式, 我们有

$$\mathrm{diam}(G) = d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v) \leqslant \mathrm{rad}(G) + \mathrm{rad}(G) = 2\,\mathrm{rad}(G). \qquad \blacksquare$$

从图 12.2 中的图 $H$, 我们还可以发现: 任意两邻接顶点的离心率至多相差 1. 该性质对所有连通图都成立.

**定理 12.2** 对连通图的任意两个邻接顶点 $u$ 和 $v$, 均有

$$|e(u) - e(v)| \leqslant 1.$$

**证** [直接证法] 不失一般性, 假设 $e(u) \geqslant e(v)$, 并设 $x$ 是与 $u$ 距离最远的一个顶点, 因此, $d(u, x) = e(u)$. 根据三角不等式, 有

$$e(u) = d(u, x) \leqslant d(u, v) + d(v, x) \leqslant 1 + e(v).$$

故 $e(u) \leqslant 1 + e(v)$, 这就推出 $0 \leqslant e(u) - e(v) \leqslant 1$. 从而, $|e(u) - e(v)| \leqslant 1$. $\blacksquare$

类似地, 可证明下面结论 (见习题 12.10).

**定理 12.3** 设 $u$ 和 $v$ 是连通图 $G$ 的两个邻接顶点, 则对 $G$ 的任意顶点 $x$, 均有

$$|d(u, x) - d(v, x)| \leqslant 1.$$

再次回到图 12.2 中的图 $H$, 注意到 $\text{Cen}(H)\cong K_2$. 这自然引出下面的问题：哪些图可以作为其他某个图的中心呢? Stephen Hedetniemi 证明了 “每个图” 都可以是这个问题的答案.

**定理 12.4** 每个图都是某个图的中心.

**证** [直接证法] 设 $G$ 是一个图, 我们证明 $G$ 可以作为某个图的中心. 首先, 在 $G$ 中添加两个新顶点 $u$ 和 $v$, 并分别连接 $u, v$ 到 $G$ 的每个顶点, 但不连接 $u$ 和 $v$. 接下来, 添加另外两个顶点 $u_1$ 和 $v_1$, 并连接 $u_1$ 和 $u$ 以及 $v_1$ 和 $v$. 所得到的图记为 $F$, 见图 12.4.

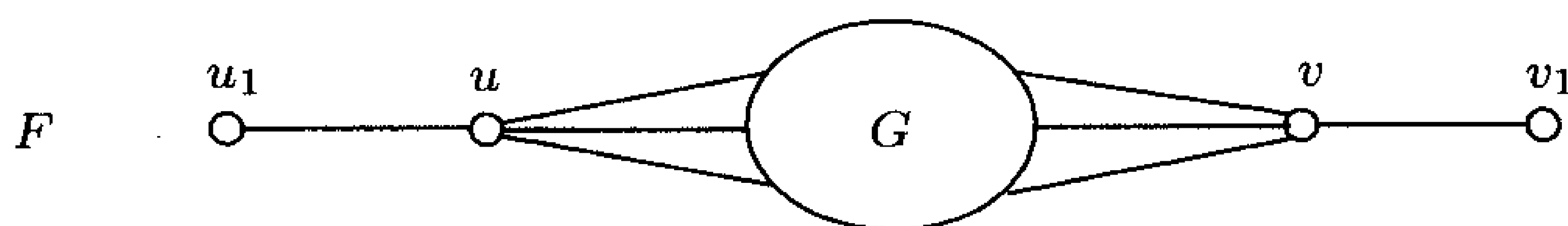



图 12.4 定理 12.4 证明中的图 $H$

因为 $e(u_1)=e(v_1)=4$, $e(u)=e(v)=3$, 并且对 $G$ 的每个顶点 $x$, 均有 $e(x)=2$, 所以 $V(G)$ 是 $F$ 的中心顶点集合, 从而 $\text{Cen}(F)=G$. ■

Stephen Hedetniemi 于 1939 年 2 月 7 日出生于华盛顿. Hedetniemi 的父亲曾经工作于美国墨菲弗兰克高级法院, 他极力鼓励他的四个儿女接受高等教育. Hedetniemi 成为密歇根大学的本科生, 主修数学专业, 但他却对计算机科学这一新兴领域非常感兴趣. 在密歇根大学期间, Hedetniemi 选修了 Frank Harary 教授首次开设的图论课程. 1966 年, 在 Frank Harary 和 John Holland 的共同指导下, Hedetniemi 获得博士学位. Holland 是一名计算机科学家, 后来成为遗传算法领域的奠基人.

在 1982 年去克莱姆森大学之前, Hedetniemi 曾在爱荷华大学、维吉尼亚大学和俄勒冈大学的计算机科学系工作. Hedetniemi 不仅在图论方面有所贡献, 在算法、计算理论、组合优化和并行处理等方面也都有贡献. 尽管 Hedetniemi 为众人所知是因为提出了图论里的很多研究专题, 但他最著名的贡献应该是下一章我们要介绍的专题.

尽管每个图均可以作为某个连通图的中心, 但是图 $G$ 的中心在 $G$ 中的位置是有所限制的.

**定理 12.5** 每个连通图 $G$ 的中心是 $G$ 的某个块的子图.

**证** [反证法] 假设 $G$ 是一个连通图, 但 $G$ 的中心 $\text{Cen}(G)$不是 $G$ 的某个块的子图. 因此, 存在 $G$ 的一个割点 $v$, 使得 $G-v$ 含有连通分支 $G_1$ 和 $G_2$, 且它们都含有 $\text{Cen}(G)$ 的顶点. 设 $u$ 是 $G$ 中满足 $d(u,v)=e(v)$ 的顶点, 并设 $P_1$ 是 $G$ 的一条 $u-v$ 测地线. 显然, 在连通块 $G_1$ 和 $G_2$ 中, 至少有一个 (不妨设为 $G_2$) 不含 $P_1$ 的顶点. 设 $w$ 是属于 $G_2$ 的 $G$ 的中心顶点, 并设 $P_2$ 是一条 $v-w$ 测地线. 则连接 $P_2$ 和 $P_1$, 便形成一条 $u-w$ 测地线, 其长度大于 $P_1$ 的长度. 因此, $e(w)>e(v)$, 这与 $w$

是 $G$ 的中心顶点矛盾. ■

图 12.1 中的图 $G_T$ (作为城市 T 的模型) 再次在图 12.5 中画出, 并且每个顶点都是以它的离心率标号. 在本节的开始, 我们曾经提出这样的问题: 该在何处建立消防站, 以使得该城镇的每个位置离消防站都不太远? 通过上面分析, 我们现在知道了一个合适的答案, 即应建立在图 $G_T$ 的三个中心顶点 (它们的离心率均为 5) 所对应的三个交叉路口之一.

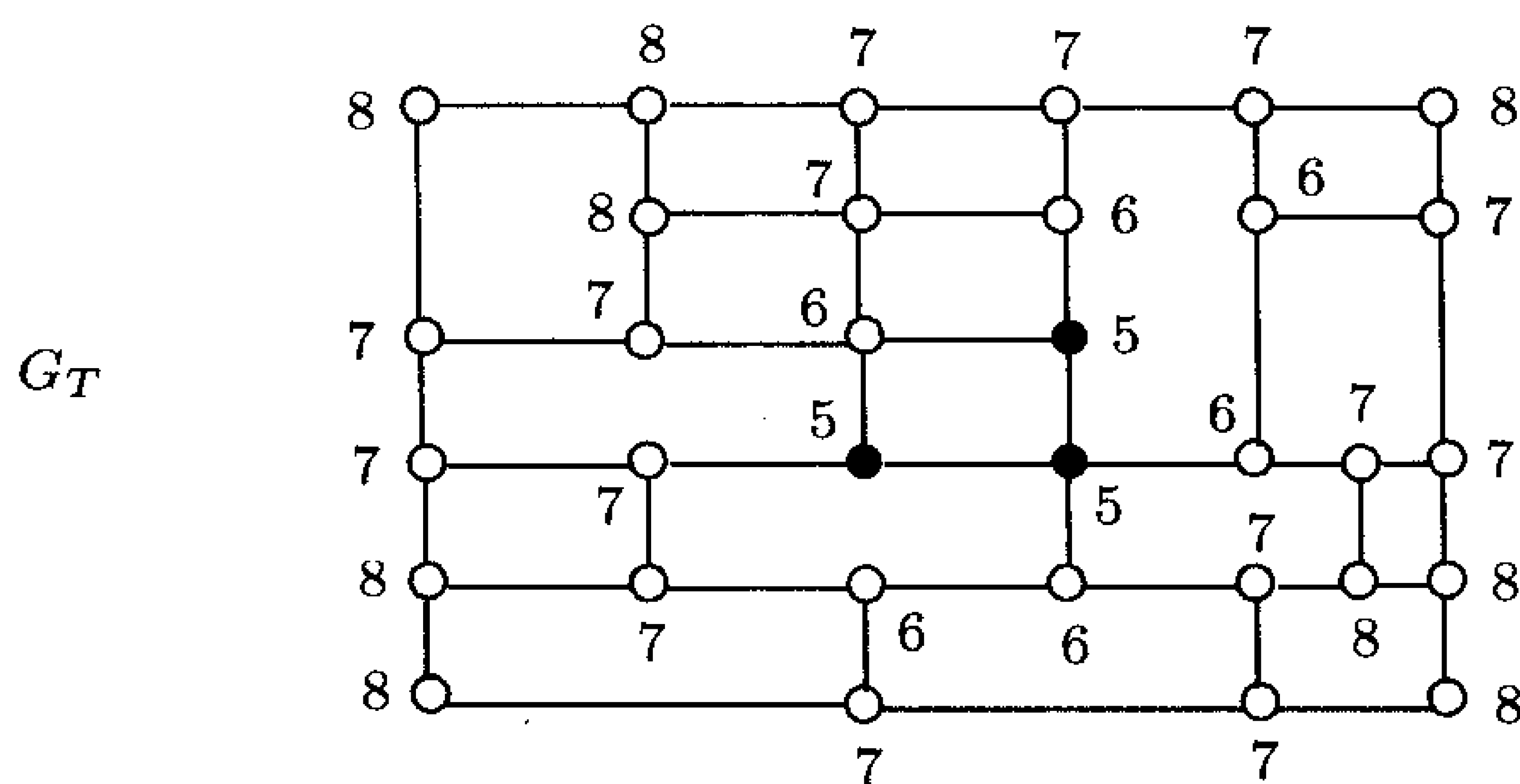



图 12.5　$G_T$ 的顶点离心率

## 习题

12.1　确定图 12.6 所示的图 $G$ 的半径和直径, 并给出 $G$ 的中心.

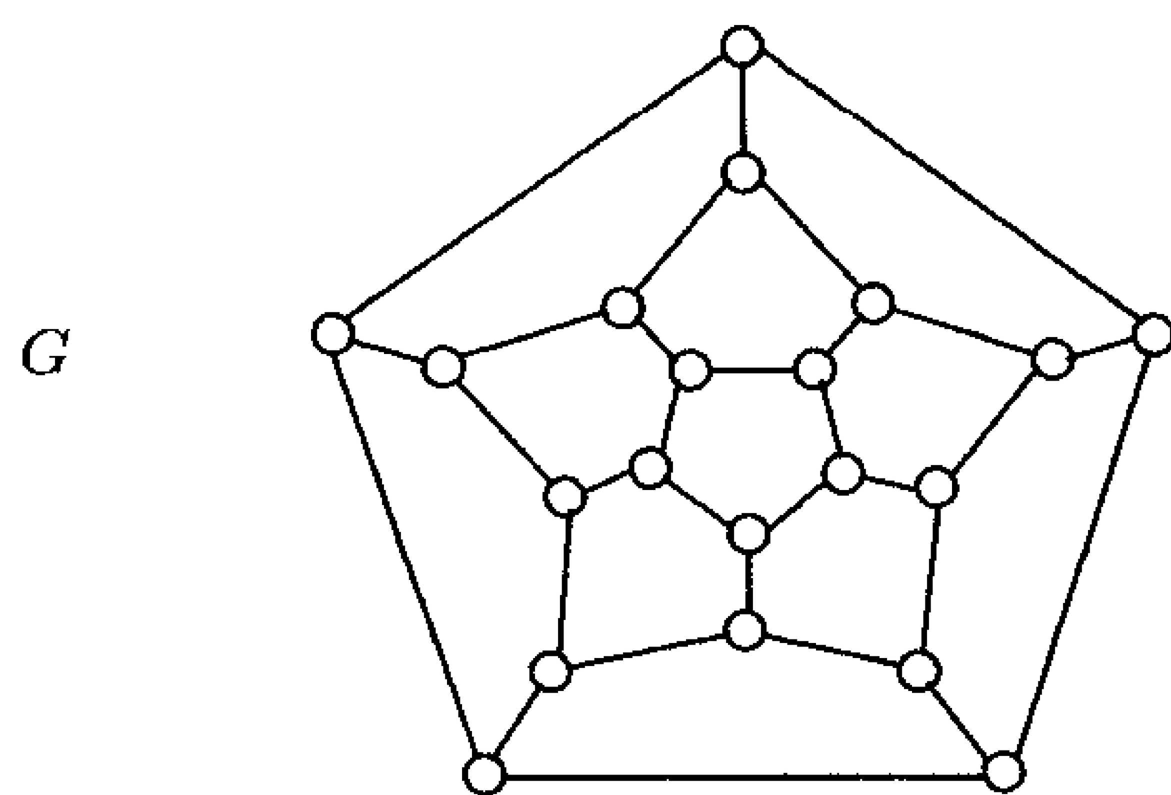



图 12.6　习题 12.1 的图

12.2　(a) 对 $n \geqslant 3$, 确定 $C_n$ 的半径和直径.

(b) 对 $n \geqslant 3$, 确定 $P_n$ 的半径和直径, 并给出 $P_n$ 的中心.

(c) 对 $n \geqslant 2$, 确定 $Q_n$ 的半径和直径.

12.3　对 $1 \leqslant s \leqslant t$, 确定 $K_{s,t}$ 的半径和直径, 并给出 $K_{s,t}$ 的中心.

12.4　确定 Petersen 图 PG 的半径和直径, 并给出 PG 的中心.

12.5　列举一个连通图 $G$, 使得 $\mathrm{Cen}(G)$ 是不连通的.

12.6　证明: 如果 $G$ 是不连通的, 则 $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leqslant 2$.

12.7　(a) 证明: 如果 $G$ 是连通的, 且 $\mathrm{diam}(G) \geqslant 3$, 则 $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leqslant 3$.

(b) 列举一个连通图 $G$, 使得 $\mathrm{diam}(G)=\mathrm{diam}(\overline{G})=3$.

12.8 证明: 对每对整数 $a, b$ $(a \leqslant b \leqslant 2a)$, 均存在一个图 $G$, 使得 $\mathrm{rad}(G)=a$, $\mathrm{diam}(G)=b$.

12.9 证明定理 12.2 的一个推广: 对连通图的任意两个顶点 $u$ 和 $v$, 均有 $|e(u)-e(v)| \leqslant d(u,v)$.

12.10 (a) 证明定理 12.3: 设 $u$ 和 $v$ 是连通图 $G$ 的两个邻接顶点, 则对 $G$ 的每个顶点 $x$, 有 $|d(u,x)-d(v,x)| \leqslant 1$.

(b) 设 $G$ 是一个连通图, 且对某个顶点对 $u, x \in V(G)$, 有 $d(u,x)=k$. 证明: 如果 $v$ 是 $u$ 的一个邻域, 则 $d(v,x)$ 是 $k-1$, $k$, 或 $k+1$.

12.11 设 $G$ 是一个连通图, $k$ 为满足 $\mathrm{rad}(G)<k<\mathrm{diam}(G)$ 的一个整数. 应用定理 12.2, 证明: 存在 $G$ 的顶点 $v$, 使得 $e(v)=k$.

12.12 证明: 如果 $T$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 的树, 则 $\Delta(T)+\mathrm{diam}(T) \leqslant n+1$.

12.13 (a) 设 $T$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 的树, $T'$ 是由 $T$ 通过删除其所有端点而获得的树. 证明: $\mathrm{Cen}(T)=\mathrm{Cen}(T')$.

(b) 证明: 树 $T$ 的中心同构于 $K_1$ 或 $K_2$.

(c) 证明: 如果树 $T$ 的中心同构于 $K_1$, 则 $\mathrm{diam}(T)=2\,\mathrm{rad}(T)$.

12.14 讨论连通正则图的半径和直径.

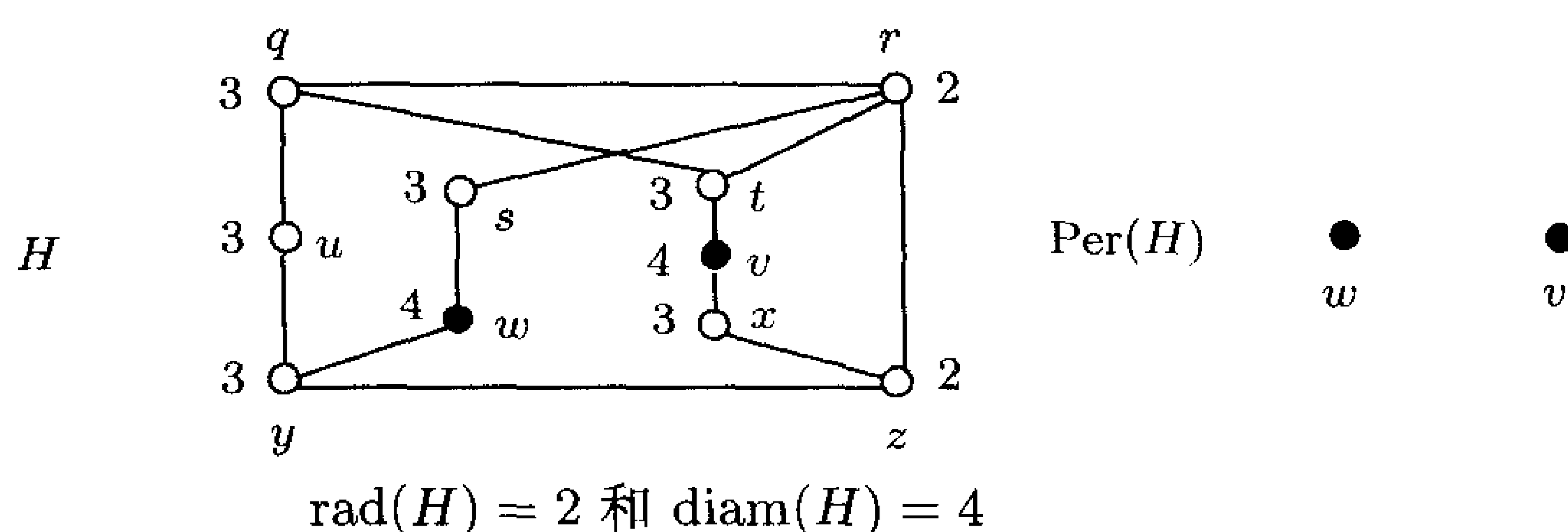
## 12.2 远　点

假设我们站在城市 (比如图 12.1 中的城市 T) 的某处, 想知道这座城市中哪个位置离我们所在的位置最远, 这个问题等同于: 在连通图 $G$ 中, 对于给定的顶点 $u$, 哪个顶点 $v$ 离 $u$ 最远? 显然, 我们所要找的顶点 $v$ 就是满足 $d(u,v)=e(u)$ 的顶点. 根据 $u$ 在 $G$ 中的位置, $u$ 和 $v$ 之间的距离可能为 $\mathrm{rad}(G)$, 也可能为 $\mathrm{diam}(G)$, 或者为这两者之间的某个数.

连通图 $G$ 的一个顶点 $v$ 称为是一个**外围点 (peripheral vertex)**, 如果 $e(v)=\mathrm{diam}(G)$. 因此, 从某种意义上说, 外围点与中心顶点相对立. 由 $G$ 的所有外围点诱导的 $G$ 的子图称为是 $G$ 的**外围 (periphery)**, 记为 $\mathrm{Per}(G)$. 对于图 12.2 中的图 $H$, 把它重画为图 12.7 中的图, 并给出了 $H$ 的外围.

图 12.7 中的图 $H$ 的外围同构于 $2K_1$ (即由两个孤立顶点组成), 因而是不连通的. 是不是每个图的外围都是不连通的呢? 答案是否定的, 例如图 12.8 中的图 $F$, $F$ 的每个顶点是以其离心率来标号. 因为 $\mathrm{diam}(F)=3$, 从而 $\mathrm{Per}(F) \cong C_6$, 是一个连通图. 事实上, 对于 $n \geqslant 3$, 如果 $G \cong C_n$, 则 $\mathrm{Per}(G) \cong C_n$. 是否每个图都可以是某个图的外围呢? Halina Bielak 和 Maciej Syslo 已经证明了: 上述问题的答案是否定的.

**定理 12.6**　一个非平凡图 $G$ 是某个图的外围当且仅当 $G$ 的每个顶点都有离心率 1 或者 $G$ 没有离心率为 1 的顶点.




rad$(H)=2$ 和 diam$(H)=4$

图 12.7 图的顶点离心率

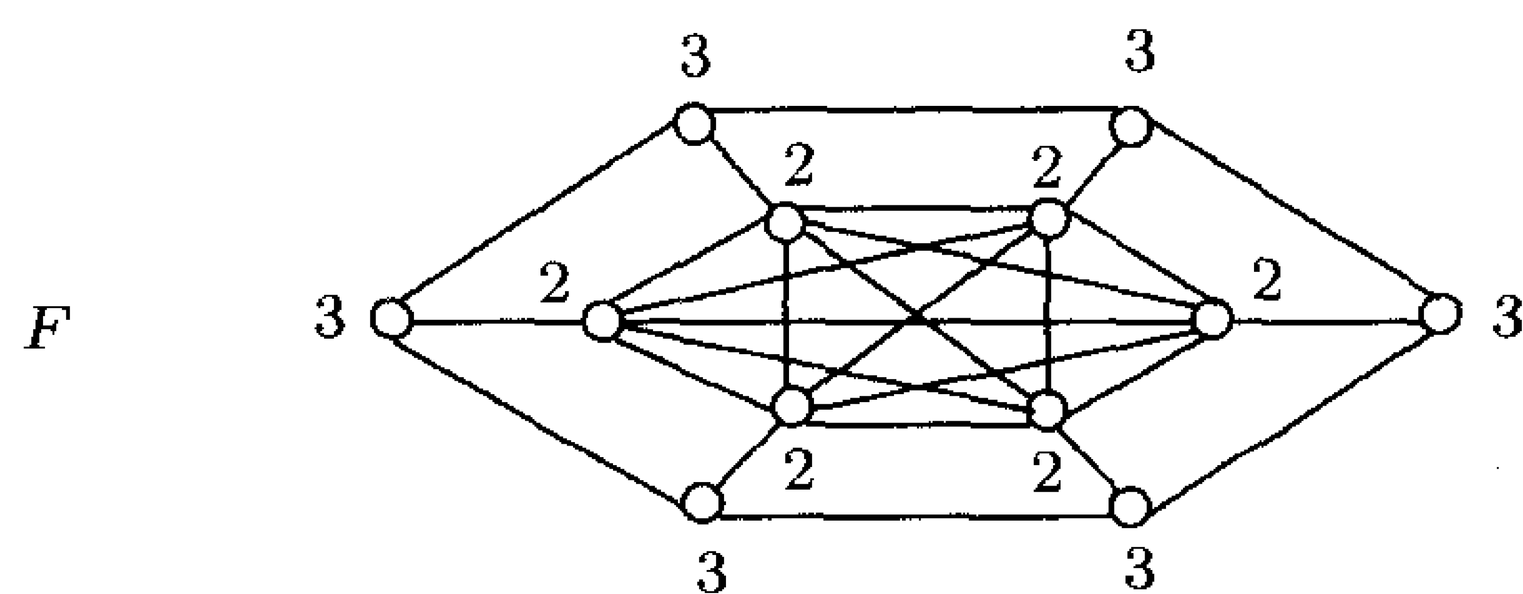



图 12.8 外围为 $\mathrm{Per}(F)=C_6$ 的图 $F$

**证** [直接证法, 反证法] 首先, 假设 $G$ 的每个顶点的离心率均为 1 或者 $G$ 没有离心率为 1 的顶点. 如果 $G$ 的每个顶点的离心率均为 1, 则 $G$ 是完全图, 从而 $\mathrm{Per}(G)=G$. 如果 $G$ 没有离心率为 1 的顶点, 这就意味着, 对于 $G$ 的每个顶点 $u$, 均存在一个与 $u$ 不邻接的顶点 $v$. 设 $H$ 是由 $G$ 通过添加一个新顶点 $w$ 并连接 $w$ 与 $G$ 的每个顶点而得到的图, 则 $e_H(w)=1$. 对于 $G$ 中每个顶点 $x$, $e_H(x)=2$, 故 $G$ 的每个顶点都是 $H$ 的外围点, 从而 $\mathrm{Per}(H)=G$.

下面来证必要性. 设图 $G$ 既含有离心率为 1 的顶点也含有离心率不为 1 的顶点. 假设存在一个图 $H$, 使得 $\mathrm{Per}(H)=G$. 显然, $G$ 是 $H$ 的一个真诱导子图, 从而存在一个整数 $k\geqslant 2$, 使得: 对 $G$ 的每个顶点 $v$, $e_H(v)=k$; 而对 $H$ 的每个不属于 $G$ 的顶点 $v$, $e_H(v)<k$. 设 $x$ 是 $G$ 中满足 $e_G(x)=1$ 的一个顶点, $w$ 是 $H$ 中满足 $d(x,w)=e_H(x)=k\geqslant 2$ 的一个顶点. 因为 $w$ 与 $x$ 不邻接, 所以 $w$ 不在 $G$ 中. 然而, $d(w,x)=k$, 从而 $e_H(w)\geqslant k$, 这与 $w$ 不属于 $H$ 的外围矛盾. ■

由定理 12.6 知, 阶为 3 或 3 以上的星图不可能为某个图的外围. 对于连通图 $G$ 的给定顶点 $u$, 我们已经讨论如何去寻找一个顶点 $v$, 使得 $d(u,v)=e(u)$, 即寻找一个离 $u$ 最远的顶点 $v$. 这样的顶点 $v$ 称为是 $u$ 的**离心点** (**eccentric vertex**). 如果 $v$ 是 $G$ 中某个顶点的离心点, 则称顶点 $v$ 是 $G$ 的**离心点** (**eccentric vertex**). 换言之, 顶点 $v$ 是 $G$ 的一个离心点, 如果 $v$ 离 $G$ 的某个顶点最远.

我们来看图 12.9 中的图 $G$, 其中 $G$ 的每个顶点是以其离心率来标号, 例如, $e(u)=3$. 因为 $d(u,v)=3$, 所以 $v$ 是 $u$ 的一个离心点. 由于 $G$ 中有一条长度为 3 的

$u-v$ 路, 当然也就有一条长度为 3 的 $v-u$ 路. 然而, 这并非意味着 $u$ 是顶点 $v$ 的一个离心点, 因为可能会有一个顶点, 该顶点与 $v$ 的距离大于 $u$ 与 $v$ 的距离. 因此, 这只能说明 $e(v) \geqslant 3$. 事实上, $e(v)=4$, 故 $u$ 不是 $v$ 的离心点, 而 $w$ 是 $v$ 的一个离心点. 更一般地, 在一个连通图中, 如果 $y$ 是顶点 $x$ 的一个离心点, 则 $e(y) \geqslant e(x)$.

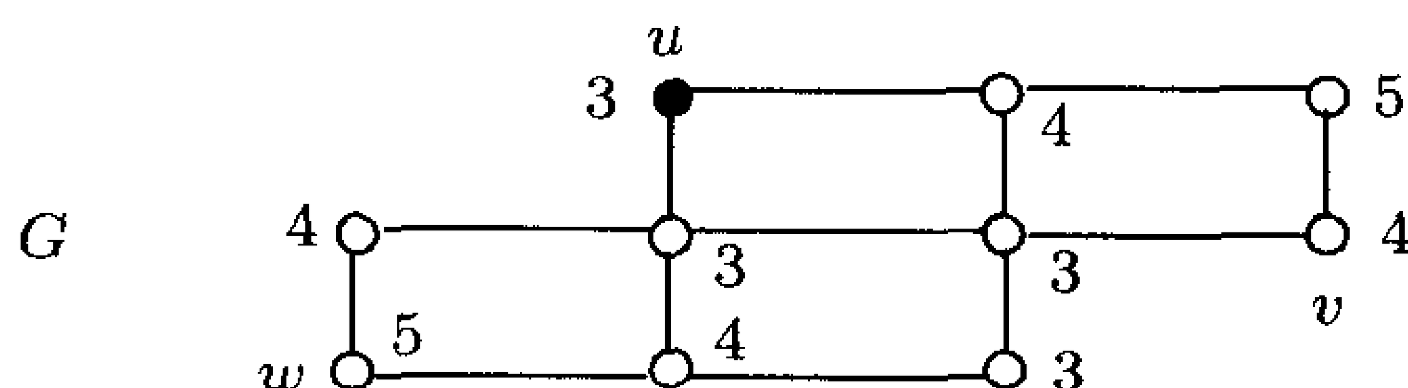



图 12.9　$G$ 的一个离心点

我们已经知道, 如果连通图 $G$ 中的顶点 $x$ 是 $G$ 的一个外围点, 则 $e(x)=\operatorname{diam}(G)$. 从而, 必然存在一个顶点 $y$, 使得 $d(x,y)=e(x)=\operatorname{diam}(G)$. 这也意味着, $d(x,y)=e(y)=\operatorname{diam}(G)$, 因此 $y$ 也是 $G$ 的一个外围点. 所以, $G$ 的每个外围点都是 $G$ 的一个离心点. 然而它的逆并不成立; 例如, $v$ 是图 12.9 中 $G$ 的一个离心点, 但 $v$ 不是 $G$ 的外围点.

我们再来看图 12.10 所示的图 $H$, 其中 $\operatorname{rad}(H)=2$, $\operatorname{diam}(H)=4$. 因为 $q$ 和 $r$ 是外围点 ($H$ 的仅有外围点), 所以它们也都是 $H$ 的离心点. 另一方面, 顶点 $x$ 和 $z$ 也互为彼此的离心点, 且 $t$ 和 $u$ 都是 $x$ 和 $z$ 的离心点. 进一步地, $w$ 和 $y$ 互为彼此的离心点, 且 $s$ 和 $v$ 都是 $w$ 和 $y$ 的离心点. 故 $H$ 的每个顶点都是离心点.

如果某个图 $G$ 的每个顶点都有相同的离心率 (因而是外围点), 那么当然 $G$ 的每个顶点都是一个离心点. 然而, 图 12.10 中的图 $H$ 说明了如下图的存在性, 即它的每个顶点都是一个离心点, 但它们并非有相同的离心率.

连通图 $G$ 称为是一个**离心图 (eccentric graph)**, 如果 $G$ 的每个顶点都是一个离心点. 因此, 图 12.10 中的图 $H$ 是一个离心图, 当然每个顶点都有相同的离心率的图也是离心图. 一般而言, 一个图只有部分顶点是离心的.

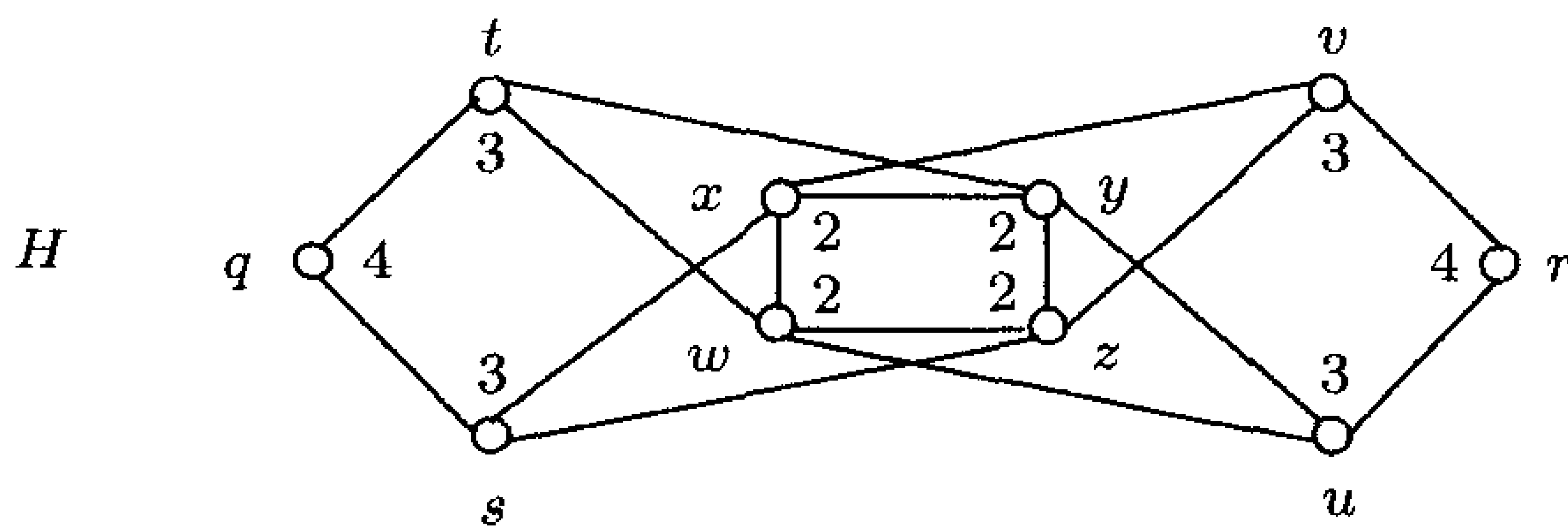



图 12.10　每个顶点都为离心点的一个图

设 $G$ 是一个连通图. $G$ 的**离心子图 (eccentric subgraph)** $\operatorname{Ecc}(G)$ 是指由 $G$ 的所有离心点诱导的子图. 例如, 图 12.11 给出了连通图 $F$ 和它的离心子图. 如果图 $G$ 的每个顶点都是一个离心点, 则 $\operatorname{Ecc}(G)=G$.

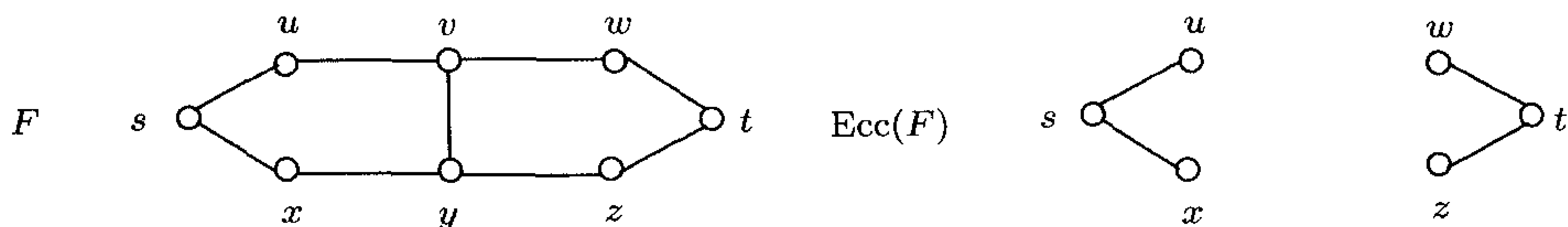



图 12.11 图与它的离心子图

对图 12.11 中的图 $F$, 有 $\mathrm{Ecc}(F) \cong 2P_3$. 这自然引出这样的一个问题：哪些图可以是某个图的离心子图? 也许你会觉得奇怪, 这个问题的答案与前面所提的问题 (即哪些图可以是某个图的外围?) 有完全相同的答案.

**定理 12.7** 一个非平凡图 $G$ 是某个图的离心子图当且仅当 $G$ 的每个顶点都有离心率 1 或者 $G$ 没有离心率为 1 的顶点.

**证** [直接证法, 反证法] 首先, 假设 $G$ 的每个顶点都有离心率 1 或者 $G$ 没有离心率为 1 的顶点. 如果 $G$ 的每个顶点的离心率均为 1, 则 $G$ 是完全图, 即 $G$ 是一个离心图, 从而 $\mathrm{Ecc}(G) = G$. 接下来, 假设 $G$ 没有离心率为 1 的顶点. 设 $H$ 是由 $G$ 通过添加一个新顶点 $w$ 并连接 $w$ 与 $G$ 的每个顶点而得到的图. 因为 $H$ 中属于 $G$ 的每个顶点 $v$ 都是 $w$ 的离心点, 但 $w$ 不是 $H$ 的任一个顶点的离心点, 从而 $\mathrm{Ecc}(H) = G$.

下面来证必要性. 设图 $G$ 含有一些离心率为 1 的顶点, 也含有一些离心率不为 1 的顶点. 显然 $G$ 是连通的. 假设存在一个图 $H$, 使得 $\mathrm{Ecc}(H) = G$. 设 $u$ 是 $G$ 的一个顶点, 它邻接于 $G$ 的其他所有顶点; 并设 $v$ 是 $H$ 中顶点 $u$ 的一个离心点. 因为 $H$ 的所有离心点都在 $G$ 中, 所以 $v$ 属于 $G$. 然而 $v$ 邻接于 $u$, 所以 $e_H(u) = 1$, 这就推出, $u$ 与 $H$ 的其他所有顶点邻接, $H$ 中所有不属于 $G$ 的顶点也在 $\mathrm{Ecc}(H)$ 中, 导致矛盾. ■

在连通图 $G$ 中, 如果 $v$ 是 $u$ 的一个离心点, 则在 $G$ 中不存在这样的顶点, 使得它与 $u$ 的距离比 $v$ 与 $u$ 的距离大. 特别地, 如果 $w$ 是 $v$ 的一个邻点, 则 $d(u,w) \leqslant d(u,v)$. 当然, 上述性质对 $u$ 的非离心点也有可能成立.

在连通图 $G$ 中, 顶点 $v$ 称为是顶点 $u$ 的一个**边界点 (boundary vertex)**, 如果对于 $v$ 的每个邻点 $w$, 均有 $d(u,w) \leqslant d(u,v)$; 顶点 $v$ 称为是图 $G$ 的一个**边界点 (boundary vertex)**, 如果 $v$ 是 $G$ 的某个顶点的边界点.

前面已经提到, 对连通图而言, 每个外围点都是一个离心点, 但反之并不成立. 类似地, 我们也有下面的结论：每个离心点都是一个边界点, 但每个边界点未必是一个离心点. 考虑图 12.12 中的图 $G$, 顶点 $z$ 是 $w$ 的一个离心点, 同时它也是 $s$ 的一个边界点. 但 $z$ 并不是 $G$ 的一个外围点, $w$ 也不是 $G$ 的一个离心点.

在连通图 $G$ 中, 顶点 $u$ 到它的离心点 $v$ 的距离可以达到绝对的最大值$\max_{w\in V(G)}\{d(u,w)\}$, 而顶点 $u$ 到它的边界点 $v$ 的距离则可以达到局部的最大值 $\max_{w\in N[v]}$

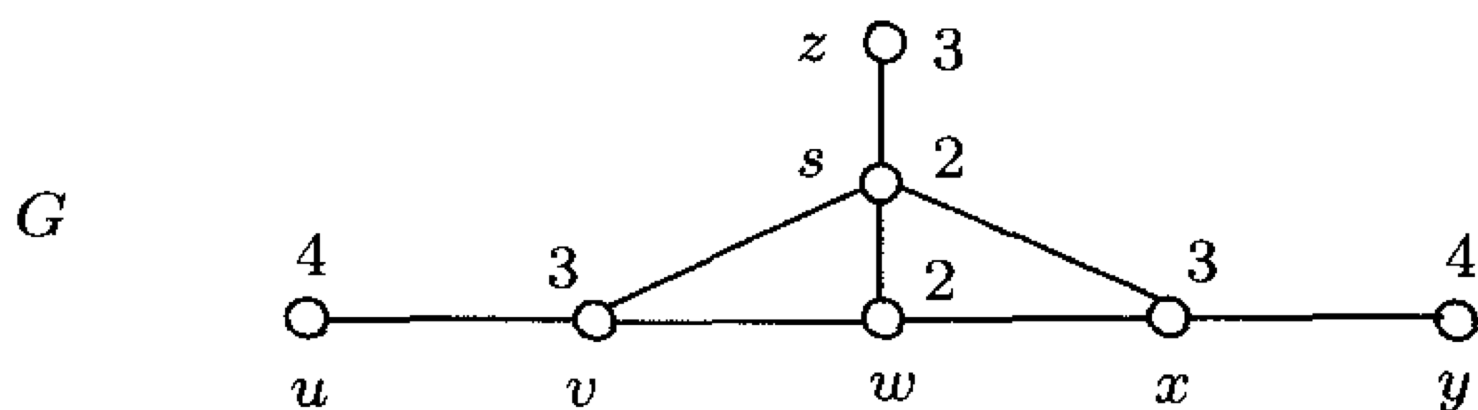



图 12.12 一个图的外围, 离心以及边界点

$\{d(u,w)\}$. 等价地, 如果任一 $u-v$ 测地线都不可能在 $v$ 延伸为更长的一条测地线, 则 $v$ 是 $u$ 的一个边界点. 直观地, $u$ 的一个边界点就是从顶点 $u$ 出发 (局部地) 不能再继续延长的那个顶点.

在一个非平凡连通图中, 有些顶点不可能为边界点.

**定理 12.8** 连通图 $G$ 的任一割点都不是 $G$ 的边界点.

**证** [反证法] 假设存在一个连通图 $G$ 和它的一个割点 $v$, 使得 $v$ 是 $G$ 中某个顶点 $u$ 的边界点. 设 $G_1$ 是 $G-v$ 的包含顶点 $u$ 的连通分支, $G_2$ 是 $G-v$ 的另一个连通分支. 如果 $w$ 是 $v$ 的一个属于 $G_2$ 的邻点, 则 $d(w,u)=d(u,v)+1$, 与假设 $v$ 是 $u$ 的边界点矛盾. ■

因为割点不可能是边界点, 所以割点也不可能是离心点或者外围点. 当然图中会存在某些顶点, 它们必定是边界点.

图 $G$ 中的一个顶点 $v$ 称为是一个**完备点** (**complete vertex**) (或者**极点** (**extreme vertex**), 或者**单形点** (**simplicial vertex**)), 如果由 $v$ 的所有邻点诱导的 $G$ 的子图是完全的. 特别地, 每个端点都是完备的. 因此, 如果 $v$ 是一个完备点且 $u$ 是 $v$ 的一个邻点, 则对每个 $w\in N(v)$, 有 $d(w,u)=d(w,v)=1$, 故 $v$ 是 $u$ 的一个边界点. 完备点 $v$ 不仅是 $v$ 的每个邻点的边界点, 而且是不同于 $v$ 的每个顶点的边界点.

**定理 12.9** 设 $G$ 是一个连通图. $G$ 的顶点 $v$ 是不同于 $v$ 的每个顶点的边界点当且仅当 $v$ 是 $G$ 的一个完备点.

**证** [直接证法, 逆否证法] 首先, 设 $v$ 是 $G$ 的一个完备点, 并且设 $u$ 是不同于 $v$ 的一个顶点. 设 $u=v_0,v_1,\cdots,v_k=v$ 是一条 $u-v$ 测地线, 并设 $w$ 是 $v$ 的一个邻点. 如果 $w=v_{k-1}$, 则 $d(u,w)<d(u,v)$. 故可假设 $w\neq v_{k-1}$. 因为 $v$ 是完备的, 故 $wv_{k-1}\in E(G)$, 并且 $u=v_0,v_1,\cdots,v_{k-1},w$ 是 $G$ 中的一条 $u-w$ 路, 从而可推出 $d(u,w)\leqslant d(u,v)$. 因此 $v$ 是 $u$ 的一个边界点.

下面证明必要性, 设 $v$ 是 $G$ 的一个顶点, 且不是完备点. 则存在不邻接顶点 $u,w\in N(v)$. 因为 $d(u,w)>d(u,v)$, 所以 $v$ 不是 $u$ 的边界点. ■

下面的结论将讨论定理 12.9 中所考虑问题的一个对立的问题.

**定理 12.10** 设 $G$ 是一个非平凡连通图, $u$ 是 $G$ 的一个顶点. 则 $G$ 中不同于 $u$ 的每个顶点都是 $u$ 的边界点当且仅当 $e(u)=1$.

**证** [直接证法, 反证法] 首先, 假设 $e(u)=1$, 并设 $v$ 是 $G$ 中不同于 $u$ 的一个顶点. 设 $w$ 是 $v$ 的一个邻点, 则 $d(u,w)\leqslant 1$, $d(u,v)=1$. 因此 $v$ 是 $u$ 的一个边界点. 再证必要性, 假设不同于 $u$ 的 $G$ 的每个顶点都是 $u$ 的边界点, 但是 $e(u)\neq 1$. 则在 $G$ 中, 存在一个顶点 $x$, 使得 $d(x,u)=2$. 设 $x,y,u$ 是 $G$ 的一条路, 则 $u$ 是 $y$ 的邻点, 且 $d(x,u)=2$, $d(y,u)=1$. 所以 $y$ 不是 $u$ 的边界点, 导致矛盾. ■

在连通图中, 还有其他一些与边界点有紧密联系的顶点. 设 $x$ 和 $z$ 是 $G$ 中两个不同顶点. 不同于 $x$ 和 $z$ 的一个顶点 $y$ 称为**$x$ 和 $z$ 的一个中间点 (vertex between $x$ and $z$)**, 如果

$$d(x,z)=d(x,y)+d(y,z),$$

即, 三角不等式以等式成立. 顶点 $v$ 称为是 $G$ 的一个**内部点 (interior vertex)**, 如果对不同于 $v$ 的每个顶点 $u$, 存在顶点 $w$, 使得 $v$ 是 $u$ 和 $w$ 的中间点. $G$ 的**内部 (interior)** $\text{Int}(G)$ 是指由 $G$ 的所有内部点诱导的子图. 例如, 对于图 12.13 中的图 $G$ (也见图 12.12), 顶点 $s,v$ 和 $x$ 是 $G$ 的内部点, 因此 $\text{Int}(G)\cong P_3$, 如图 12.13 所示.

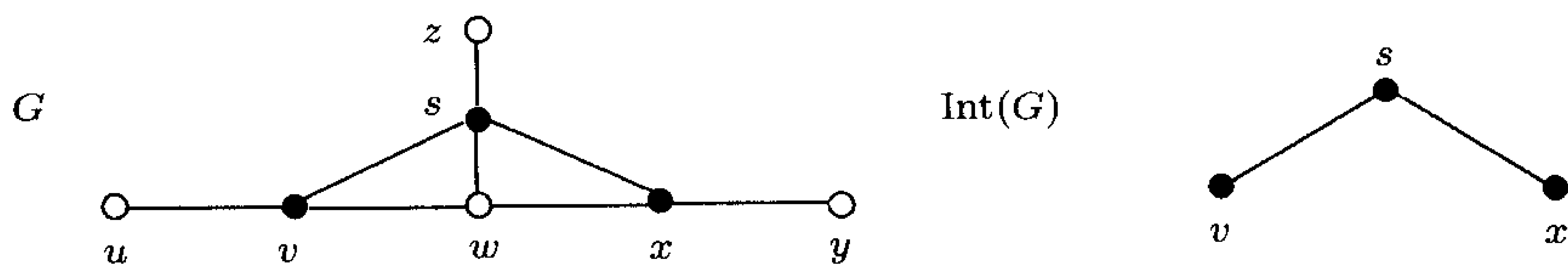



图 12.13 一个图的内部

我们将发现, 图的内部点恰好是那些非边界点的顶点.

**定理 12.11** 设 $G$ 是一个连通图. 顶点 $v$ 是 $G$ 的边界点当且仅当 $v$ 不是 $G$ 的内部点.

**证** [反证法, 直接证法] 设 $v$ 是 $G$ 的一个边界点, 不妨设 $v$ 是顶点 $u$ 的边界点. 假设 $v$ 是 $G$ 的一个内部点, 则存在一个不同于 $u$ 和 $v$ 的顶点 $w$, 使得 $v$ 是 $u$ 和 $w$ 的一个中间点. 设

$$P: u=v_1,v_2,\cdots,v=v_j,v_{j+1},\cdots,v_k=w$$

是一条 $u-v$ 路, 其中 $1<j<k$. 然而, $v_{j+1}\in N(v)$, $d(u,v_{j+1})=d(u,v)+1$, 导致矛盾.

反过来, 设 $v$ 是 $G$ 的非内部点的一个顶点, 则存在某个顶点 $u$, 使得对每个不同于 $u$ 和 $v$ 的顶点 $w$, $v$ 都不是 $u$ 和 $w$ 的中间点. 设 $x\in N(v)$, 则

$$d(u,x)\leqslant d(u,v)+d(v,x)=d(u,v)+1.$$

因为 $v$ 不是 $u$ 和 $x$ 的中间点, 所以上述不等式严格成立, 故 $d(u,x)\leqslant d(u,v)$, 即 $v$ 是 $u$ 的一个边界点. ■

## 习题

12.15 在习题 12.1 中, 图 12.6 中 $G$ 的外围是什么?

12.16 对于 $n \geqslant 2$, $P_n$ 的外围是什么?

12.17 对于 $1 \leqslant s \leqslant t$, $K_{s,t}$ 的外围是什么?

12.18 Petersen 图的外围是什么?

12.19 列举一个连通图 $G$ 及其一个顶点 $v$, 使得 (1) $v$ 不属于 $G$ 的中心, (2) $v$ 不属于 $G$ 的外围, (3) $v$ 不与 $G$ 的中心顶点邻接, 也不与 $G$ 的外围点邻接.

12.20 列举一个连通图 $G$, 使得其中心和外围不同, 且有非空的交集; 或者解释为什么不存在这样的图.

12.21 设 $G$ 是一个连通图, 且它的部分顶点 (不是全部顶点) 的离心率为 1. 问: 是否存在连通图 $H$, 使得 $\text{Per}(H) = G$, 其中 $H$ 的每个顶点都有离心率 2 或 3?

12.22 设 $G$ 是一个阶为 $n \geqslant 3$ 的连通非完全图. 证明: $G$ 是某个图的外围当且仅当 $\Delta(G) \leqslant n-2$.

12.23 证明: 一个直径为 2 的连通图 $G$ 是某个图的外围当且仅当 $G$ 是自中心的.

12.24 证明: 对每个整数 $n \geqslant 3$, 恰有一个不为某个图外围的 $n$ 阶树.

12.25 如果图 $G$ 是图 $H$ 的离心子图, 是否可推出 $G$ 是 $H$ 的外围?

12.26 对于图 12.14 中的图 $G$, 确定

(a) $G$ 的外围点集合,

(b) $G$ 的离心点集合,

(c) $G$ 的边界点集合,

(d) $G$ 的外围, 离心子图和边界.

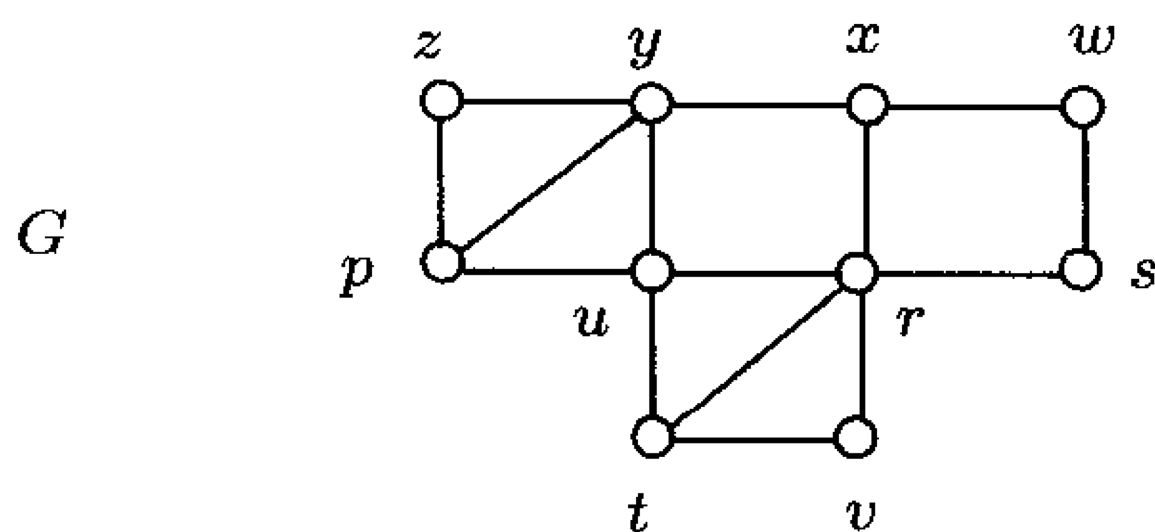



图 12.14 习题 12.26 的图

12.27 列举一个连通图 $G$ 及其顶点的一个集合 $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 使得对每个 $i = 1, 2, 3$, $v_{i+1}$ 是 $v_i$ 的一个离心点, 但 $S$ 的每个顶点都不是 $S$ 中任意其他顶点的离心点.

12.28 设 $F$ 是一个非平凡连通图, 且没有离心率为 1 的顶点. 设 $G = F + K_k$, 其中 $k = 1, 2$.

(a) 证明: 如果 $k = 1$, 则 $G$ 的边界是 $F$.

(b) 证明: 如果 $k = 2$, 则 $G$ 的边界是 $G$ 自身.

12.29 对于图 12.15 中的每个图 $G_i$, 其中 $i = 1, 2$. 证明: 对于 $i = 1, 2$, $G_i$ 的边界都是 $G_i$.

12.30 证明: 对于每个正整数 $k$, 存在一个连通图 $G$ 和它的一个离心点 $v$, 使得 $\text{diam}(G) - e(v) \geqslant k$.

12.31 证明: 对于每个图 $G$, 存在一个连通图 $H$, 使得 $\text{Cen}(H) = \text{Int}(H) = G$.

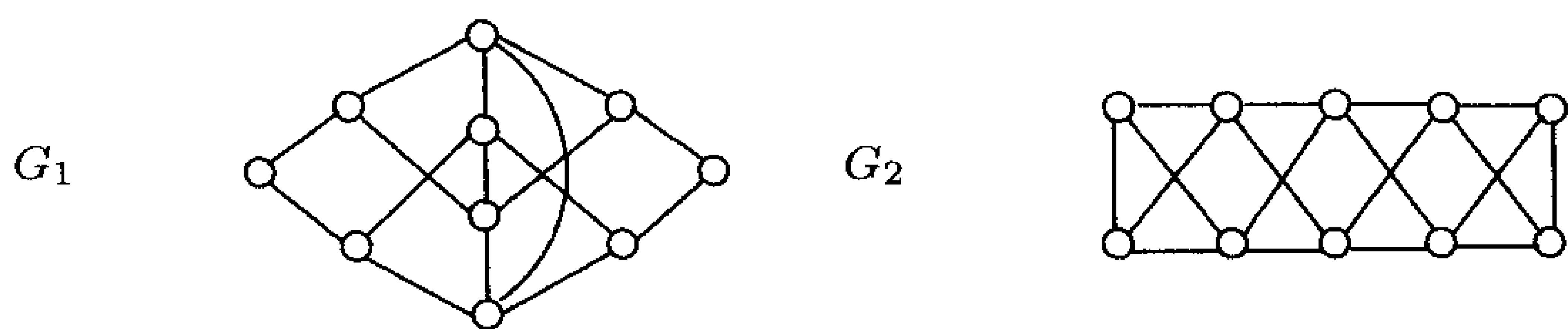



图 12.15 习题 12.29 的图

## 12.3 延伸阅读：定位数

假设某个设施由五间房子 $R_1, R_2, R_3, R_4$ 和 $R_5$ 组成 (如图 12.16). 房子 $R_1$ 和 $R_3$ 的距离为 2, $R_2$ 和 $R_4$ 的距离也为 2, 其余任意两间房子的距离均为 1, 而每个房子与其自身的距离均为 0. 在某间房子里安装一个 (红色) 传感器. 如果某间房子发生火灾, 则该传感器可以监测到发生火灾的房子到传感器所在的房子的距离. 举例来说, 假设传感器被安装在 $R_1$, 如果火灾发生在 $R_3$, 则传感器警告我们：发生火灾的房间到 $R_1$ 的距离为 2. 显然, 火灾发生在 $R_3$, 因为只有 $R_3$ 与 $R_1$ 的距离为 2. 如果火灾发生在 $R_1$, 则传感器显示发生火灾的房间到 $R_1$ 的距离为 0, 即火灾发生在 $R_1$. 如果火灾发生在任何其他房间, 则传感器告诉我们：发生火灾的房间到 $R_1$ 的距离都是 1. 因此, 根据这个信息, 我们无法精确认定哪个房间发生火灾. 事实上, 并没有 这样的房间, 使得把 (红色) 传感器安装在该房间, 即可保证在任何情形下都可以识别火灾的精确位置.

另一方面, 如果我们在 $R_1$ 安装一个红色传感器, 在 $R_2$ 安装一个蓝色传感器. 此时, 比方说房间 $R_5$ 发生火灾, 则红色传感器告诉我们发生火灾的房间到 $R_1$ 的距离为 1, 而蓝色传感器告诉我们发生火灾的房间到 $R_2$ 的距离为 1, 即有序对 $(1,1)$ 确定了 $R_5$. 因为 (所有) 这些房间的有序对是不同的, 所以为了能侦查每次火灾的精确位置, 需要安装传感器的最小个数为 2. 值得注意的是, 这与两个传感器的安装位置有关. 例如, 我们不能把传感器分别安装在 $R_1$ 和 $R_3$, 因为此时房间 $R_2$, $R_4$ 和 $R_5$ 所对应的有序对均为 $(1,1)$, 从而无法判断发生火灾的精确位置.

对我们刚刚描述的设施, 可以用图 12.17 中的图建立模型, 其中顶点表示房间, 且两个顶点是邻接的, 如果所对应的两个房间是相邻的. 这就提出了一个与图相关的问题.

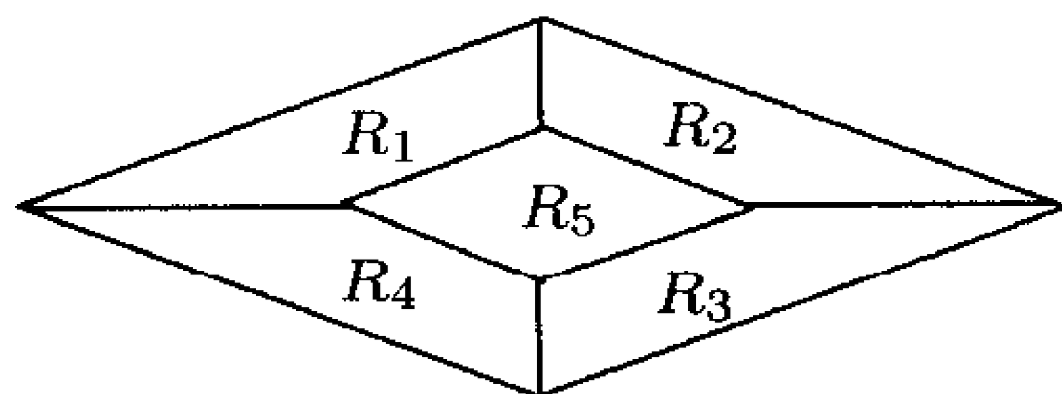



图 12.16 由五间房子构成的一个设施

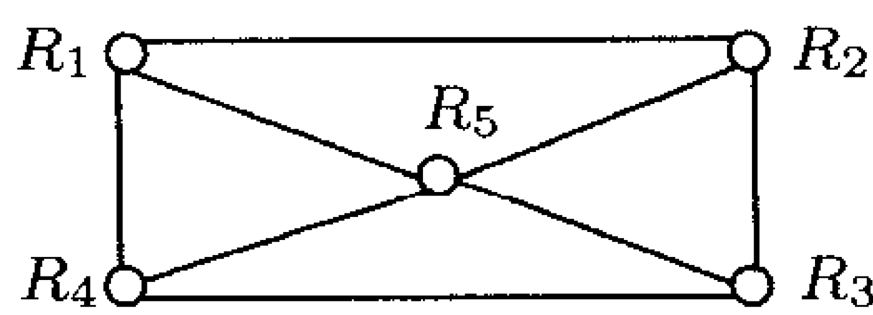



图 12.17 五个房间的图模型

设 $G$ 是一个连通图. 对于 $G$ 的顶点的一个有序集 $W=\{w_1,w_2,\cdots,w_k\}$ 以及 $G$ 的一个顶点 $v$, $v$ 关于 $W$ 的**定位代码** (locating code) (或简称**代码** ( code)) 是指 $k$ 向量

$$c_W(v)=(d(v,w_1),d(v,w_2),\cdots,d(v,w_k)).$$

集合 $W$ 称为是 $G$ 的一个**定位集** (locating set), 如果 $G$ 的不同顶点有不同的代码. 含有最少顶点的定位集称为是 $G$ 的一个**最小定位集** (minimum locating set). **定位数** (location number) $\mathrm{loc}(G)$ 是 $G$ 的最小定位集中的顶点数. 例如, 考虑图 12.18 所示的图 $G$, 它同构于图 12.17 中的图. 有序集 $W_1=\{v_1,v_3\}$ 不是 $G$ 的一个定位集, 这是因为 $c_{W_1}(v_2)=(1,1)=c_{W_1}(v_4)$, 即 $G$ 有两个顶点, 它们关于 $W_1$ 的代码是相同的. 另一方面, $W_2=\{v_1,v_2,v_5\}$ 是 $G$ 的一个定位集, 这是因为 $G$ 中每个顶点关于 $W_2$ 的代码分别是:

$$c_{W_2}(v_1)=(0,1,1),\quad c_{W_2}(v_2)=(1,0,1),\quad c_{W_2}(v_3)=(2,1,1),$$
$$c_{W_2}(v_4)=(1,2,1),\quad c_{W_2}(v_5)=(1,1,0).$$

然而, $W_2$ 不是 $G$ 的最小定位集, 因为 $W_3=\{v_1,v_2\}$ 也是 $G$ 的一个定位集, 且 $G$ 中每个顶点关于 $W_3$ 的代码分别是:

$$c_{W_3}(v_1)=(0,1),\quad c_{W_3}(v_2)=(1,0),\quad c_{W_3}(v_3)=(2,1),$$
$$c_{W_3}(v_4)=(1,2),\quad c_{W_3}(v_5)=(1,1).$$

因为任一顶点都不能构成 $G$ 的定位集, 所以 $W_3$ 是 $G$ 的一个最小定位集, 从而 $\mathrm{loc}(G)=2$.

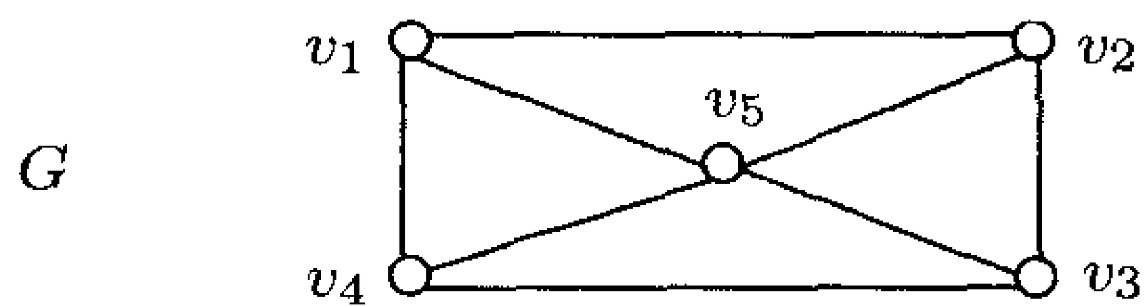



图 12.18 图 $G$

Peter Slater 给出了上述思想在美国声纳与海岸防卫导航系统 (指导远距离航海) 中的应用. 对于一个连通图 $G$, 我们可以把 $G$ 的定位集认为是满足下列条件的顶点集合 $W$, 使得 $G$ 的每个顶点是由该顶点到 $W$ 中顶点的距离所唯一确定.

对于阶为 $n\geqslant 2$ 的连通图 $G$ 及其顶点的一个有序集 $W=\{w_1,w_2,\cdots,w_k\}$, $G$ 中满足下面条件的顶点是唯一的, 即该顶点关于 $W$ 的代码的第$i$个分量为 0; 显然, 该顶点就是 $w_i$. 因此, $W$ 中顶点必然有不同的代码. 由于只有不属于 $W$ 的顶点关于 $W$ 的代码分量全是正数, 所以只有这些顶点才需要验证它们的代码是否互不相同. 这就推出, $G$ 的定位数至多为 $n-1$. 事实上, 对于阶为 $n\geqslant 2$ 的每个连通图 $G$,

$$1\leqslant \mathrm{loc}(G)\leqslant n-1.$$

具有定位数 1 的 $n$ ($\geqslant 2$) 阶的连通图仅仅有一个.

**定理 12.12** $n$ 阶连通图 $G$ 的定位数为 1 当且仅当 $G \cong P_n$.

**证** [直接证法] 设 $P_n: v_1, v_2, \cdots, v_n$. 因为对于每个 $1 \leqslant i \leqslant n$, 均有 $d(v_i, v_1) = i - 1$, 所以 $\{v_1\}$ 是 $P_n$ 的一个最小定位集, 从而 $\text{loc}(P_n) = 1$. 反过来, 设 $G$ 是一个定位数为 1 的 $n$ 阶连通图, 并设 $W = \{w\}$ 是 $G$ 的一个最小定位集. 对 $G$ 的每个顶点 $v$, $c_W(v) = d(v, w)$ 是一个小于 $n$ 的非负整数. 因为 $G$ 的顶点关于 $W$ 的代码互不相同, 则存在一个顶点 $u$, 使得 $d(u, w) = n - 1$. 因此, $G$ 的直径是 $n - 1$, 从而 $G \cong P_n$. ■

作为另一种极端情形, 仅有一个阶为 $n \geqslant 2$ 的连通图具有定位数 $n - 1$.

**定理 12.13** 阶为 $n \geqslant 2$ 的连通图 $G$ 的定位数为 $n - 1$ 当且仅当 $G \cong K_n$.

**证** [直接证法, 逆否证法] 首先假设 $G \cong K_n$, 并设 $W$ 是 $G$ 的一个最小定位集. 如果 $u \notin W$, 则 $c_W(u)$ 的每个分量均为 1. 因而, $G$ 的每个最小定位集必须含有 $n - 1$ 个顶点, 从而 $\text{loc}(G) = n - 1$. 反过来, 假设 $G \ncong K_n$, 则 $G$ 含有两个顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $d(u, v) = 2$. 设 $u, x, v$ 是 $G$ 中一条长度为 2 的路, 且 $W = V(G) - \{x, v\}$. 因为 $d(u, v) = 2$, $d(u, x) = 1$, 所以有 $c_W(x) \neq c_W(v)$, 从而 $W$ 是一个定位集. 因此 $\text{loc}(G) \leqslant n - 2$. ■

前文已经提到, 如果 $G$ 是一个阶为 $n \geqslant 2$ 的连通图, 则 $1 \leqslant \text{loc}(G) \leqslant n - 1$. 更进一步地, 我们已经获得了两个极端值可达到的图. 如果, 除了 $G$ 的阶之外, 我们还知道图 $G$ 的直径和最大度, 则 $G$ 的定位数的界可以进一步改良.

**定理 12.14** 设 $G$ 是一个阶为 $n \geqslant 2$ 的非平凡连通图, 且 $G$ 的直径为 $d$, 最大度为 $\Delta$. 则

$$\lceil \log_3 (\Delta + 1) \rceil \leqslant \text{loc}(G) \leqslant n - d. \tag{12.1}$$

**证** [直接证法] 首先, 我们建立上界. 设 $u$ 和 $v$ 是 $G$ 中满足 $d(u, v) = d$ 的两个顶点, 且设 $u = v_0, v_1, \cdots, v_d = v$ 是一条 $u - v$ 测地线, 以及

$$W = V(G) - \{v_1, v_2, \cdots, v_d\}.$$

因为, $u \in W$, 且对每个 $1 \leqslant i \leqslant d$, 有 $d(u, v_i) = i$, 则 $W$ 是 $G$ 的一个基数为 $n - d$ 的定位集. 因此 $\text{loc}(G) \leqslant n - d$.

接下来我们考虑下界. 设 $\text{loc}(G) = k$, 以及 $v \in V(G)$, 满足 $\deg v = \Delta$. 设 $N(v)$ 是 $v$ 的邻域, $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ 是 $G$ 的一个定位集. 注意到, 如果 $u \in N(v)$, 则根据定理 12.3, 对每个 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 距离 $d(u, w_i)$ 一定为 $d(v, w_i)$, $d(v, w_i) + 1$ 或 $d(v, w_i) - 1$ 中的一个值. 而且, 因为 $W$ 是 $G$ 的一个定位集, 故对每个 $u \in N(v)$, $c_W(u) \neq c_W(v)$. 因此, $c_W(u)$ 的 $k$ 个分量中的每一个均有三种可能. 另一方面, 对每个 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 不可能有 $d(u, w_i) = d(v, w_i)$; 这就推出: $N(v)$ 的顶点关于 $W$ 至

多有 $3^k-1$ 种不同的代码, 因此 $|N(v)|=\Delta\leqslant 3^k-1$. 故

$$\mathrm{loc}(G)=k\geqslant \log_3(\Delta+1).$$

又因为 $\mathrm{loc}(G)$ 是一个整数, 所以有 $\mathrm{loc}(G)\geqslant\lceil\log_3(\Delta+1)\rceil$. ■

由于路 $P_n$ $(n\geqslant 2)$ 有最大度 $\Delta=2$ 和直径 $d=n-1$, 根据 (12.1) 中的不等式, 我们有

$$\lceil\log_3(2+1)\rceil=1\leqslant \mathrm{loc}(P_n)\leqslant 1=n-(n-1).$$

所以, 上述的两个界对于路 $P_n$ 都是紧的. 更进一步, 完全图的直径为 1, 定位数为 $n-1$, 所以在此情形下, 上界是可以达到的. 上面两个界对其他图也可能是紧的.

设 $G$ 是一个阶为 $n\geqslant 2$ 的连通图. $G$ 中两个顶点 $u$ 和 $v$ 称为是**距离相似的 (distance similar)**, 如果对每个 $x\in V(G)-\{u,v\}$, 均有 $d(u,x)=d(v,x)$. 因此, 对两个不同顶点 $u$ 和 $v$, 如果

(1) $uv\notin E(G)$ 且 $N(u)=N(v)$ 或

(2) $uv\in E(G)$ 且 $N[u]=N[v]$,

则它们是距离相似的. 距离相似是定义在 $V(G)$ 上的一个等价关系, (习题 12.36 要求读者自己验证). 因此, 顶点 $V(G)$ 可以被划分成 $k$ 个不同的距离相似等价类, 比方说, $V_1,V_2,\cdots,V_k$. 对每个整数 $i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$, $G$ 的集合 $V_i$ 或者是一个独立集, 或者诱导出一个完全子图; 而且 $G$ 的每个定位集都包含每个 $V_i$ 中除至多一个顶点以外的所有顶点, 所以

$$\mathrm{loc}(G)\geqslant n-k.$$

考虑图 12.19 中的阶为 $n=11$ 的图 $G$. 三个距离相似等价类是 $V_1=\{u_1,w_1\}$, $V_2=\{u_2,w_2\}$, $V_3=\{u_3,w_3\}$, 其余五个距离相似等价类都是由单个顶点构成. 因此, $G$ 有 $k=8$ 个距离相似等价类, 故 $\mathrm{loc}(G)\geqslant n-k=3$. 我们可以假设, $G$ 的任意定位集都包含顶点 $w_1,w_2,w_3$. 事实上, $W=\{w_1,w_2,w_3\}$ 本身就是一个定位集, 因而也是一个最小定位集. 故 $\mathrm{loc}(G)=n-k$. $V(G)-W$ 中顶点关于 $W$ 的代码分别为:

$$c_W(u_1)=(1,3,4),\quad c_W(u_2)=(3,2,3),\quad c_W(u_3)=(4,3,1),$$
$$c_W(u_4)=(1,2,3),\quad c_W(u_5)=(1,3,3),\quad c_W(u_6)=(2,1,2),$$
$$c_W(u_7)=(2,2,2),\quad c_W(u_8)=(3,2,1).$$

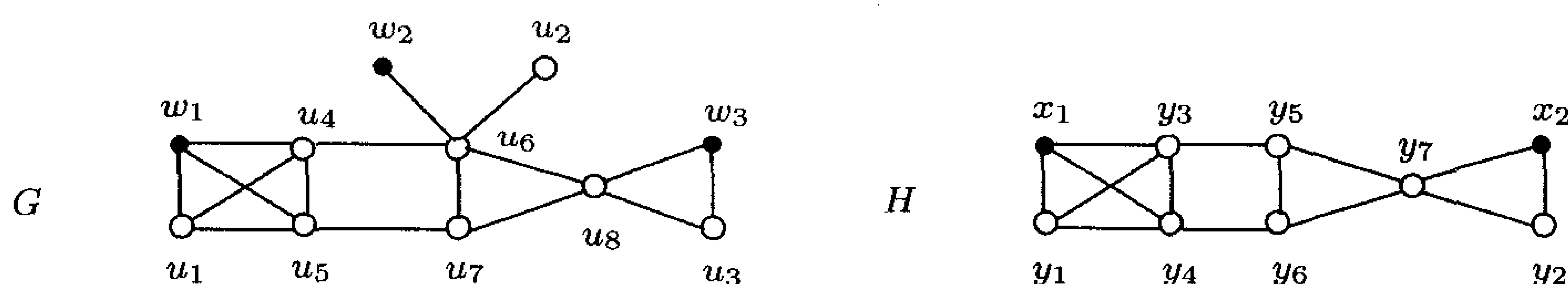



图 12.19 图 $G$ 和 $H$

接下来, 考虑图 12.19 中的那个阶为 $n=9$ 的图 $H$. 在这个图中, $V_1=\{x_1,y_1\}$ 和 $V_2=\{x_2,y_2\}$ 是两个距离相似等价类, 其余的距离相似等价类仅由单个顶点构成. 因此, 共有 $k=7$ 个距离相似等价类, 所以 $\text{loc}(H)\geqslant n-k=2$. 设 $W=\{x_1,x_2\}$. 则 $V(H)-W$ 中顶点关于 $W$ 的代码分别为:

$$c_W(y_1)=(1,4),\quad c_W(y_2)=(4,2),\quad c_W(y_3)=(1,3),\quad c_W(y_4)=(1,3),$$
$$c_W(y_5)=(2,2),\quad c_W(y_6)=(2,2),\quad c_W(y_7)=(3,1).$$

因为 $c_W(y_3)=c_W(y_4)$, $c_W(y_5)=c_W(y_6)$, 所以 $W$ 不是 $H$ 的定位集. 另一方面, 如果 $W'=\{x_1,x_2,y_3\}$, 则 $W'$ 是一个定位集, 所以 $\text{loc}(H)=3$. 因此, $\text{loc}(H)>n-k$.

**习题**

12.32 对于 $n\geqslant 3$, 确定 $\text{loc}(C_n)$.

12.33 对于 $1\leqslant s\leqslant t$, 确定 $\text{loc}(K_{s,t})$.

12.34 (a) 列举一个阶为 $n\geqslant 3$ 且直径为 $d$ 的连通图 (除了 $P_n$ 和 $K_n$), 使得 $\text{loc}(G)=n-d$.
(b) 列举一个阶为 $n\geqslant 3$ 且极大度为 $\Delta$ 的连通图 (除了 $P_n$ 和 $K_n$), 使得 $\text{loc}(G)=\lceil\log_3(\Delta+1)\rceil$.

12.35 证明: 对于每对整数 $(k,n)$, 其中 $1\leqslant k\leqslant n-1$, 都存在一个 $n$ 阶连通图 $G$, 使得 $\text{loc}(G)=k$.

12.36 设 $G$ 是一个连通图. 证明: 距离相似是定义在 $V(G)$ 上的一个等价关系.

12.37 确定图 12.20 中图 $G$ 的定位数. 给出 $G$ 的一个最小定位集 $W$, 并写出 $G$ 的每个顶点关于 $W$ 的代码.

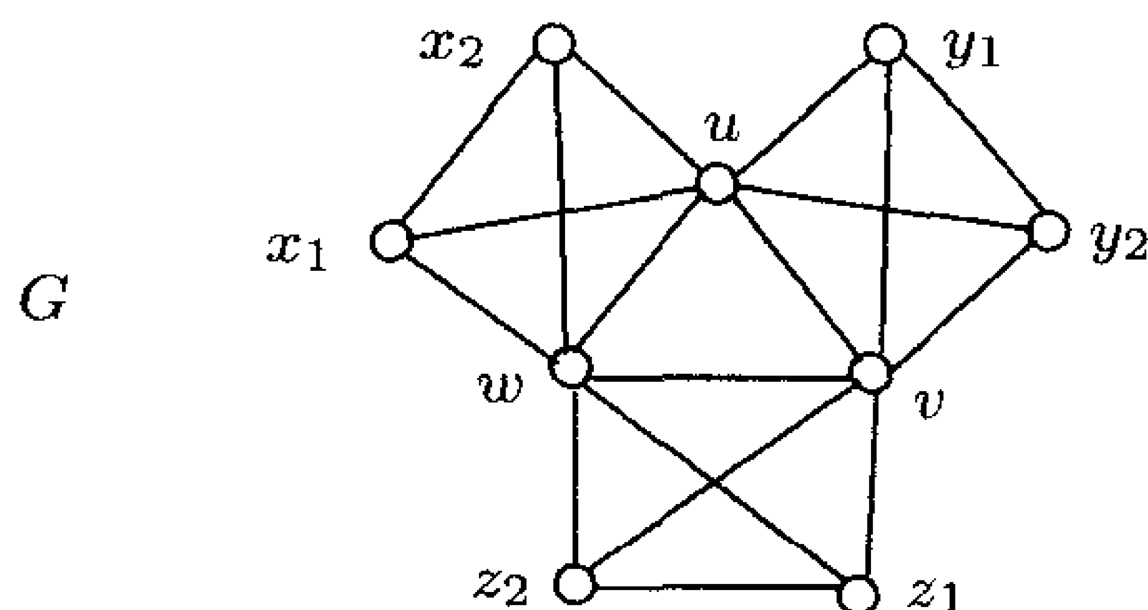



图 12.20 习题 12.37 中的图 $G$

## 12.4 延伸阅读: 绕路距离和有向距离

回顾一下, 连通图 $G$ 中顶点 $u$ 到顶点 $v$ 的距离 $d(u,v)$ 是指 $G$ 中一条最短 $u-v$ 路的长度. 尽管这是图中顶点之间距离的标准定义, 但这并非是仅有的距离定义.

对于 $n$ 阶连通图 $G$ 中的两个顶点 $u$ 和 $v$, 从 $u$ 到 $v$ 的**绕路距离** (**detour distance**) $D(u,v)$ 定义为 $G$ 中的一条最长 $u-v$ 路的长度. 长为 $D(u,v)$ 的一条 $u-v$ 路称为是一条 $u-v$ **绕路** (**detour**). 例如, 对于图 12.21 所示的图 $G$, $d(u,v)=3$, 而 $D(u,v)=8$, 且一条 $u-v$ 的绕路也在图中以粗体标出.

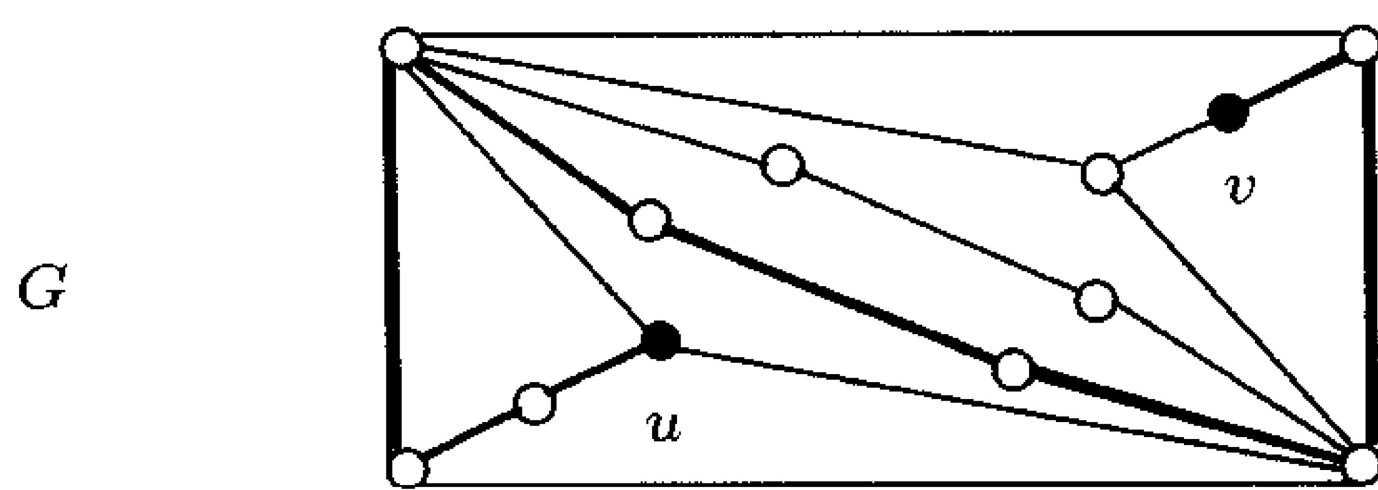



图 12.21 图解绕路距离

和标准距离一样, 绕路距离也是定义在每个连通图顶点集上的一个度量.

**定理 12.15** 绕路距离是定义在每个连通图顶点集上的一个度量.

**证** [直接证法] 设 $G$ 是一个连通图. 因为 (1) $D(u,v) \geqslant 0$, (2) $D(u,v) = 0$ 当且仅当 $u = v$, 以及 (3) 对 $G$ 的每对顶点 $(u,v)$, 均满足 $D(u,v) = D(v,u)$, 所以剩下只需证明绕路距离满足三角不等式即可.

设 $u, v, w$ 是 $G$ 中任意三个顶点. 如果这三个顶点中有两个是相同的, 则不等式 $D(u,w) \leqslant D(u,v) + D(v,w)$ 成立. 因此, 我们假设 $u, v$ 和 $w$ 互不相同. 设 $P$ 是 $G$ 中一个长为 $k = D(u,w)$ 的 $u - w$ 绕路. 下面分两种情形讨论.

**情形 1** $v$ 在 $P$ 上. 设 $P_1$ 是 $P$ 的一条 $u - v$ 子路, $P_2$ 是 $P$ 的一条 $v - w$ 子路. 假设 $P_1$ 的长度为 $s$, $P_2$ 的长度为 $t$. 则 $s + t = k$, 因此,

$$D(u,w) = k = s + t \leqslant D(u,v) + D(v,w).$$

**情形 2** $v$ 不在 $P$ 上. 因为 $G$ 是连通的, 所以存在一条从 $v$ 到 $P$ 上顶点的最短路 $Q$. 设 $Q$ 是一条 $v - x$ 路. 因此 $x$ 位于 $P$ 上, 但 $Q$ 上没有其他顶点位于 $P$ 上. 设 $Q$ 的长度为 $r$, 则 $r > 0$ (见图 12.22).

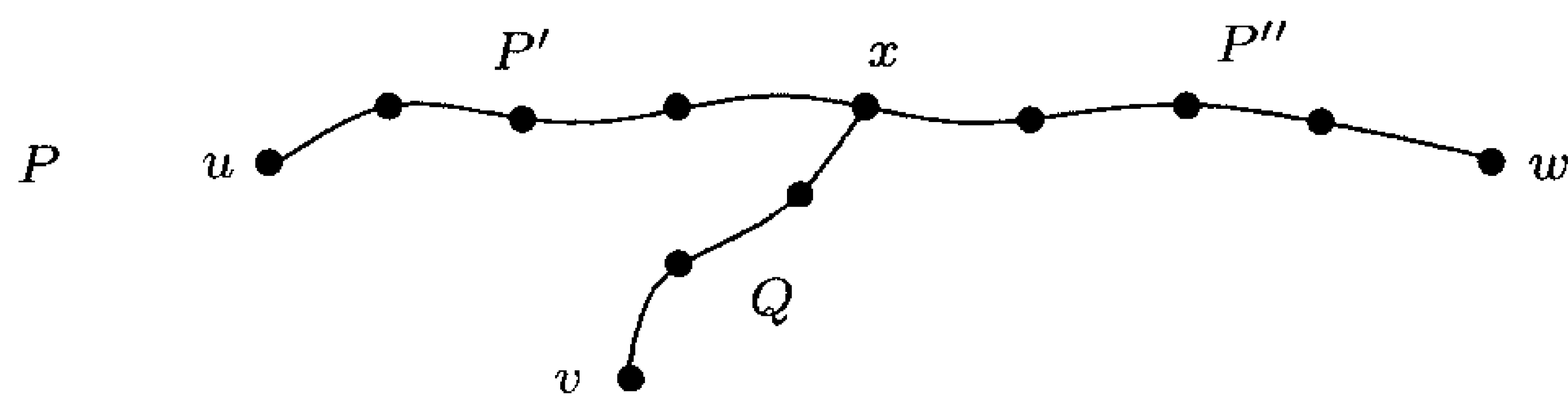



图 12.22 情形 2 证明中的一步

设 $P$ 的 $u - x$ 子路 $P'$ 的长度为 $a$, $P$ 的 $x - w$ 子路 $P''$ 的长度为 $b$, 则 $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. 因此, $D(u,v) \geqslant a + r$, $D(v,w) \geqslant b + r$. 所以

$$D(u,w) = k = a + b < (a + r) + (b + r) \leqslant D(u,v) + D(v,w),$$

因此三角不等式成立. ■

接下来, 我们效仿前面来定义绕路离心率, 绕路半径和绕路直径. 设 $G$ 是一个连通图, $v$ 是 $G$ 的一个顶点. $v$ 的**绕路离心率 (detour eccentricity)** $e_D(v)$ 定义为

$v$ 到 $G$ 的所有顶点的最大绕路距离. 在 $G$ 的所有顶点中, 最小绕路离心率称为是 $G$ 的**绕路半径 (detour radius)**, 最大绕路离心率称为是 $G$ 的**绕路直径 (detour diameter)**, 分别记为 $\text{rad}_D(G)$ 和 $\text{diam}_D(G)$. 我们也可给出 $\text{diam}_D(G)$ 的上下界, 该结论 (包括其证明) 非常类似于定理 12.1.

**定理 12.16** 对每个非平凡连通图 $G$,

$$\text{rad}_D(G) \leqslant \text{diam}_D(G) \leqslant 2\text{rad}_D(G).$$

**证** [直接证法] 根据 $\text{rad}_D(G)$ 和 $\text{diam}_D(G)$ 的定义, 立即有不等式 $\text{rad}_D(G) \leqslant \text{diam}_D(G)$. 现在设 $u$ 和 $v$ 是 $G$ 的两个顶点, 满足 $D(u,v) = \text{diam}_D(G)$; $w$ 是 $G$ 的顶点, 满足 $e_D(w) = \text{rad}_D(G)$. 因为绕路距离是 $V(G)$ 上的一个度量, 所以

$$\text{diam}_D(G) = D(u,v) \leqslant D(u,w) + D(w,v) \leqslant 2\text{rad}_D(G),$$

从而结论成立. ■

每对正整数 $a, b$ 都可以视为是某个连通图的绕路半径和绕路直径, 其中 $a \leqslant b \leqslant 2a$.

**定理 12.17** 对每对正整数 $a, b$ $(a \leqslant b \leqslant 2a)$, 都存在一个连通图 $G$, 使得

$$\text{rad}_D(G) = a, \text{ 且 } \text{diam}_D(G) = b.$$

**证** [直接证法] 如果 $a = b = k \geqslant 1$, 则完全图 $K_{k+1}$ 即为所需. 如果 $a < b \leqslant 2a$, 设 $G$ 是通过把完全图 $K_{a+1}$ 的一个顶点 $v$ 与完全图 $K_{b-a+1}$ 的一个顶点重合而得到的 $b+1$ 阶图 (当 $a = 3, b = 5$ 时, 见图 12.23). 因为 $b \leqslant 2a$, 所以 $b-a+1 \leqslant a+1$, 从而 $e_D(v) = a$. 对每个 $x \in V(G) - \{v\}$, $G$ 有一条从 $x$ 出发的 Hamilton 路, 所以 $e_D(x) = b$. 因此 $\text{rad}_D(G) = a$ 且 $\text{diam}_D(G) = b$. ■

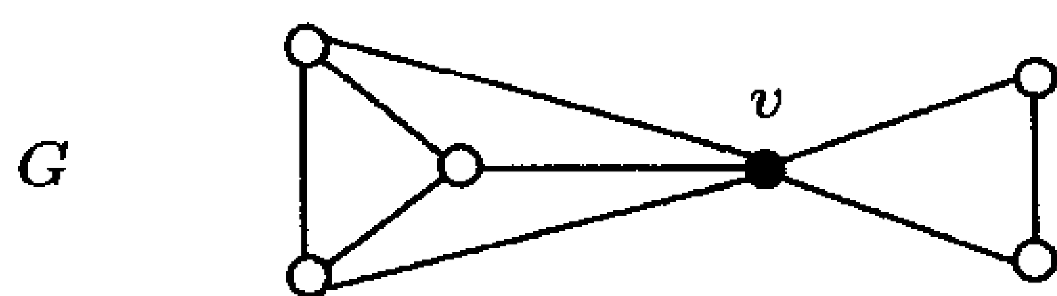



图 12.23 定理 12.17 证明中的图 $G$, 其中 $a = 3, b = 5$

对于整数 $a$ 和 $b$ $(a \leqslant b \leqslant 2a)$, 定理 12.17 的证明中的图 $G$ 的每个顶点的离心率或者为 $a$, 或者为 $b$. 这有别于一般的离心率; 如果 $k$ 为满足 $\text{rad}_D(G) < k < \text{diam}_D(G)$ 的一个整数, 则 $G$ 中可能不存在顶点 $x$, 使得 $e_D(x) = k$.

我们已经在连通图中定义了两种距离, 而且它们都是图的顶点集上的度量. 我们现在转向有向图.

设 $D$ 是一个连通有向图. 对于 $D$ 的两个顶点 $u$ 和 $v$, **有向距离 (directed distance)** $\vec{d}(u,v)$ 定义为 $D$ 中一条最短有向 $u-v$ 路的长度. 注意到, 当在有向图

$D$ 中讨论 $u-v$ 路时, 我们所指的是有向 $u-v$ 路, 且在 $D$ 中讨论从顶点 $u$ 到顶点 $v$ 的距离时, 我们所指的也是从 $u$ 到 $v$ 的有向距离. 一条长为 $\vec{d}(u,v)$ 的 $u-v$ 路称为是一条 $u-v$ **测地线 (geodesic)**. 事实上, $D$ 是连通的并不能保证 $D$ 中一定存在 $u-v$ 路. 鉴于此原因, 在讨论有向图的距离时, 我们通常都假设 $D$ 是强连通的. 特别地, 我们假设 $D$ 是一个强连通的定向图. 例如, 对图 12.24 所示的 $3A=W$ 强连通竞赛图 $T$, $\vec{d}(u,v)=1$. 然而, $\vec{d}(v,u)=2$, 所以 $\vec{d}(u,v)\neq\vec{d}(v,u)$; 此时, 距离不是对称的. 因此, 距离不再是非平凡强连通定向图顶点集上的一种度量.

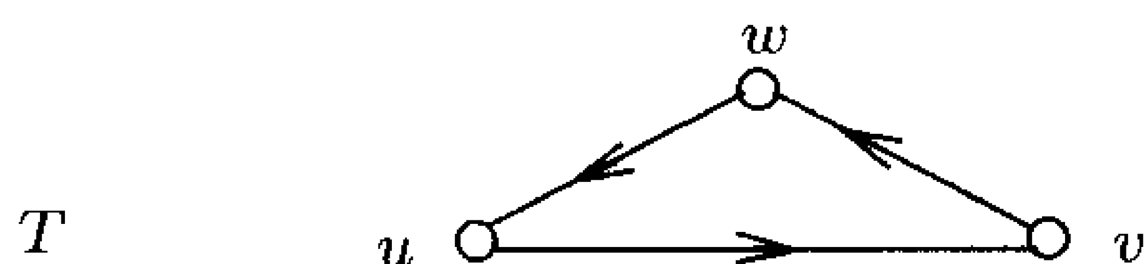



图 12.24 强有向图中的有向距离

然而, 有向图中的距离却满足三角不等式. 设 $u,v$ 和 $w$ 是连通有向图 $D$ 的三个顶点, 设 $P_1$ 是一条 $u-v$ 测地线, $P_2$ 是一条 $v-w$ 测地线. 则 $P_1$ 连接 $P_2$ 便形成一条长为 $\vec{d}(u,v)+\vec{d}(v,w)$ 的 $u-w$ 链. 则根据定理 7.2, $D$ 含有一条 $u-w$ 路, 且它的长度至多为 $W$ 的长度, 因此

$$\vec{d}(u,w)\leqslant\vec{d}(u,v)+\vec{d}(v,w).$$

对于有向图中的距离, 我们也可以定义强有向图的顶点离心率. 设 $D$ 是一个强有向图, $v$ 是 $D$ 的一个顶点. $v$ 的**离心率 (eccentricity)** $e(v)$ 定义为 $v$ 到 $D$ 顶点的最长测地线的长度. 在 $D$ 的所有顶点中, 最小离心率称为是 $D$ 的**半径 (radius)**, 最大离心率称为是 $D$ 的**直径 (diameter)**, 分别记为 $\mathrm{rad}(D)$ 和 $\mathrm{diam}(D)$.

为了阐述上面的概念, 设 $r$ 和 $d$ 是两个正整数, 且 $r\leqslant d$. 设 $C_{r+1}$ 是有向 $(r+1)$ 圈, 不妨设为 $C_{r+1}$: $u_1, u_2,\cdots, u_{r+1}, u_1$. 注意到, 对 $1\leqslant i\leqslant r+1$, $e(u_i)=r$. 设 $P_d$: $v_1, v_2, \cdots, v_d$ 是一条 $d$ 阶路. 下面由 $C_{r+1}$ 和 $P_d$ 构造一个有向图 $D$: 连接 $C_{r+1}$ 的每个顶点到 $v_i$ $(1\leqslant i\leqslant d-r+1)$, 且连接 $v_d$ 到 $C_{r+1}$ 的每个顶点 (见图 12.25). 因此

$$\begin{aligned}
&e(u_i)=r, && \text{其中 } 1\leqslant i\leqslant r+1;\\
&e(v_1)=d, && \\
&e(v_i)=d-i+2, && \text{其中 } 2\leqslant i\leqslant d-r+1;\\
&e(v_i)=r, && \text{其中 } d-r+2\leqslant i\leqslant d.
\end{aligned}$$

特别地, 这说明了 $D$ 的直径可以大于其半径的两倍, 因此对有向距离来说, 没有类似于定理 12.1 和 12.2 的结论.

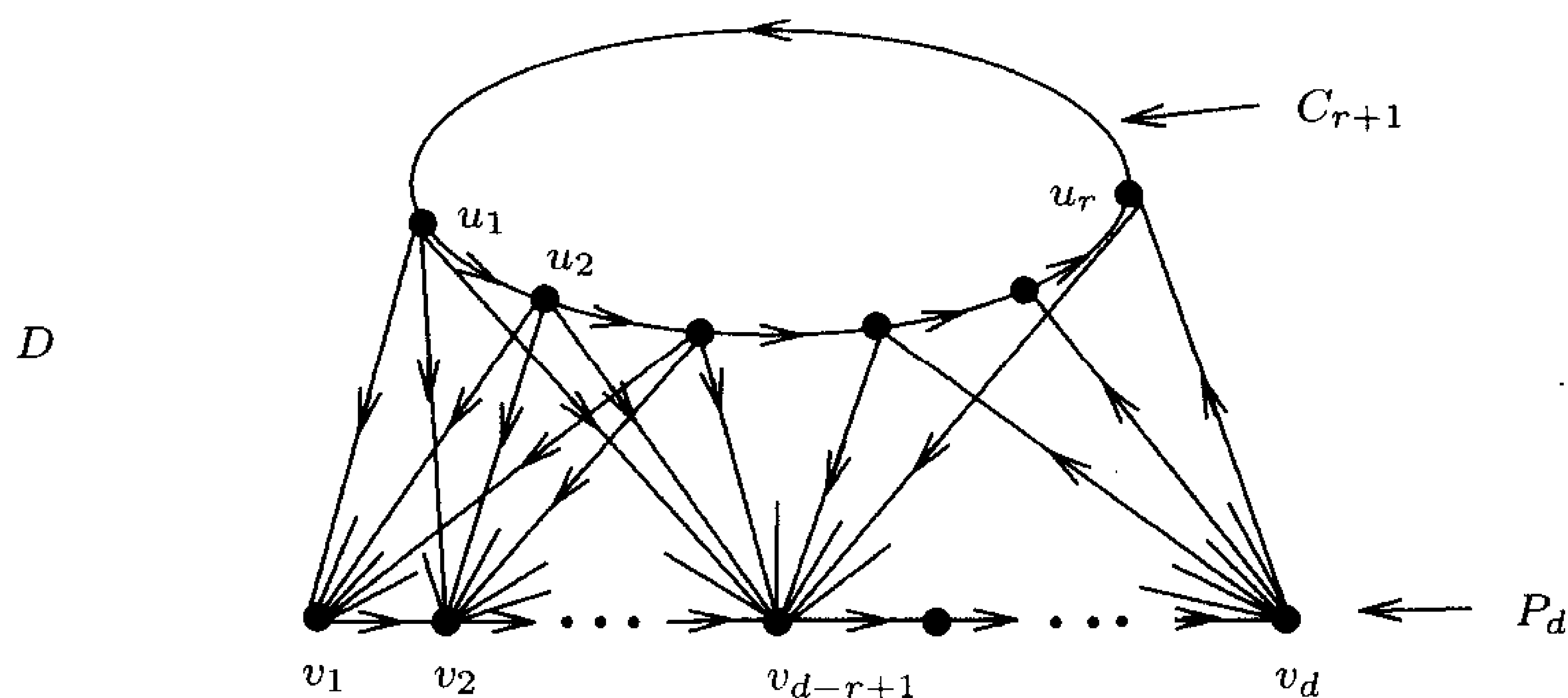



图 12.25 满足 $\mathrm{rad}(D) = r$ 和 $\mathrm{diam}(D) = d$ 的一个有向图 $D$

## 习题

12.38 (a) 列举一个阶大于或等于 5 的连通图 $G$, 使得对 $G$ 的每对顶点 $(u, v)$, 均有 $D(u, v) = d(u, v)$.

(b) 刻画连通图 $G$, 使得对 $G$ 的每对顶点 $(u, v)$, 均有 $D(u, v) = d(u, v)$.

12.39 列举一个连通图 $G$ 和一个正常数 $K$, 使得对 $G$ 的每对顶点 $(u, v)$ $(u \neq v)$, 都有 $D(u, v) = d(u, v) + K$.

12.40 列举一个满足下面性质的连通图 $G$, 使得对 $G$ 的每对不同顶点 $u, v$, 每条 $u - v$ 测地线与每条 $u - v$ 绕路仅有 $u$ 和 $v$ 两个公共顶点.

12.41 对 $G = K_n, C_n, Q_n$ $(n \geqslant 3)$ 以及 $G = K_{r,s}$ $(2 \leqslant r \leqslant s)$, 分别确定 $\mathrm{rad}_D(G)$ 和 $\mathrm{diam}_D(G)$.

12.42 设 $u$ 和 $v$ 是连通图的两个顶点. 证明: $|e_D(u) - e_D(v)| \leqslant D(u, v)$.

12.43 证明: 每个连通图 $G$ 的绕路中心都位于 $G$ 的某个块上.

12.44 设 $G$ 是一个连通图, 定义

$$\overline{d}(u, v) = d(u, v) + D(u, v).$$

问: $\overline{d}$ 是 $V(G)$ 上的一个度量吗? 并给予解释.

12.45 设 $G$ 是一个连通图, 并且 $d'$ 是 $V(G)$ 上的一个度量.

(a) 定义 $\mathrm{rad}_{d'}(G)$ 和 $\mathrm{diam}_{d'}(G)$.

(b) 证明或反驳: $\mathrm{rad}_{d'}(G) \leqslant \mathrm{diam}_{d'}(G) \leqslant 2\,\mathrm{rad}_{d'}(G)$.

12.46 设 $G$ 为含有割点的连通图, $v, w \in V(G)$. 证明或反驳:

(a) 如果 $e_D(v) = \mathrm{rad}_D(G)$, 则 $v$ 是 $G$ 的割点.

(b) 如果 $e_D(w) = \mathrm{diam}_D(G)$, 则 $w$ 不是 $G$ 的割点.

12.47 对于一个给定的整数 $n \geqslant 3$, 找出满足下面条件的所有整数 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n - 1)$, 使得: 存在一个 $n$ 阶的连通图 $G$, 且对 $G$ 的每对不同顶点 $u, v$, $D(u, v) = k$.

12.48 列举一个整数 $n \geqslant 4$, 使得: 存在两个 $n$ 阶的不同构图 $G_1$ 和 $G_2$, 且对 $G_1$ 和 $G_2$ 的每对不同顶点 $u, v$, $d(u, v) + D(u, v) = n$.

12.49 证明：对每对整数 $a, b$ $(1 \leqslant a \leqslant b)$,

(a) 存在一个连通图 $F$, 使得 $\mathrm{rad}(F) = a$, $\mathrm{rad}_D(F) = b$;

(b) 存在一个连通图 $H$, 使得 $\mathrm{diam}(H) = a$, $\mathrm{diam}_D(H) = b$.

12.50 对于强有向图 $D$ 的两个顶点 $u$ 和 $v$, 定义

$$d_s(u,v) = \vec{d}(u,v) + \vec{d}(v,u).$$

(a) 该距离是 $V(D)$ 上的一个度量吗? 并给予解释.

(b) 你自己提出一个问题, 并回答之.

12.51 对于强有向图 $D$ 的两个顶点 $u$ 和 $v$, 定义

$$d_p(u,v) = \vec{d}(u,v) \cdot \vec{d}(v,u).$$

该距离是 $V(D)$ 上的一个度量吗? 并给予解释.

## 12.5 专题探索：频道分配

无线电波是一种通过天线传播的电磁波, 它有若干不同的频率. 当一个无线电接收器调谐到某个特定的频率时, 就可以接受一些给定的信号. 在美国, 由联邦通讯委员会 (FCC) 决定哪些频率可被用于哪些用途. 当然, 也是由 FCC 许可一些特定的频率用于无线电台的发射和接收信号. 调幅 (AM) 广播是指从 550kHz(千赫) 到 1700kHz 之间的频段, 即调幅广播可以在 550 000 周/秒到 1 700 000 周/秒之间的频段内广播. 第一台无线广播出现于 1906 年左右. 在上个世纪二十年代, 针对于调幅广播, 开始考虑到频率分配, 因为在那时候无线电技术发展缓慢, 所以低频就可以应付当时的调幅广播了.

对于早期的无线电广播, 主要的发明者可能是 Edwin Armstrong (1890—1954). 1933 年, Armstrong 开发出了完整的调频 (FM) 系统. 所有的调频电台都在 88 MHz(百万赫兹) 到 108 MHz 之间的频段传输信息, 即调频电台的发射机是在 88 000 000 到 108 000 000 周/秒之间的某个频率振荡. 只有调频电台才允许使用这些波段. 当然, 上面频段之上和之下的一些频段是为电视台保留的. 例如, 从 54 MHz 到 88 MHz 之间的频段给 2 到 6 频道使用, 而从 174 MHz 到 220 MHz 之间的频段给 7 到 13 频道使用.

如前所述, 调频电台的频段开始于 88.0 MHz, 终止于 108.0 MHz, 被分为 100 个频道, 每个频道的宽度为 0.2 MHz(或 200 kHz). 用以识别调频电台频率的就是其 200 kHz 频道的中点. 例如, 在密西根州, 调频电台 WVTI 位于霍兰市附近, 以 96.1 MHz 的频率广播; 而调频电台 WFAT 位于波蒂奇市, 以 96.5 MHz 的频率广播. 一般地, 无线电调频台都给自己起个名字 (准确地说是昵称). 例如, 电台 WVTI 称自己为 “新 I-96”, 电台 WFAT 的昵称为 “肥胖一号”. 依据一些参数 (如天线的高度,

信号的有效幅射强度), 调频电台可分为不同的类别. 图 12.26 给出了常见的五类电台：A, B1, B, C1 和 C. 对每类电台, 图 12.26 中还标出了信号的最大有效幅射强度 (ERP)(以功率 (kW) 度量), 平均地形之上的最大天线高度 (HAAT) (以米 (m) 度量). 图 12.27 列出了电台 WVTI 和 WFAT 所属的类别.

| 调频电台类别 | 最大值 ERP (kW) | 最大值 HAAT (m) |
|---|---|---|
| A | 6.0 | 100 |
| B1 | 25.0 | 100 |
| B | 50.0 | 150 |
| C1 | 100.0 | 299 |
| C | 100.0 | 600 |

图 12.26　调频电台的分类

| | WVTI 肥胖一号 | WFAT 新 I-96 |
|---|---|---|
| ERP (kW) | 3.6 | 50 |
| HAAT (m) | 79 | 150 |
| 电台类别 | A | B |

图 12.27　电台 ERP 和 HAAT

调频电台的频道分配不仅仅依赖于信号的有效辐射强度和天线的高度, 而且还依赖于电台之间的距离. 特别地, 如果两个电台分享相同的频道 (称为共频道电台), 则它们之间的距离至少应该为 115 公里 (71 海里); 当然, 具体的分割距离还依赖于电台的类型. 两个频道称为是第一相邻的, 或简称相邻的, 如果它们的频率相差 200 kHz, 即这两个频道在调频广播的刻度表上是连续的. 例如, 105.7 MHz 上的调频电台和频道 105.9 MHz 上调频电台是相邻的. 相邻频道的电台距离至少为 72 公里 (45 海里). 另外, 电台之间的距离也依据它们所属的类型而变化. 例如, 相差 400 kHz 或 600 kHz 的两个电台 (所谓的 2 相邻, 或 3 相邻) 之间的距离至少为 31 公里. 图 12.28 列出了这些频道上的电台之间的实际最小距离.

因为调频电台 WFAT 属于 A 类电台, 并以 96.5 MHz 的频道广播, 而电台 WVTI 属于 B 类电台, 以 96.1 MHz 的频道广播, 因此它们是第二相邻电台, 故它们之间的距离至少应该为 69 公里. 这种条件一般要满足, 即使不满足, 情形也很少.

一般而言, 彼此之间很靠近的调频电台必需分配以不同的频道. 两个电台离得越近, 它们所分配的频道就应该相差越大. 如何给发射机有效地分配频道就是所谓的**频道分配问题 (Channel Assignment Problem)**.

应用图理论研究频道分配问题至少可以追溯到 1970 年. 1980 年, William Hale 给出了频道分配问题的一个模型. 通常人们把频道分配问题转化为图染色问题, 其中 (1) 发射器就是图的顶点,(2) 两个顶点 (发射器) 是邻接的, 如果它们离得足够近, (3) 顶点的颜色就是分配给对应发射器的频道,(4) 满足极小距离分割要求, 即, 对每对颜色, 在它们所对应的不同顶点之间都有一个最小的可行距离.

对于由频道分配问题所引发的图模型, 我们考虑其中的一个模型. 对于一个 $n$ 阶连通图 $G$ 和一个整数 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant \operatorname{diam}(G))$, $G$ 的一个**广播 $k$ 染色 (radio $k$-**

| | 共用频道 | 第一相邻频道 | 第二或第三相邻频道 |
|---|---|---|---|
| A 到 A | 115 | 72 | 31 |
| A 到 B1 | 143 | 96 | 48 |
| A 到 B | 178 | 113 | 69 |
| A 到 C1 | 200 | 133 | 75 |
| A 到 C | 226 | 165 | 95 |
| B1 到 B1 | 175 | 114 | 50 |
| B1 到 B | 211 | 145 | 71 |
| B1 到 C1 | 233 | 161 | 77 |
| B1 到 C | 259 | 193 | 105 |
| B 到 B | 241 | 169 | 74 |
| B 到 C1 | 270 | 195 | 79 |
| B 到 C | 274 | 217 | 105 |
| C1 到 C1 | 245 | 177 | 82 |
| C1 到 C | 270 | 209 | 105 |
| C 到 C | 290 | 241 | 105 |

图 12.28 调频电台之间的所必需的距离 (公里)

**coloring)**定义为满足如下条件的一个函数 $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 使得对 $G$ 的任意两个不同顶点 $u$ 和 $v$, 有

$$d(u,v) + |c(u) - c(v)| \geqslant 1 + k.$$

如果 $k = 2$, 则广播 2 染色要求：对 $G$ 的任意两个不同顶点 $u$ 和 $v$, 有

$$d(u,v) + |c(u) - c(v)| \geqslant 3.$$

这就是说,

(1) 分配给邻接顶点的颜色必须至少相差 2,

(2) 距离为 2 的顶点必须分配以不同的颜色,

(3) 对距离大于或等于 3 的顶点, 没有染色限制.

图 12.29 所示的是图 $H$ 的一个广播 2 染色.

一个连通图 $G$ 的广播 $k$ 染色 $c$ 的**值 (value)** $\text{rc}_k(c)$ 定义为分配给 $G$ 顶点的最大颜色; $G$ 的**广播 $k$ 色数 (radio $k$-chromatic number)** $\text{rc}_k(G)$ 定义为 $\min\{\text{rc}_k(c)\}$ (取遍 $G$ 的所有广播 $k$ 染色 $c$). $G$ 的一个广播 $k$ 染色 $c$ 称为是**最小广播 $k$ 染色 (minimum radio $k$-coloring)**, 如果 $\text{rc}_k(c) = \text{rc}_k(G)$. 对连通图 $G$ 的任一个最小广播 $k$ 染色 $c$, 必然存在顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $c(u) = 1$ 和 $c(v) = \text{rc}_k(c)$.

对图 12.29 中图 $H$ 的广播 2 染色, $\text{rc}_2(c) = 7$. 但 $H$ 的广播 2 色数不是 7. 图 12.30 给出了 $H$ 的一个值为 6 的广播 2 染色. 事实上, $\text{rc}_2(H) = 6$.

**例 12.18** 对图 12.29 中的图 $H$, $\text{rc}_2(H) = 6$.

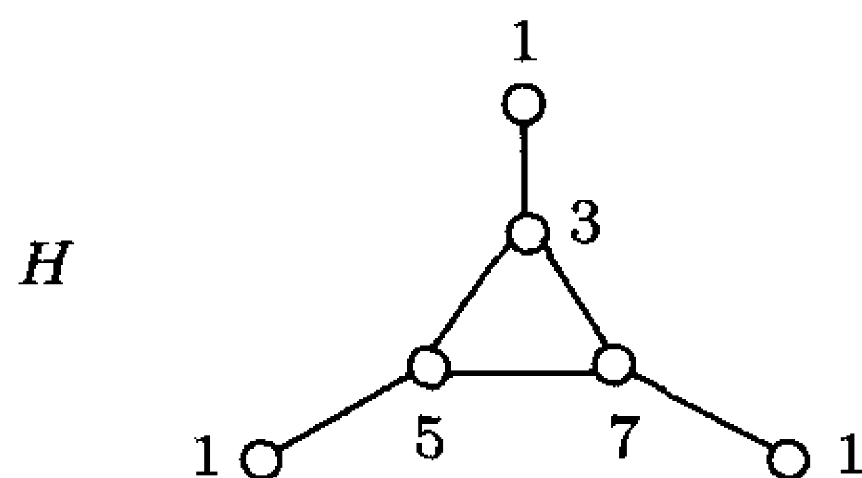



图 12.29 图的广播 2 染色

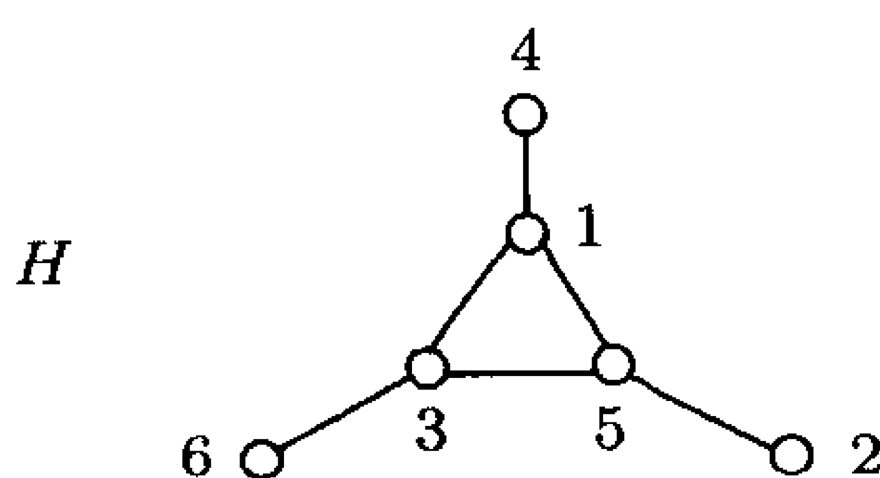



图 12.30 图的最小广播 2 染色

**解** 图 12.30 所给出的广播 2 染色具有值 6, 因此 $\mathrm{rc}_2(H) \leqslant 6$. 假设存在 $H$ 的广播 2 染色, 它仅用颜色 1, 2, 3, 4, 5. 因为 $H$ 中 3 度的顶点形成一个三角形, 所以它们必须染色为 1, 3, 5. 设 $y$ 是染色为 3 的顶点, $v$ 是 $H$ 中与 $y$ 邻接的端点 (见图 12.31). 由于 $|c(v)-c(y)| \geqslant 2$ 且 $1 \leqslant c(v) \leqslant 5$, 所以或者 $c(v)=1$, 或者 $c(v)=5$. 因为 $d(v,x)=d(v,w)=2$, 所以上述两种情形都将导致矛盾; 从而推出 $c(v) \neq 1$ 且 $c(v) \neq 5$. ◇

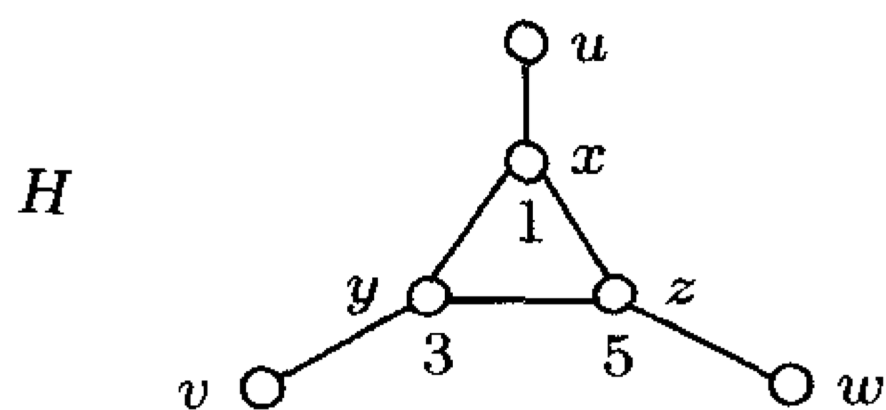



图 12.31 例 12.18 中证明 $\mathrm{rc}_2(H)=6$ 的一步

对于某些值 $k$, 对应的广播 $k$ 染色非常具有研究价值. 当 $k=1$ 时, 连通图 $G$ 的广播 1 染色要求: 对 $G$ 中任意两个不同顶点 $u$ 和 $v$, 均有

$$d(u,v)+|c(u)-c(v)| \geqslant 2.$$

这就是说, 邻接的顶点必须着不同的颜色, 而对距离大于或等于 2 的顶点染色没有限制. 显然, 这就是顶点染色的标准定义. 因此, 广播 $k$ 染色是标准顶点染色的推广.

广播 2 染色也已经获得很好研究, 它也称为是**距离 2 标号 (labelings at distance 2)** 或者**L(2, 1) 标号 (L(2, 1)-labelings)**. 对于直径为 $d$ 的连通图 $G$ 而言, $G$ 的一个广播 $d$ 染色也称为是**广播标号 ( radio labeling)**. 具体地说, 连通图 $G$ 的一个广播标号是一个函数 $c: V(G) \to \mathbf{N}$, 满足: 对 $G$ 的任意两个不同顶点 $u$ 和 $v$, 均有

$$d(u,v)+|c(u)-c(v)| \geqslant 1+\mathrm{diam}(G).$$

由于对 $G$ 的任意两个顶点 $u$ 和 $v$, 均有 $d(u,v) \leqslant \mathrm{diam}(G)$, 所以在广播标号中, 任意两个不同顶点均以不同颜色染色 (或标号).

对于连通图 $G$ 的一个广播标号 $c$, $c$ 的**值 (value)** $\mathrm{rn}(c)$ 定义为分配给 $G$ 顶点的最大标号 (或颜色). $G$ 的**广播数 (radio number)** $\mathrm{rc}_k(G)$ 定义为 $G$ 的所有广播标

号的最小值. 满足 $\mathrm{rn}(c) = \mathrm{rn}(G)$ 的一个广播标号称为是**最小广播标号 (minimum radio labeling)**. 为阐述上面的概念, 我们来看下面的例子.

**例 12.19** 对图 12.32(a) 中的图 $G$, 确定 $\mathrm{rn}(G)$.

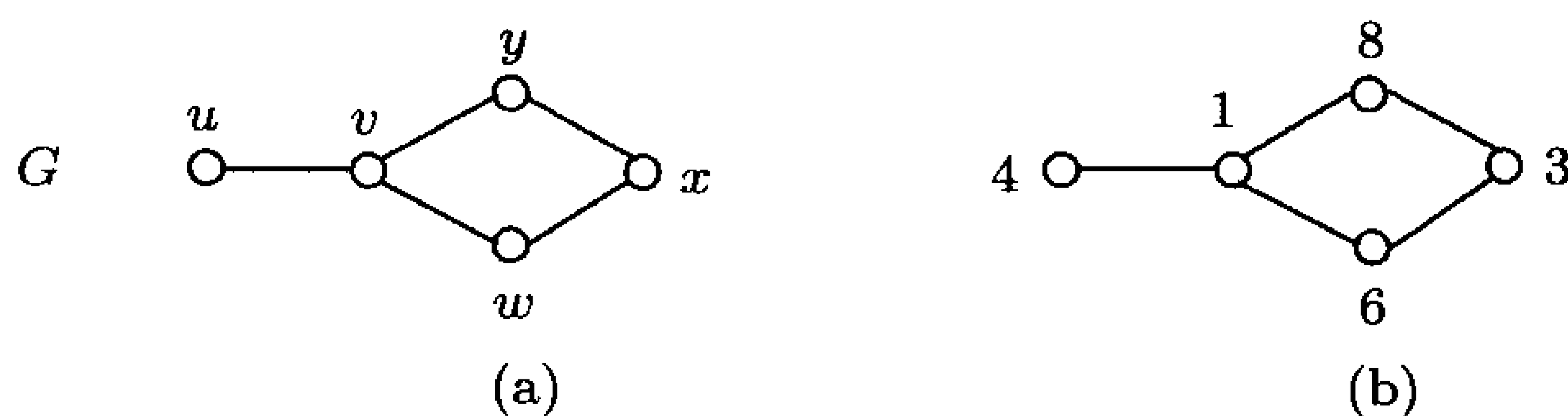



图 12.32 图 $G$ 的一个广播标号

**解** 因为 $\mathrm{diam}(G) = 3$, 所以在 $G$ 的每个广播标号中, 任意两个邻接顶点的标号必须至少相差 3, 任意两个距离为 2 的顶点的标号必须至少相差 2. 两个顶点的标号恰好相差 1 仅当它们的距离为 3. 因此, 图 12.32(b) 所给的标号是 $G$ 的一个广播标号. 从而, $\mathrm{rn}(G) \leqslant 8$. 另一方面, $\mathrm{rn}(G) \neq 7$; 否则, 假设存在 $G$ 的一个广播标号 $c$, 满足 $\mathrm{rn}(c) = \mathrm{rn}(G) = 7$. 因为在整数 2, 3, 4, 5, 6 中, 恰好有两个没有用以标号, 所以在 $\{1, 2, \cdots, 7\}$中, 或者有三个连续整数用以 $G$ 的顶点标号, 或者有两对连续整数用以 $G$ 的顶点标号; 然而, 这两种情形都不可能发生, 因为 $u$ 和 $v$ 是 $G$ 中距离为 3 的仅有的两个顶点. 因此, $\mathrm{rn}(G) = 8$, 从而图 12.32(b) 所给的标号就是一个最小广播标号. ◇

设 $G$ 是一个连通图, 且 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $d = \mathrm{diam}(G)$, $c$ 是 $G$ 的一个广播标号. $c$ 的**补标号 (complementary labeling)** $\overline{c}$ 定义为：对所有的 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$,

$$\overline{c}(v_i) = (\mathrm{rn}(c) + 1) - c(v_i).$$

图 12.33 给出图 12.32(b) 中 $G$ 的广播标号的补标号.

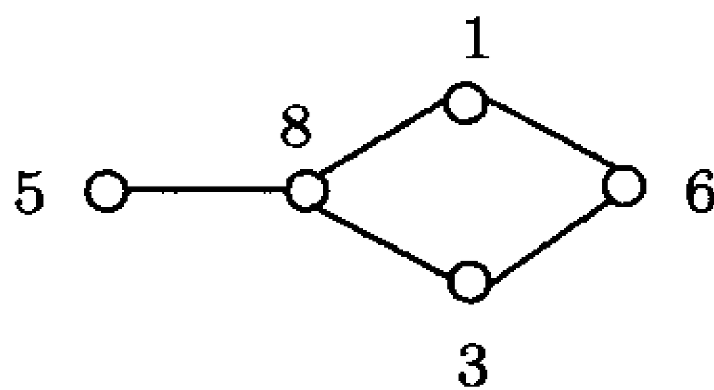



图 12.33 一个补标号

因为对所有的 $i, j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, 均有 $|\overline{c}(v_i) - \overline{c}(v_j)| = |c(v_i) - c(v_j)|$, 所以我们有下面的结论.

**定理 12.20** 设 $G$ 是一个连通图. 如果 $c$ 是 $G$ 的一个广播标号, 则 $\overline{c}$ 也是 $G$ 的一个广播标号.

因此, 如果 $c$ 是连通图 $G$ 的一个最小广播标号, 则 $\overline{c}$ 也是 $G$ 的一个最小广播标号, 从而 $\mathrm{rn}(\overline{c}) = \mathrm{rn}(c)$.

**习题**

12.52 证明：如果存在图 $G$ 的一个值为 $k$ 的广播标号，则存在 $G$ 一个值为 $k+1$ 的广播标号.

12.53 对于 $n \geqslant 3$，确定 $\mathrm{rn}(K_n)$.

12.54 对于 $k=1,2$，确定 $\mathrm{rc}_k(K_{r,s})$，其中 $1 \leqslant r \leqslant s$.

12.55 对于 $3 \leqslant n \leqslant 7$ 以及 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，确定 $\mathrm{rc}_k(P_n)$.

12.56 对于 $3 \leqslant n \leqslant 7$ 以及 $1 \leqslant k \leqslant n/2$，确定 $\mathrm{rc}_k(C_n)$.

## 12.6 专题探索：图与图之间的距离

显然，两个图 $G$ 和 $H$ 或者同构，或者不同构. 对于两个图 $G$ 和 $H$，我们经常提问 (并对答案很满意)：

$G$ 和 $H$ 是同构的吗？

若 $G$ 和 $H$ 有不同阶或不同边数时，答案是显然的. 因此我们在讨论同构时，只对具有相同阶和相同边数的两个图感兴趣. 一旦问题有了答案，不论用哪种方法，我们可能会继续考虑一些其他问题. 如果答案是否定的，即 $G$ 和 $H$ 是不同构的，我们就会提出一些问题. 但是，证明 $G$ 和 $H$ 是不同构的，可能会相当容易 (当二图有明显的区别)，也有可能相当困难 (当二图有着惊人的相似). 这就自然地提出问题：如何比较两个图，当然这两个图至少有相同阶和相同边数，即，两个非同构图到底有多大程度的接近？回答该问题有一些已有的方法，我们介绍其中的一种.

设 $G$ 和 $H$ 是两个阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图，其中 $n$ 和 $m$ 均为正整数，当然 $1 \leqslant m \leqslant \binom{n}{2}$. 我们定义 $G$ 和 $H$ 之间的距离 (称为旋转距离). 如果 $G \cong H$，则定义 $d(G,H)=0$；假设 $G \ncong H$，如果 $G$ 含有互不相同的顶点 $u, v$，和 $w$，使得 $uv \in E(G)$，$uw \notin E(G)$，且 $H \cong G-uv+uw$，则称 $G$ 可以**通过一次边旋转 (by an edge rotation) 变换为 (transform into)** $H$，或称 $G$ 可以**旋转 (rotate)**为 $H$. 例如，图 12.34 中的图 $G$ 可以旋转为 $H$，但 $G$ 不能旋转为 $F$.

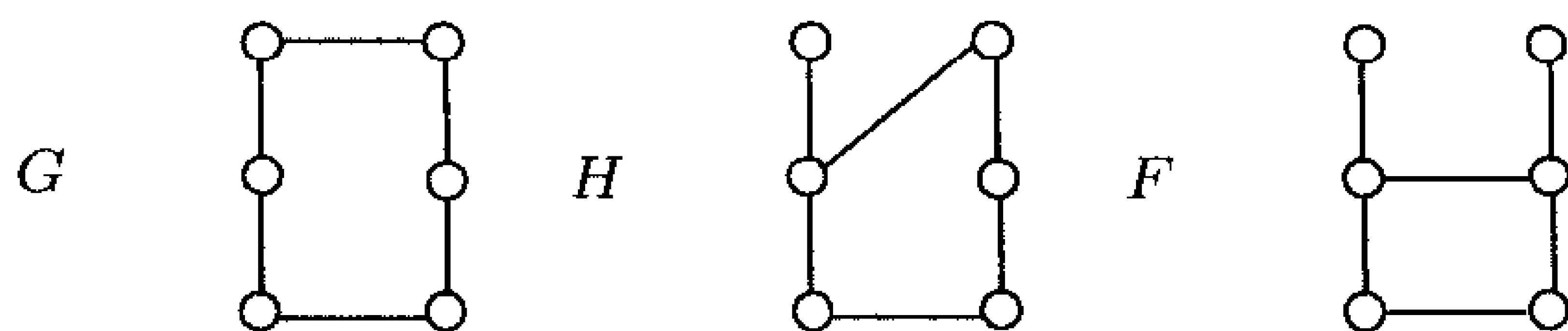



图 12.34 边旋转

对具有相同阶和相同边数的两个图 $G$ 和 $H$，$G$ 和 $H$ 的**旋转距离 (rotation distance)** $d(G,H)$ 定义为满足下面条件的最小非负整数：存在一个图序列 $G_0$，$G_1, \cdots, G_k$，使得 $G_0 \cong G$，$G_k \cong H$，以及对 $i=0,1,\cdots,k-1$，$G_i$ 可以旋转为

$G_{i+1}$. 因此对于图 12.34 中的图 $G, H$ 和 $F$, $d(G,H)=1$, $d(G,F)=2$. 对于图 12.35 中的图 $G'$ 和 $H'$, $d(G',H')=3$.

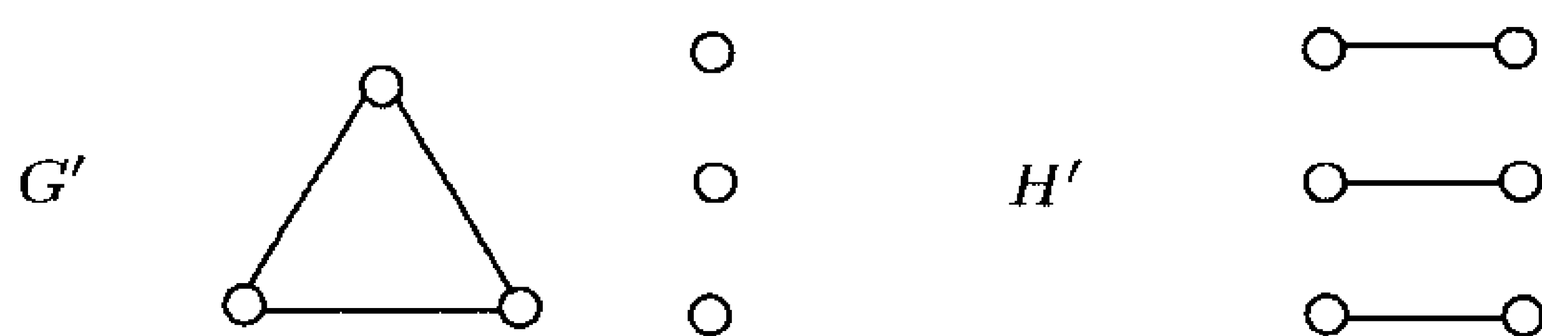



图 12.35 旋转距离为 3 的图 $G'$ 和 $H'$

在具有固定阶数和固定边数的图集合上, 旋转距离是一种度量, 它给出了两个图接近同构的程度 —— 两个图的距离越小, 它们越接近于同构.

在讨论旋转距离时, 我们很自然地提出另一个概念. 对于两个非空图 $G_1$ 和 $G_2$(未必有相同的阶或相同的边数), 图 $G$ 称为是 $G_1$ 和 $G_2$ 的一个**最大公共子图 (greatest common subgraph)**, 如果 $G$ 既同构于 $G_1$ 的一个边诱导子图, 又同构于 $G_2$ 的一个边诱导子图, 且 $G$ 有最大边数. 图 12.36 中的图 $G_1$ 和 $G_2$ 有三个不同的最大公共子图 $G, G'$ 和 $G''$.

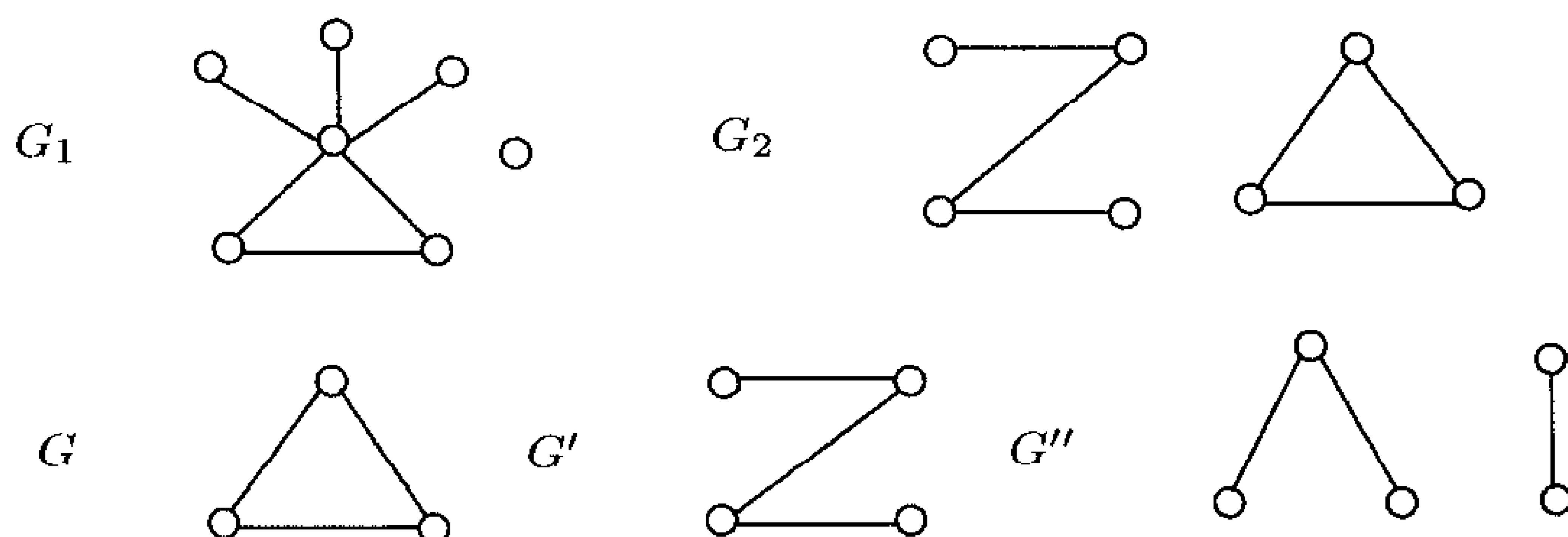



图 12.36 最大公共子图

借助于最大公共子图的边数, 我们可以建立图旋转距离的上界.

**定理 12.21** 设 $G$ 和 $H$ 是两个阶为 $n$ 且边数为 $m$ 的图, 其中 $n$ 和 $m$ 为正整数, 设 $F$ 是 $G$ 和 $H$ 的最大公共子图, 且 $F$ 具有边数 $s$. 则

$$d(G,H)\leqslant 2(m-s).$$

**证** [直接证法] 如果 $s=m$, 则 $G\cong H$, 从而 $d(G,H)=0$. 因此我们可假设 $1\leqslant s<m$. 设 $G^*$ 和 $H^*$ 分别为 $G$ 和 $H$ 的边诱导子图, 且 $G^*\cong H^*\cong F$. 进一步, 假设 $V(G)=V(H)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 并且子图 $G^*$ 和 $H^*$ 有完全相同的标号. 因为 $G\not\cong H$, 所以 $G$ 含有一条不属于 $H$ 的边 $v_iv_j$, $H$ 也含有一条不属于 $G$ 的边 $v_pv_q$. 假设 $\{v_i,v_j\}\cap\{v_p,v_q\}\neq\emptyset$, 不妨设 $v_j=v_p$. 则 $G$ 可以旋转为 $G_1=G-v_iv_j+v_jv_q$, 从而 $d(G,G_1)=1$. 接下来, 假设 $\{v_i,v_j\}\cap\{v_p,v_q\}=\emptyset$.

假设, 在图 $G$ 中, $v_i$ 和 $v_j$ 中至少有一个与 $v_p$ 和 $v_q$ 中的至少一个不邻接, 不妨设 $v_iv_p\notin E(G)$. 则 $G$ 可以旋转为 $G'=G-v_iv_j+v_iv_p$, 并且 $G'$ 可以旋转为

$G'' = G' - v_iv_p + v_pv_q$, 因此 $d(G, G'') \leqslant 2$.

另一方面, 如果 $v_i$ 和 $v_j$ 中的每个顶点都与 $v_p$ 和 $v_q$ 邻接, 则 $G$ 可以旋转为 $G_1 = G - v_iv_p + v_pv_q$, 并且 $G_1$ 可以旋转为 $G_2 = G_1 - v_iv_j + v_iv_p$, 因此 $d(G, G_2) \leqslant 2$.

因此, 在任一情形下 $G$ 都可以由至多两次旋转而变换为 $H' = G - v_iv_j + v_pv_q$, 因此 $d(G, H') \leqslant 2$. $H'$ 和 $H$ 有 $s+1$ 条公共边, 所以继续上面操作, 我们可以得到 $d(G, H) \leqslant 2(m - s)$. ■

对一个具有相同阶和相同边数的图集合, 可以建立一个图模型以描述该集合内图之间的旋转联系. 设 $S = \{G_1, G_2, \cdots, G_k\}$ 就是这样的集合. 则 $S$ 的**旋转距离图** **(rotation distance graph)** $D(S)$ 是以 $S$ 为它的顶点集, 并且顶点 (图) $G_i$ 和 $G_j$ 是邻接的, 如果 $d(G_i, G_j) = 1$. 图 12.37 给出了集合 $S = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ 的旋转距离图 $D(S)$.

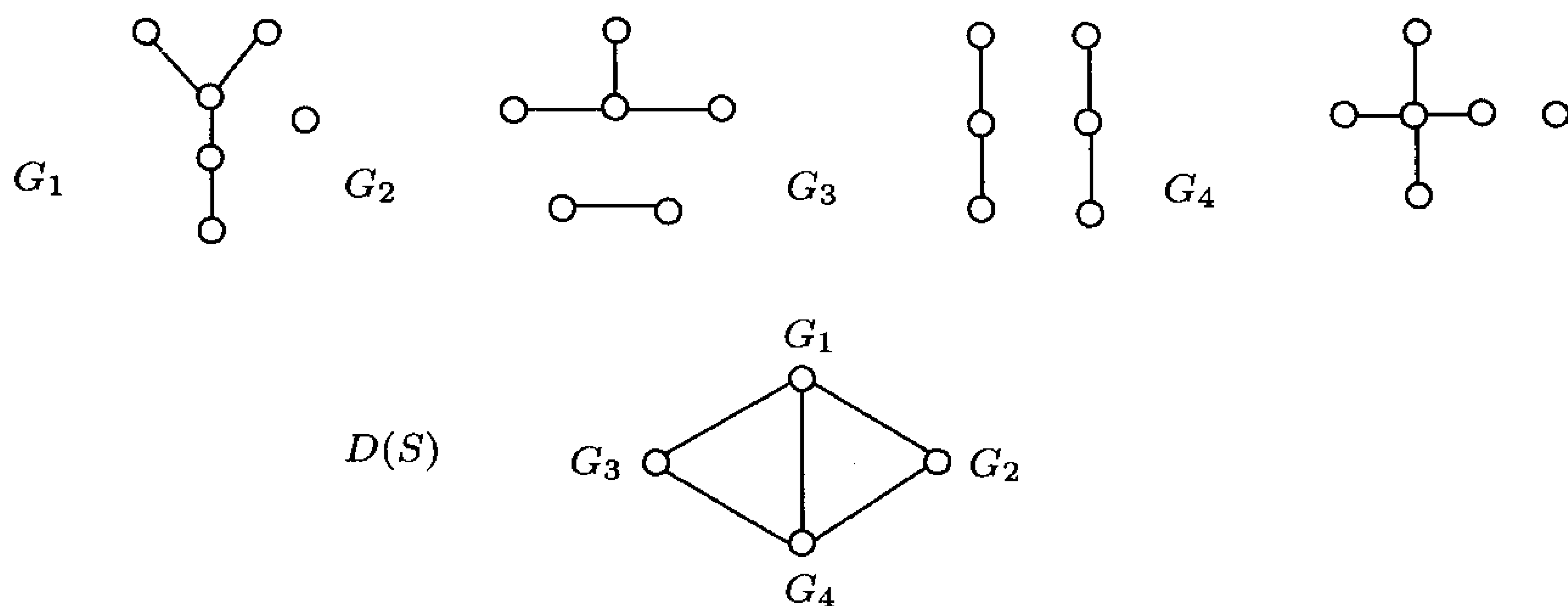



图 12.37 旋转距离图

一个图 $G$ 称为是**旋转距离图 (rotation distance graph)**, 如果存在某个图集合 $S$, 使得 $G \cong D(S)$. 所以, 图 12.37 中的图 $G \cong K_4 - e$ 就是一个旋转距离图.

## 习题

12.57 对于每个正整数 $k$, 证明并解释: 存在两个图 $G$ 和 $H$, 使得 $d(G, H) = k$.

12.58 列举两个图 $G$ 和 $H$, 使得它们有唯一的最大公共子图.

12.59 对于每个正整数 $k$, 列举两个图 $G$ 和 $H$, 使得它们恰有 $k$ 个最大公共子图.

12.60 证明: 定理 12.21 中的界是紧的.

12.61 证明: $K_3$ 是一个旋转距离图.

12.62 证明: $C_4$ 是一个旋转距离图.

12.63 对具有固定阶和固定边数的两个图, 定义另一种距离 $d'$, 并且列举两个图 $G$ 和 $H$, 使得 $d'(G, H)$ 不等于这两个图的旋转距离.

# 第 13 章　控　　制

## 13.1　图的控制数

回顾一下, 对于图 $G$ 的一个顶点 $v$, $v$ 的**邻点** (**neighbor**)是指 $G$ 中与 $v$ 邻接的一个顶点; $v$ 的**邻域** (**neighborhood**) (或**开邻域** (**open neighborhood**)) $N(v)$ 是指 $v$ 的邻点集合. $v$ 的**闭邻域** (**closed neighborhood**) $N[v]$ 定义为 $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. 在图 $G$ 中, 一个顶点 $v$ **控制** (**dominate**)它自身和它的每个邻点, 即 $v$ 控制闭邻域 $N[v]$ 的每个顶点. 因此,$v$ 控制 $G$ 的 $1 + \deg v$ 个顶点.

图 $G$ 的一个顶点集合 $S$ 称为是 $G$ 的**控制集** (**dominating set**), 如果 $G$ 的每个顶点都被 $S$ 中的某个顶点控制. 等价地, $G$ 的一个顶点集合 $S$ 是 $G$ 的控制集, 如果 $V(G) - S$ 的每个顶点都与 $S$ 的某个顶点相邻. 考虑图 13.1 中的图 $G$, 集合 $S_1 = \{u, v, w\}$ 和 $S_2 = \{u_1, u_4, v_1, v_4\}$ 都是 $G$ 的控制集, 其中 $S_1$ 和 $S_2$ 的顶点分别以实心点标出.

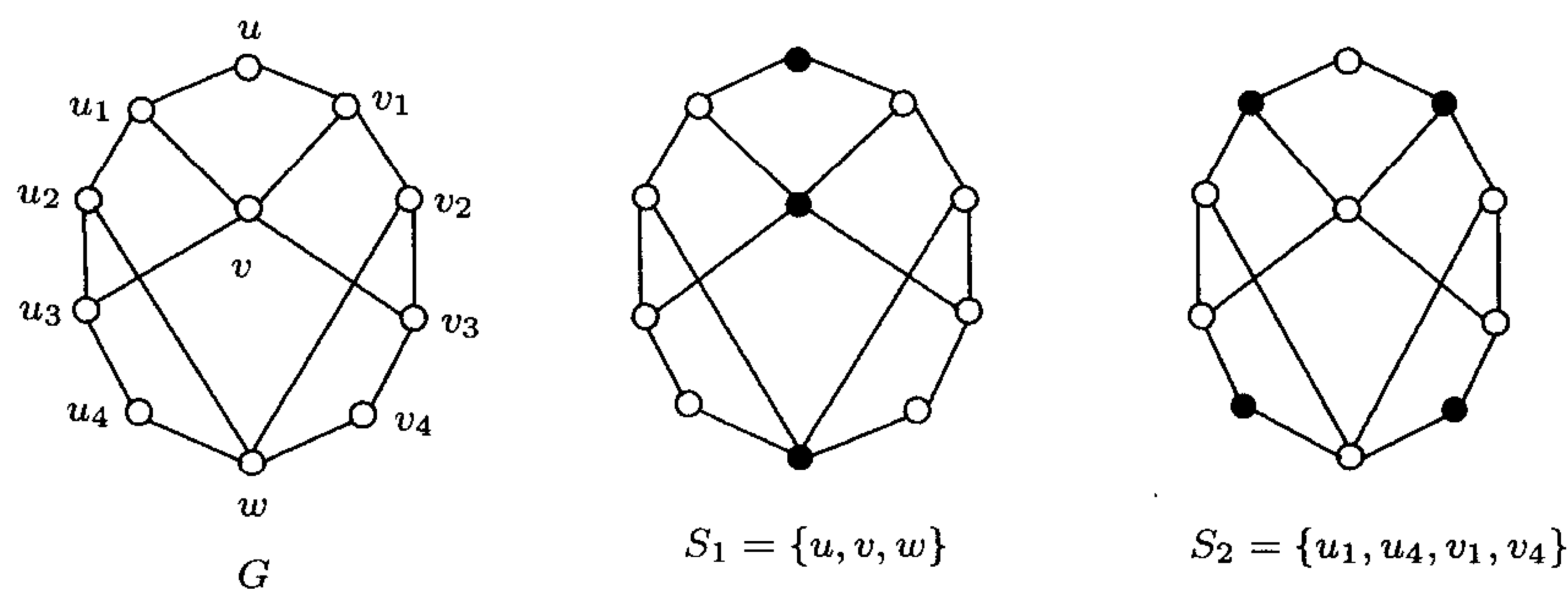



图 13.1　图 $G$ 的两个控制集

图 $G$ 的**最小控制集** (**minimum dominating set**)定义为具有最小基数的控制集. 最小控制集的基数称为是 $G$ 的**控制数** (**domination number**), 记为 $\gamma(G)$. 注意, 图的控制数记号和图的亏格记号是相同的, 它是图的控制数和亏格的常用符号. 当然, 只要不在同一场合讨论图的控制数和亏格, 这就不会引起混淆.

图的控制问题是由 Claude Berge 于 1958 年和 Oystein Ore 于 1962 年提出并进行研究的, Ore 真正使用了控制该术词. 然而, 直到 1977 年维多利亚大学的 Ernie Cockayne 和克莱姆森大学的 Stephen Hedetniemi 合作的一篇文章发表, 控制才真正

成为许多专家感兴趣的一个研究专题. 1998 年, 东田纳西州立大学的 Teresa Haynes 和阿拉巴马大学的 Peter Slater 关于此专题合作写了一篇综述. 有关控制的文章已经超过了 2000 篇.

因为图的顶点集总是一个控制集, 所以控制数对每个图都有定义. 如果 $G$ 是 $n$ 阶图, 则 $1 \leqslant \gamma(G) \leqslant n$. $n$ 阶的图 $G$ 具有控制数 1 当且仅当 $G$ 含有一个度为 $n-1$ 的顶点 $v$; 此时 $\{v\}$ 就是一个最小控制集; $\gamma(G)=n$ 当且仅当 $G \cong \overline{K}_n$; 此时 $V(G)$ 是唯一的最小控制集.

我们回到图 13.1 中的图 $G$. 易知, 集合 $S_1=\{u,v,w\}$ 是 $G$ 的一个控制集, 因此 $\gamma(G) \leqslant 3$. 为证明 $G$ 的控制数恰好为 3, 这就要证明 $G$ 没有仅含两个顶点的控制集. 注意到, $G$ 的阶是 11, 而 $G$ 中每个顶点的度至多为 4, 这就是说, 没有哪个顶点可以控制多于 5 个的顶点. 因此, 任意两个顶点至多控制 10 个顶点, 即 $\gamma(G)>2$, 从而 $\gamma(G)=3$.

我们再看有关控制的一个实例. 图 13.2 所示的是某个城市的部分示意图, 它是由三条水平街道和四条垂直街道所划分的 6 个街区构成. 现在要在街道的路口设置治安岗亭. 假设每个治安岗亭不仅能确保其所在路口的安全, 而且还能确保其视线范围之内的一个街区的所有路口的安全. 现在的问题是: 至少需要多少个治安岗亭, 才能确保所有的 12 个街道的路口的安全? 图 13.2 给出了设有治安岗亭 (标为 SG) 的四个路口, 使得所有的 12 个路口都在视线之内.

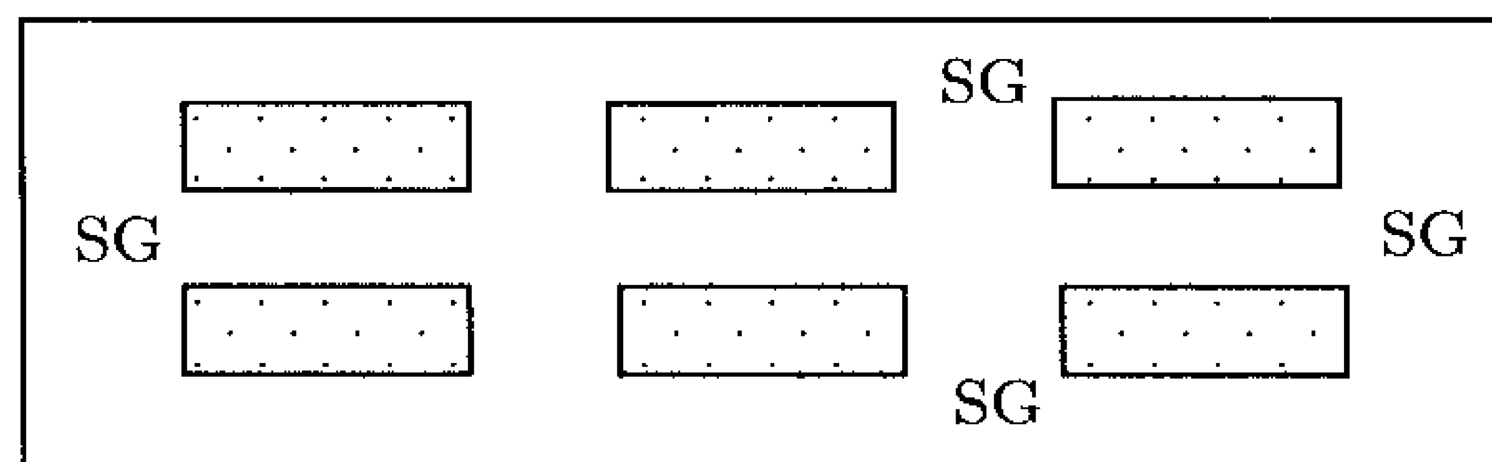



图 13.2 某城市的地图

上面情形可以用图 13.3 中的图 $G$ 建模. 显然, $G$ 恰好是笛卡儿积 $P_3 \times P_4$, 为二部图. 街道的路口就是 $G$ 的顶点, 两个顶点是相邻的如果这两个顶点对应的路口位于某街区同一街道的两侧. 对图 13.2 中的城市寻求所需设置的最少治安岗亭数的问题等同于寻求图 13.3 中图 $G$ 的控制数的问题. 图 13.3 中的实心顶点对应于图 13.2 中的治安岗亭.

**例 13.1** 对图 13.3 中的图 $G$, $\gamma(G)=4$.

**解** 因为图 13.3 中的四个实心顶点形成 $G$ 的一个控制集, 所以 $\gamma(G) \leqslant 4$. 为了验证 $\gamma(G) \geqslant 4$, 这就要证明 $G$ 没有含 3 个顶点的控制集.

图 $G$ 含有 12 个顶点, 其中有两个度为 4 的顶点, 六个度为 3 的顶点, 而其余 4 个顶点的度均为 2. 因此, 在 $G$ 中, 有 2 个顶点分别控制 5 个顶点, 有 6 个顶点分别

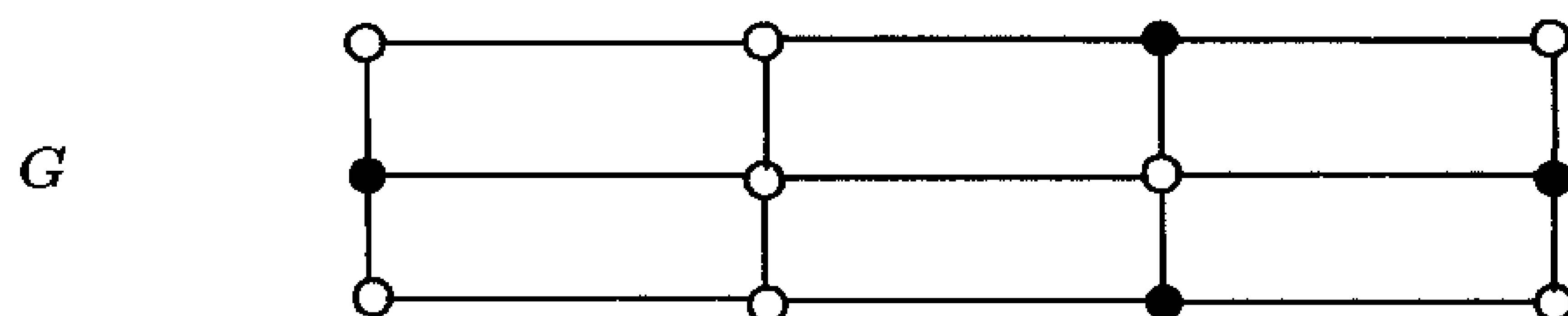



图 13.3 某城市地图的图模型

控制 4 个顶点. 故有理由相信, 存在一个含 3 个顶点的集合, 它能控制 $G$ 的全部 12 个顶点. 另一方面, 注意到 $G$ 是二部的, 因此它的顶点可以用两种颜色染色, 不妨设为红色 (R) 和蓝色 (B). 不失一般性, 我们假设 $G$ 的顶点染色为图 13.4 的情形. 注意到每个顶点与它的邻点有不同的颜色.

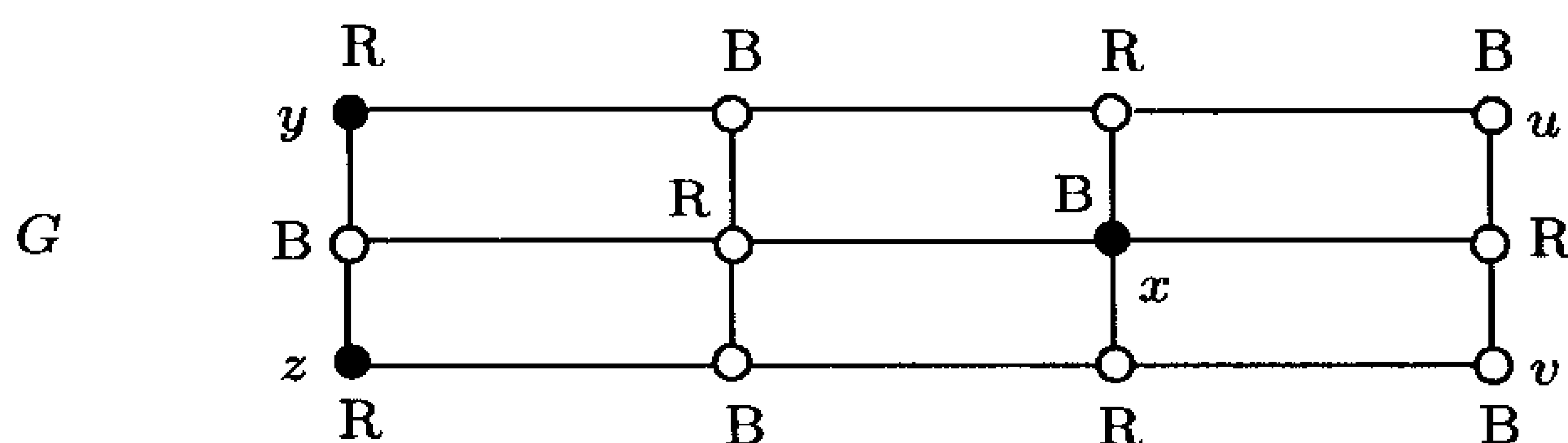



图 13.4 图 $P_3 \times P_4$

假设 $G$ 中存在含有 3 个顶点的控制集 $S$, 则 $S$ 中至少存在 2 个顶点的颜色是一样的. 如果 $S$ 的所有 3 个顶点染相同的颜色 (比方说红色), 则 6 个红色顶点中仅有 3 个被 $S$ 控制. 因此 $S$ 中恰有 2 个顶点染相同的颜色 (比方说红色), 且第三个顶点染蓝色. 如果 $S$ 中蓝色顶点的度至多为 3, 则它至多控制 3 个红色顶点, 因此 $S$ 至多控制 $G$ 的 5 个红色顶点, 这是不可能的. 因此 $S$ 中必定包含 $x$ (见图 13.4) 作为其仅有的蓝色顶点. 由于 $y$ 和 $z$ 是仅有的不被 $x$ 控制的 2 个红色顶点, 所以 $S = \{x, y, z\}$. 而此时顶点 $u$ 和 $v$ 不能被 $S$ 控制, 因此这也不可能. 所以 $\gamma(G) = 4$. ◇

证明 $\gamma(P_3 \times P_4) = 4$ 的过程也阐明了确定图的控制数的一般程序. 对于某个图 $G$, 为了证明 $\gamma(G) = k$, 我们首先要寻找 $G$ 的一个含 $k$ 个顶点的控制集 (这说明 $\gamma(G) \leqslant k$); 另外我们必须验证 $G$ 的任一控制集至少含有 $k$ 个顶点 (这说明 $\gamma(G) \geqslant k$).

前面已经提到, $n$ 阶图 $G$ 具有控制数 1 当且仅当 $G$ 含有一个度为 $n-1$ 的顶点 $v$. 因此, 完全图和星图都有控制数 1. 下面给出了大家比较熟悉的一类图的控制数.

**例 13.2** 对于 $n \geqslant 3$, 有 $\gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$.

**解** 首先, 我们可设 $n = 3q + r$, 其中 $0 \leqslant r \leqslant 2$. 因为 $C_n$ 是 2 正则的, 因此 $C_n$ 的每个顶点恰好控制三个顶点, 所以 $C_n$ 的任意 $q$ 个顶点至多控制 $C_n$ 的 $3q$ 个顶点. 所以, 如果 $r = 0$, 则 $\gamma(C_n) \geqslant q$; 如果 $r = 1$ 或 $r = 2$, 则 $\gamma(C_n) \geqslant q + 1$.

首先假设 $r=0$. 对于 $C_n$ 的任一顶点 $v$, 选取 $v$ 以及从 $v$ 开始沿 $C_n$(按同一方向循环) 的每隔两个顶点的顶点; 这些点构成了一个集合 $S$. 则 $C_n$ 的每个顶点均恰好被 $S$ 中的一个顶点控制. 因为 $S$ 恰好含 $q$ 个顶点, 所以 $\gamma(C_n)\leqslant q$. 接下来假设 $r=1$ 或 $r=2$. 类似地, 对于 $C_n$ 的任一顶点 $v$, 选取 $v$ 以及从 $v$ 开始沿 $C_n$(按同一方向循环) 的每隔两个顶点的顶点, 直到已选取 $q+1$ 个顶点 (见图 13.5); 这些点构成了一个集合 $S$, 则 $C_n$ 中任一顶点均被 $S$ 的至少一个顶点控制. 因此 $S$ 是 $C_n$ 的一个控制集, 所以 $\gamma(C_n)\leqslant q+1$. 故, 在这两种情形下, 均有 $\gamma(C_n)=\lceil n/3\rceil$. ♢

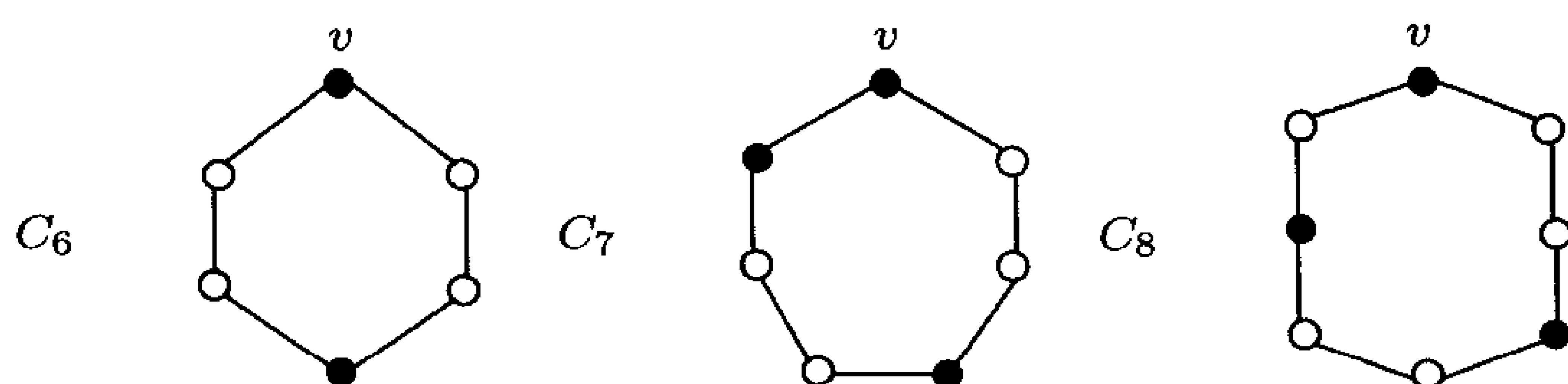



图 13.5 当 $6\leqslant n\leqslant 8$ 时, $C_n$ 的最小控制集

借助于图的阶和最大度, 我们可以建立图的控制数的上下界.

**定理 13.3** 如果 $G$ 是一个阶为 $n$ 的图, 则

$$\frac{n}{1+\Delta(G)}\leqslant\gamma(G)\leqslant n-\Delta(G).$$

**证** [直接证法] 我们已经提到过, $n$ 阶图 $G$ 的每个顶点 $v$ 可以控制 $1+\deg v$ 个顶点. 如果所选择的 $v$ 满足 $\deg v=\Delta(G)$, 则 $v$ 可以控制 $G$ 的 $1+\Delta(G)$ 个顶点, 即 $v$ 不能控制的顶点数为 $n-(1+\Delta(G))$. 因为不能被 $v$ 控制的 $n-(1+\Delta(G))$ 个顶点中的任一个都可被它自身控制, 所以 $G$ 有一个含 $n-(1+\Delta(G))+1=n-\Delta(G)$ 个顶点的控制集. 因此

$$\gamma(G)\leqslant n-\Delta(G).$$

接下来, 假设 $\gamma(G)=k$. 设 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ 是 $G$ 的一个最小控制集. 因为 $v_i$ 控制 $G$ 的 $1+\deg v_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 个顶点, 并且 $S$ 控制 $G$ 的所有 $n$ 个顶点, 所以

$$\sum_{i=1}^{k}(1+\deg v_i)\geqslant n.$$

另一方面, 对于 $1\leqslant i\leqslant k$, $1+\deg v_i\leqslant 1+\Delta(G)$. 所以

$$n\leqslant\sum_{i=1}^{k}(1+\deg v_i)\leqslant k(1+\Delta(G)).$$

因此, $k(1+\Delta(G)) \geqslant n$. 由 $\gamma(G)=k$, 可推出

$$\gamma(G) \geqslant \frac{n}{1+\Delta(G)},$$

证毕. ■

定理 13.3 中 $\gamma(G)$ 的两个界都是紧的. 对于正整数 $r$ 和 $n$ $(r \leqslant n-2)$, 设 $G$ 是由 $n-r$ 个连通分支构成, 其中有一个是星图 $K_{1,r}$, 而其余每个都是单个孤立顶点, 即 $G=K_{1,r} \cup (n-r-1)K_1$. 则 $K_{1,r}$ 的中心顶点控制 $K_{1,r}$ 的所有顶点, 而每个孤立顶点只能由其自身控制. 因此 $\gamma(G)=n-r=n-\Delta(G)$.

我们用正则图来说明下界是紧的. 图 $G \cong \overline{K}_n$ 是由 $n$ 个孤立顶点组成的, 所以 $G$ 是 0 正则的, 因此 $\Delta(G)=0$. 从而

$$\gamma(G)=n=\frac{n}{1+\Delta(G)}.$$

对于偶数 $n$, 设 $n=2k$, 其中 $k \geqslant 1$. 设 $G \cong kK_2$, 即 $G$ 由 $k$ 个连通分支构成, 每个都同构于 $K_2$. 因此 $G$ 是 1 正则的, 所以 $\Delta(G)=1$. 每个连通分支的两个顶点可以被两个中的任一个控制, 故

$$\gamma(G)=k=\frac{n}{2}=\frac{n}{1+\Delta(G)}.$$

我们已经知道, $\gamma(C_n)=\lceil n/3 \rceil$, 所以, 如果 $n=3k$ $(k \geqslant 1$ 为某个整数), 则 $\gamma(C_n)=k$. 由于 $C_n$ 是 2 正则的, $\Delta(G)=2$, 所以

$$\gamma(C_n)=k=\frac{n}{3}=\frac{n}{1+\Delta(G)}.$$

我们现在转而考察图 13.6 中的 20 阶图 $G$. 因为 $\{u_0, u_4, v_0, v_4, w_0, w_4\}$是 $G$ 的一个控制集, 故 $\gamma(G) \leqslant 6$. 接下来, 设 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_5\}$, 并考虑 $G$ 的子图 $F=\langle U \rangle$. 由于 $G$ 的每个顶点控制四个顶点, 并且 $|U|=5$, 所以, 在 $U \cup \{u_0\}$ 中, 至少需要两个顶点才能控制 $U$ 的顶点. 应用同样的方法, 讨论 $G$ 中同构于 $F$ 的其他两个子图, 我们得到 $\gamma(G) \geqslant 3 \cdot 2=6$. 因此, 对图 13.6 的图 $G$,

$$\gamma(G)=6>5=\frac{20}{1+3}=\frac{n}{1+\Delta(G)}.$$

设 $S$ 是 $G$ 的一个控制集. 显然, $G$ 的每个顶点至少被 $S$ 的一个顶点控制. 可能会发生这样的情形：被 $S$ 中某个顶点 $v$ 所控制的每个顶点也同时被 $S$ 的其他某个顶点所控制. 此时, $v$ 可以不必作为 $G$ 的控制顶点, 即 $S-\{v\}$ 仍然是 $G$ 的一个控制集. 换言之, $v$ 可以从 $S$ 中删除, 而剩下的集合仍然是 $G$ 的一个控制集. 用这种

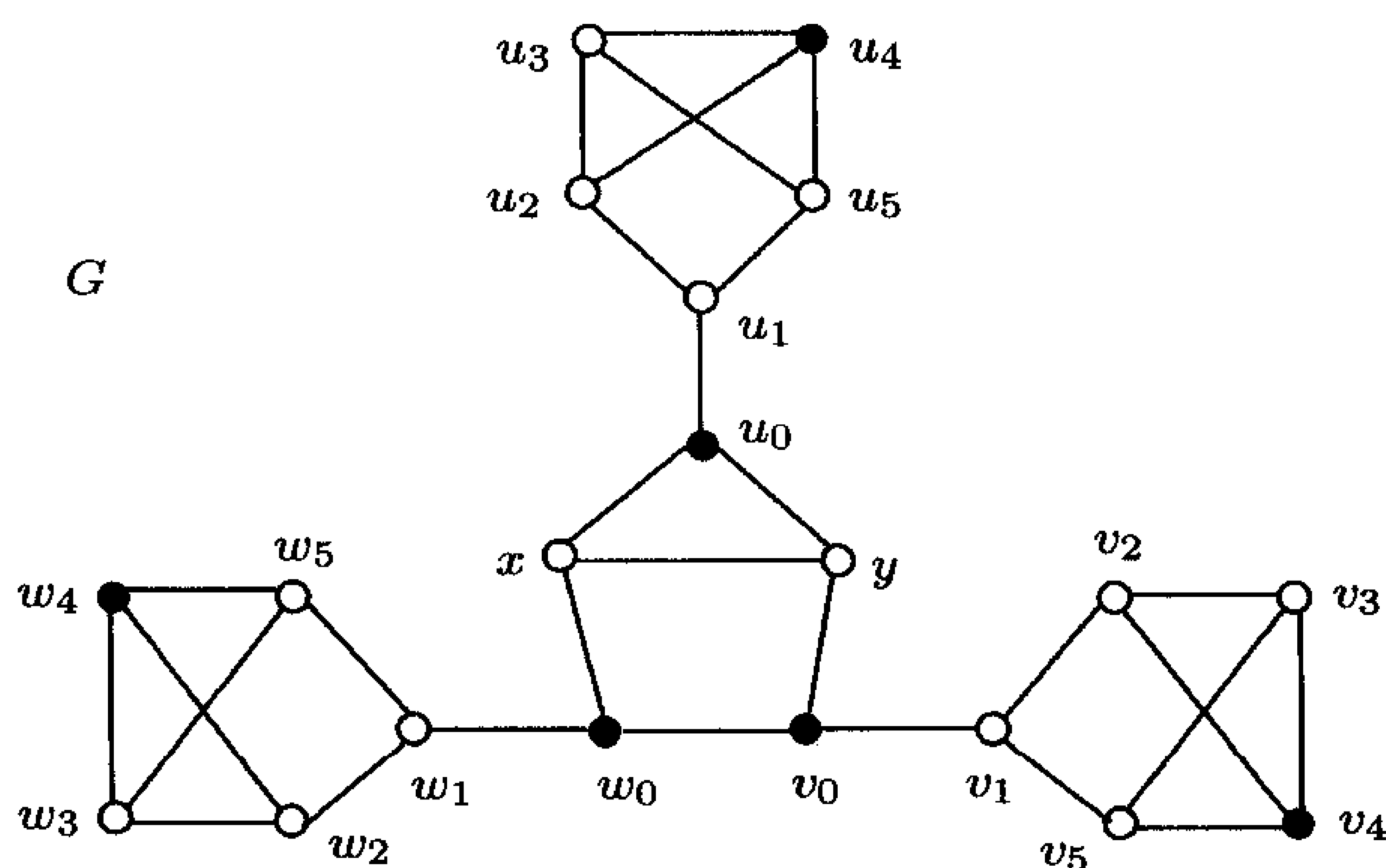



图 13.6 一个 20 阶的 3 正则图

方法, 我们从 $S$ 中不断地删除顶点, 直到我们获得 $S$ 的子集 $S'$, 使得 $S'$ 是 $G$ 的控制集, 但 $S'$ 的任一真子集都不是 $G$ 的控制集. 当然, 这并不说明 $S'$ 是 $G$ 的最小控制集.

若 $S$ 是 $G$ 的一个控制集, 而 $S$ 的任一真子集都不是 $G$ 的控制集, 则 $S$ 称为是**极小控制集 (minimal dominating set)**. 每个最小控制集必然是一个极小控制集, 但一般而言, 其逆不成立. 例如, 考虑图 13.7 中的图 $C_8$, 集合 $S = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ 是一个控制集, 如果我们从 $S$ 中任意删除一个顶点, 则剩下的集合都不是控制集, 因此 $S$ 是一个极小控制集. 由于 $\gamma(C_8) = \lceil 8/3 \rceil = 3$, 所以 $S$ 不是 $C_8$ 的最小控制集. 又如, 图 13.1 中 $G$ 的控制集 $S_2$ 是一个极小控制集, 但不是最小控制集.

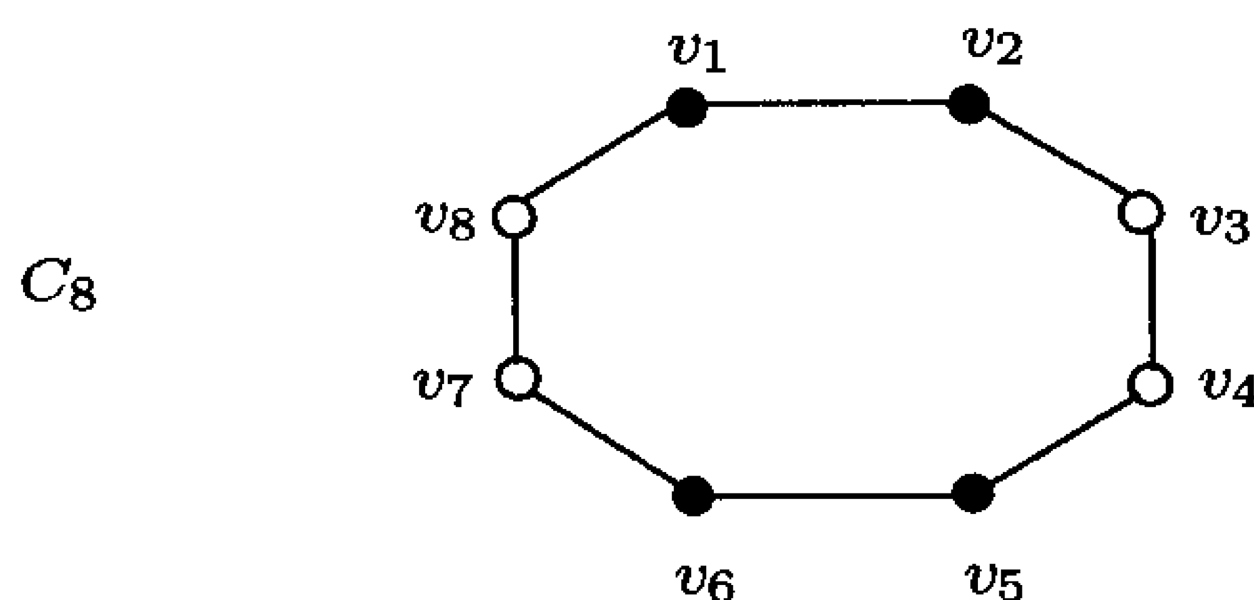



图 13.7 $C_8$ 的极小控制集

由于图 $G$ 的每个孤立顶点只能被其自身控制, 所以 $G$ 的每个控制集必须包含其所有孤立顶点. 然而, 对不含孤立顶点的图, 总存在两个不相交的控制集.

**定理 13.4** 设 $G$ 为不含孤立顶点的图. 如果 $S$ 是 $G$ 的极小控制集, 则 $V(G)-S$ 是 $G$ 的一个控制集.

**证** [反证法] 我们证明 $V(G) - S$ 是 $G$ 的一个控制集. 设 $v \in V(G)$, 如果 $v \in V(G) - S$, 则 $v$ 被其自身控制. 因此我们可假设 $v \notin V(G) - S$, 从而 $v \in S$. 我

们现在证明 $v$ 可被 $V(G)-S$ 的某个顶点控制. 假设 $v$ 不被 $V(G)-S$ 中的任一顶点所控制, 则 $v$ 与 $V(G)-S$ 中任一顶点都不相邻. 因为 $S$ 是 $G$ 的一个控制集, 所以 $V(G)-S$ 的每个顶点都被 $S$ 中除 $v$ 以外的某个顶点控制. 因此, $V(G)-S$ 的每个顶点都可被 $S-\{v\}$ 的某个顶点控制. 另一方面, $G$ 没有孤立顶点, 所以 $v$ 不是 $G$ 的孤立顶点. 由于 $v$ 与 $V(G)-S$ 的任一顶点都不相邻, 所以 $v$ 必须与 $S-\{v\}$ 的某个顶点相邻, 从而 $v$ 可被 $S-\{v\}$ 的某个顶点控制, 故 $S-\{v\}$ 是 $G$ 的一个控制集, 这与 $S$ 为 $G$ 的极小控制集矛盾. ■

对于不含孤立顶点的图, 借助于图的阶, 我们给出图的控制数的一个上界.

**推论 13.5** 如果 $G$ 为不含孤立顶点的 $n$ 阶图, 则

$$\gamma(G) \leqslant \frac{n}{2}.$$

**证** [直接证法] 设 $S$ 是 $G$ 的一个最小控制集. 根据定理 13.4, $V(G)-S$ 也是 $G$ 一个控制集. 由于 $|S|+|V(G)-S|=n$ 及 $|S| \leqslant |V(G)-S|$, 因此, $\gamma(G)=|S| \leqslant n/2$. ■

我们已经看到: 在一个图中如果 $u=v$ 或者 $v$ 是 $u$ 的邻点, 则顶点 $u$ 控制 $v$. 当然, 还有若干其他类型的控制. 我们介绍其中最为有名的一个. 在该类控制中, 我们附加了一个限制, 即, 顶点 $u$ 控制顶点 $v$ 仅当 $v$ 是 $u$ 的一个邻点. (在此情形下, 顶点不能控制其自身.) 为了与通常的控制区别开来, 我们称这种控制为**开控制 (open domination)**, 尽管有时也称之为**总控制 (total domination)**. 如果 $w \in N(v)$, 则称 $v$ **开控制 (openly dominates)** $w$, 即顶点 $v$ 开控制其开邻域 $N(v)$ 内的所有顶点. 图 $G$ 的一个顶点集合 $S$ 是 $G$ 的**开控制集 (open dominating set)**, 如果 $G$ 的每个顶点都至少与 $S$ 的一个顶点相邻. 因此, 图 $G$ 含有一个开控制集当且仅当 $G$ 不含孤立顶点. 更进一步, 如果 $S$ 是 $G$ 的一个开控制集, 则由 $S$ 诱导的子图 $\langle S\rangle$ 不含孤立顶点. 图 $G$ 的开控制集的最小基数称为是 $G$ 的**开控制数 (open domination number)**, 记为 $\gamma_o(G)$. 基数为 $\gamma_o(G)$ 的开控制集称为是 $G$ 的**最小开控制集 (minimum open dominating set)**. 例如, 对图 13.1 中的图 $G$(在图 13.8 中得以重画), 集合 $S=\{u_1, v, w, v_4\}$是 $G$ 的最小开控制集, 因此 $\gamma_o(G)=4$.

当 $n \geqslant 3$ 时, 例 13.2 已经告诉我们 $\gamma(C_n)=\lceil n/3\rceil$. 现在我们来确定 $\gamma_o(C_n)$.

**例 13.6** 当 $n \geqslant 3$ 时,

$$\gamma_o(C_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & \text{如果 } n \not\equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{n+2}{2} & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

**解** 设 $C_n: v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}=v_1$. 因为 $C_n$ 是 2 正则的, 所以 $C_n$ 的每个顶

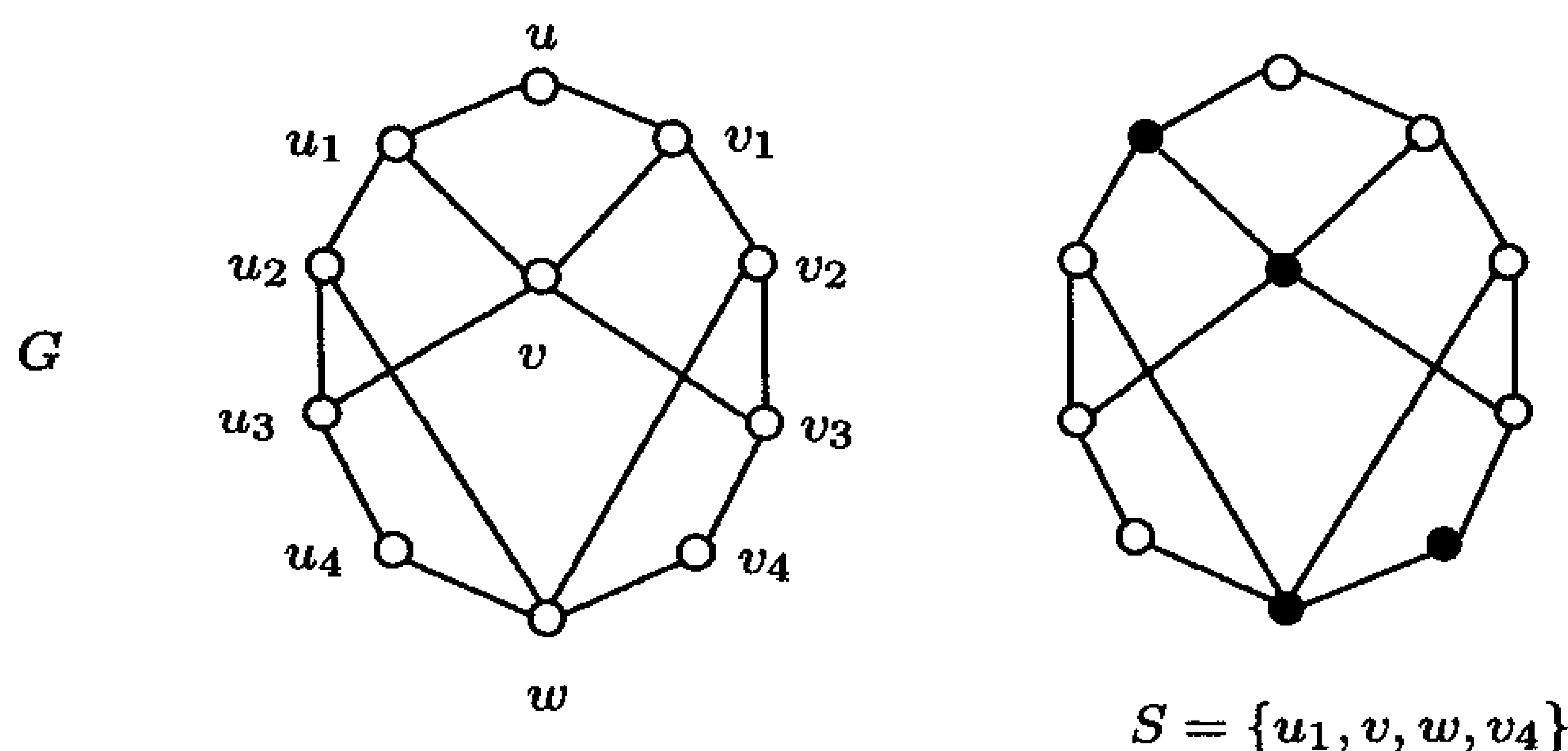



图 13.8 图的最小开控制集

点恰好开控制 $C_n$ 的两个顶点, 即它的两个邻点. 因此, $\gamma_o(C_n) \geqslant \lceil n/2 \rceil$. 我们首先假设 $n \not\equiv 2 \pmod 4$, 并分三种情形讨论.

**情形 1** $n \equiv 0 \pmod 4$. 因此 $n = 4k \geqslant 4$, 则 $\{v_1, v_2, v_5, v_6, \cdots, v_{4k-3}, v_{4k-2}\}$就是一个开控制集, 并含有 $2k = n/2$ 个顶点.

**情形 2** $n \equiv 1 \pmod 4$. 因此 $n = 4k+1 \geqslant 5$. 则 $\{v_1, v_2, v_5, v_6, \cdots, v_{4k-3}, v_{4k-2}, v_{4k+1}\}$ 是一个开控制集, 并含有 $2k+1 = \lceil n/2 \rceil$ 个顶点.

**情形 3** $n \equiv 3 \pmod 4$. 因此 $n = 4k+3 \geqslant 3$. 则 $\{v_1, v_2, v_5, v_6, \cdots, v_{4k+1}, v_{4k+2}\}$ 是一个开控制集, 并含有 $2k+2 = \lceil n/2 \rceil$ 个顶点.

因此, 如果 $n \not\equiv 2 \pmod 4$, 则 $\gamma_o(C_n) = \lceil n/2 \rceil$. 剩下来我们要证明, 当 $n \equiv 2 \pmod 4$, $\gamma_o(C_n) = (n+2)/2$. 此时, 存在某个正整数 $k$, 使得 $n = 4k+2$. 因为 $\{v_1, v_2, v_5, v_6, \cdots, v_{4k+1}, v_{4k+2}\}$ 是一个开控制集, 并含有 $2k+2 = (n+2)/2$ 个顶点, 所以 $\gamma_o(C_n) \leqslant (n+2)/2$. 因此, $\gamma_o(C_n) = n/2$ 或 $\gamma_o(C_n) = (n+2)/2$. 假设 $\gamma_o(C_n) = n/2 = 2k+1$, 并设 $S$ 是 $C_n$ 的一个最小开控制集.

我们先对集合 $S$ 进行一些观察. 首先, 设 $v_i$, $v_{i+1}$, $v_{i+2}$, $v_{i+3}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 $C_n$ 上连续出现的四个顶点, 其中下标取模 $n$ 运算. 顶点 $v_{i+1}$ 仅可以被 $v_i$ 或 $v_{i+2}$ 开控制; 而 $v_{i+2}$ 仅可以被 $v_{i+1}$ 或 $v_{i+3}$ 开控制. 设

$$S_i = S \cap \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}.$$

通过上述观察, $|S_i| \geqslant 2$, 并且存在 $v_r, v_t \in S_i$, 其中 $r$ 是偶数,$t$ 是奇数. 特别地, 存在 $j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, 使得 $v_j, v_{j+1} \notin S$. 这就推出, $v_{j-2}$, $v_{j-1}$, $v_{j+2}$, $v_{j+3} \in S$. 设

$$S' = V(G) - \{v_{j-2}, v_{j-1}, \cdots, v_{j+3}\}.$$

则 $|S'| = (4k+2) - 6 = 4(k-1)$. 因此, $S$ 至少含有 $S'$ 的 $2(k-1)$ 个顶点以及 $\{v_{j-2}, v_{j-1}, \cdots, v_{j+3}\}$的 4 个顶点. 此时我们有 $|S| \geqslant 2(k-1) + 4 = 2k+2$, 导致矛盾. 所以当 $n \equiv 2 \pmod 4$ 时, $\gamma_o(C_n) = (n+2)/2$. ■

对于 $6 \leqslant n \leqslant 9$, 图 13.9 分别给出了 $C_n$ 的最小开控制集.

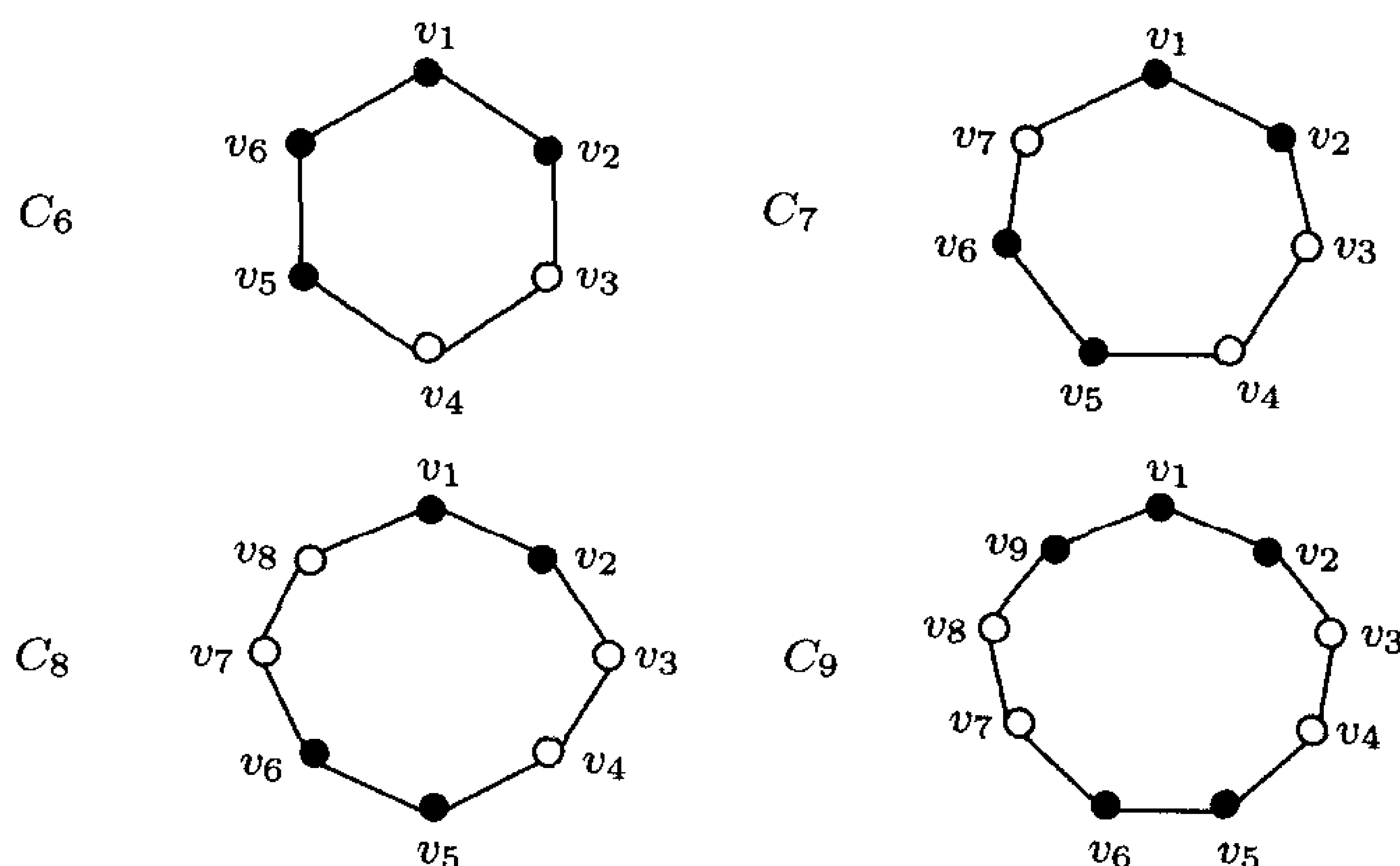



图 13.9 当 $6 \leqslant n \leqslant 9$ 时, $C_n$ 的最小开控制集

因为每个图的最小开控制集至少含有两个元素, 所以对每个不含孤立顶点的 $n$ 阶图 $G$,

$$2 \leqslant \gamma_o(G) \leqslant n. \tag{13.1}$$

若 $G$ 是星图或双星图, (13.1) 中的下界可以达到; 如果 $G \cong kK_2$ ($k$ 为某个正整数), 则 (13.1) 中的上界也可以达到. 因此, (13.1) 中的界都是紧的.

另外, 借助于图的控制数, 我们还可以得到 (不含孤立顶点的) 图的开控制数的界.

**定理 13.7** 对每个不含孤立顶点的图 $G$,

$$\gamma(G) \leqslant \gamma_o(G) \leqslant 2\gamma(G).$$

**证** [直接证法] 因为 $G$ 的每个开控制集也是 $G$ 的一个控制集, 所以 $\gamma(G) \leqslant \gamma_o(G)$. 剩下来要证明 $\gamma_o(G) \leqslant 2\gamma(G)$. 设 $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ 是 $G$ 的一个最小控制集, 因此 $V(G) - S$ 的顶点都被 $S$ 的顶点开控制. 由于 $G$ 中不含孤立顶点, 则每个顶点 $v_i$ 的开邻域 $N(v_i)$ 非空. 设 $u_i \in N(v_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $S' = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$. 因此, $S$ 的顶点被 $S'$ 的顶点控制. 故 $S \cup S'$ 是 $G$ 的一个开控制集. 从而 $\gamma_o(G) \leqslant |S \cup S'| \leqslant 2|S| = 2\gamma(G)$. ■

定理 13.7 中的界都是紧的. 例如, 每个双星图的控制数和开控制数都是 2. 对于图 13.10 中的图 $G$, 设 $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $S' = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. 则 $S$ 是 $G$ 的一个最小控制集; 而 $S \cup S'$ 是一个最小开控制集. 因此,$\gamma(G) = 5$, $\gamma_o(G) = 10$.

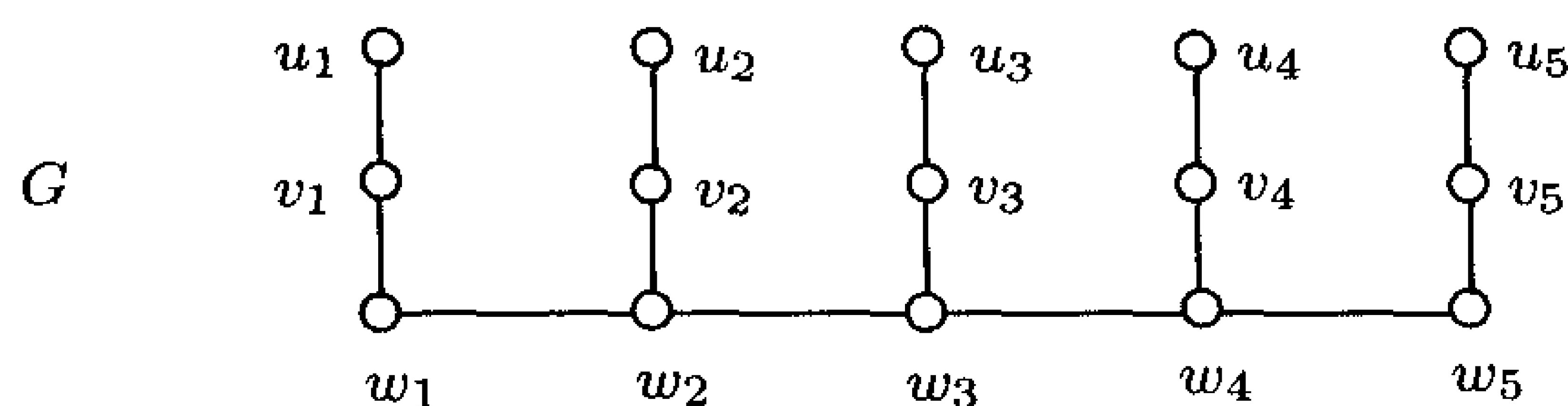



图 13.10 满足 $\gamma_o(G) = 2\gamma(G)$ 的图 $G$

推论 13.5 告诉我们, 不含孤立顶点的 $n$ 阶图 $G$ 的控制数至多为 $n/2$. 而对于开控制数, Ernie Cockayne, Robyn Dawes 和 Stephen Hedetniemi 已经证明了其最好的上界是 $2n/3$.

**定理 13.8** 如果 $G$ 为一个阶为 $n \geqslant 3$ 的连通图, 则

$$\gamma_o(G) \leqslant \frac{2n}{3}.$$

图 13.10 中的图 $G$ 则说明了定理 13.8 中的界是紧的.

## 习题

13.1 对于图 13.11 的图 $G$, 确定

(a) $G$ 的控制数,

(b) $G$ 的开控制数.

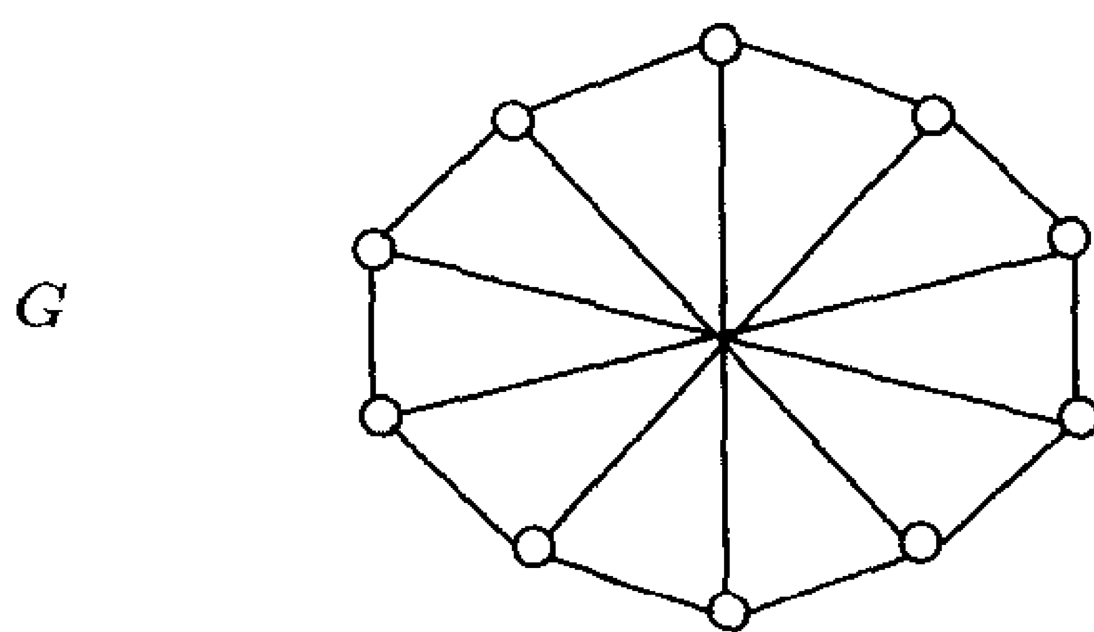



图 13.11 习题 13.1 的图 $G$

13.2 对于图 13.12 的图 $G$, 确定

(a) $G$ 的控制数,

(b) $G$ 的开控制数.

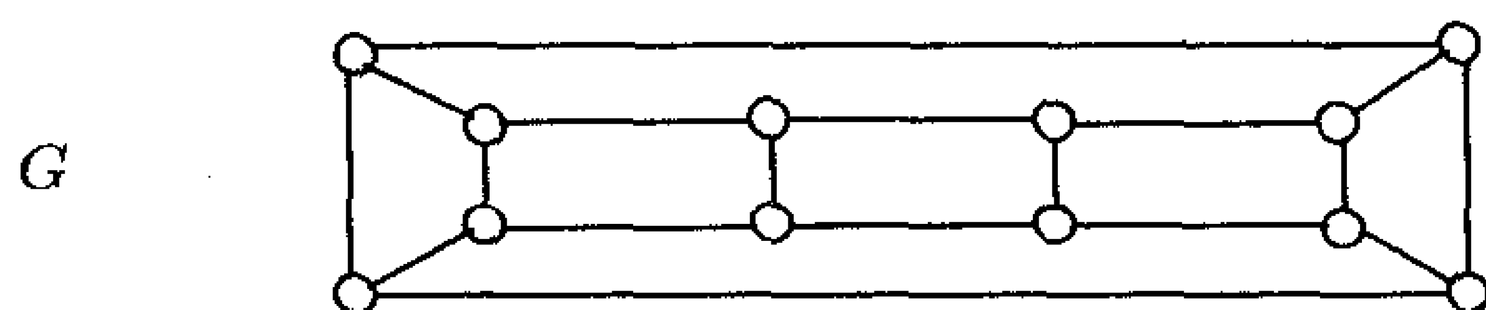



图 13.12 习题 13.2 的图 $G$

13.3 对下面的每个图，确定它的控制数和开控制数：

(1) $K_n$, $n \geqslant 2$, (2) $P_n$, $n \geqslant 2$, (3) $K_{s,t}$, (4) $Q_3$, (5) Petersen 图.

13.4 对于每个正整数 $n$, 证明：

(a) 存在一个 $n$ 阶连通图 $G$, 使得 $\gamma(G) = n - \Delta(G)$.

(b) 存在一个 $n$ 阶连通图 $G$, 使得 $\gamma(G) = n/(1 + \Delta(G))$.

13.5 列举

(a) 一个阶为某个正整数 $n$ 的图 $G$, 它不含孤立顶点, 满足 $\Delta(G) \leqslant n - 2$, 且有一个最小控制集 $S$, 使得：对于 $S$ 的每个顶点 $v$, 都不存在 $V(G) - S$ 的某个顶点 $w$, 满足 $N(w) \cap S = \{v\}$.

(b) 一个阶为某个奇数 $n \geqslant 9$ 的图 $G$, 它不含孤立顶点, 并有最大可能的控制数.

13.6 证明：对于每对整数 $k, n$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 存在一个 $n$ 阶图 $G$, 使得 $\gamma(G) = k$.

13.7 证明：对于每对整数 $k, n$ $(1 \leqslant k \leqslant n/2)$, 存在一个 $n$ 阶连通图 $G$, 使得 $\gamma(G) = k$.

13.8 在下列各图中, 列举一个极小控制集, 并要求该集合不是最小控制集. (a) $P_9$,(b) 习题 13.1 的图 $G$.

13.9 证明：如果图 $G$ 的某个控制集 $S$ 的任意两个顶点都不相邻, 则 $S$ 必然是极小控制集, 但未必是最小控制集.

13.10 证明：存在图 $G$ 及其极小控制集 $S$, 使得 $|S| - \gamma(G) \geqslant 2$.

13.11 (a) 证明：如果 $G$ 是一个阶为 $n \geqslant 2$ 的图, 则 $3 \leqslant \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leqslant n + 1$.

(b) 证明：对每个整数 $n \geqslant 2$, 存在一个图 $G$, 使得 $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = 3$.

(c) 证明：对每个整数 $n \geqslant 2$, 存在一个 $n$ 阶图 $G$, 使得 $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1$.

13.12 证明：如果 $G$ 是一个图, 满足 $\gamma(G) \geqslant 3$ 和 $\gamma(\overline{G}) \geqslant 3$, 则 diam $G = 2$. [提示：首先证明 $G$ 是连通的.]

13.13 对每个整数 $k \geqslant 2$, 列举一个连通图 $G$, 使得 $\gamma(G) = \gamma_o(G) = k$.

13.14 对每个正整数 $k$, 列举一个连通图 $G$, 使得 $\gamma(G) = k$ 以及 $\gamma_o(G) = 2k$.

13.15 列举一个连通图 $G$, 使得 $\gamma_o(G) = 1.5\gamma(G)$.

13.16 对每个整数 $n \geqslant 3$ 且 $n \equiv 0 \pmod 3$, 列举一个 $n$ 阶图 $G$, 使得 $\gamma_o(G) = 2n/3$.

## 13.2 专题探索：分层

我们已经见过很多这样的例子：一个图的顶点集通过某种方式被分成若干个类. 最常见的有, 顶点被分成奇点和偶点, 或者被分成割点和非割点. 当然, 最为有名的例子应该算是图的染色, 即把图的顶点集按某种方式分成若干个独立集.

若图 $G$ 的顶点集以某种方式实现了划分, 则称 $G$ 是一个**分层图** (**stratified graph**). 如果 $V(G)$ 被划分成 $k$ 个子集, 比方说 $V_1, V_2, \cdots, V_k$, 则称 $G$ 为**$k$ 分**

**层图** (**$k$-stratified graph**), 并称这些子集为 $G$ 的**层** (**strata**)或者**颜色类** (**color classes**). 注意到, 我们对子集 $V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 没有附加任何限制. 这一点与顶点染色不同. 如果 $G$ 是 2 分层的, 则我们通常给其中一个颜色类染红色, 而给另一个颜色类染蓝色. 对于一个给定的图 $G$, $G$ 顶点的一个划分 (即, $G$ 顶点的一种染色方式) 称为是 $G$ 的一个**分层** (**stratification**) (或者**$k$ 分层** (**$k$-stratification**), 如果该划分由 $k$ 个子集组成). 例如, 对于图 13.13 的图 $G$, 我们给出了 $G$ 的 2 分层 $G_1$ 和 $G_2$, 其中实心顶点代表红色顶点, 空心顶点代表蓝色顶点.

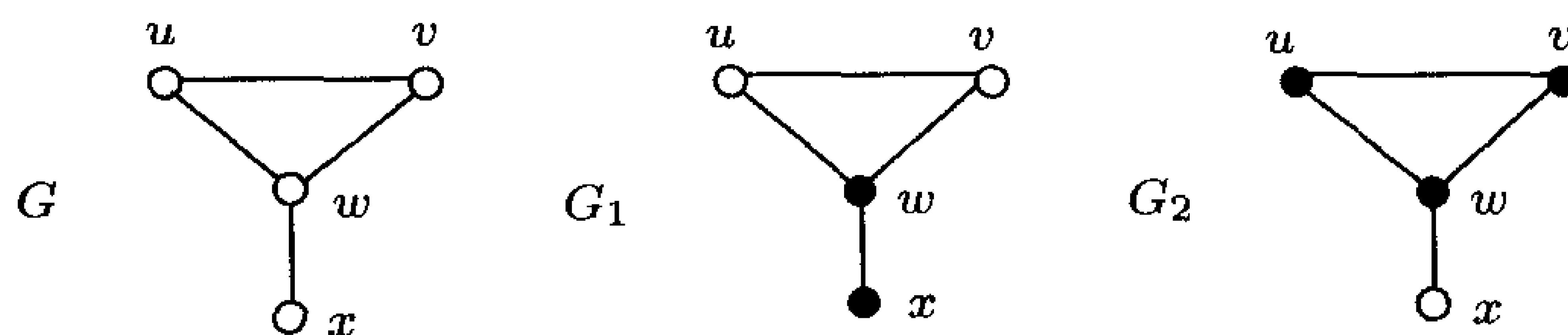



图 13.13　图的 2 分层

两个 $k$ 分层图 $G$ 和 $H$ 称为是**同构的** (**isomorphic**), 如果存在一个双射函数 $\phi : V(G) \to V(H)$, 使得

(1) 顶点 $u$ 和 $v$ 在 $G$ 中是邻接的当且仅当 $\phi(u)$ 和 $\phi(v)$ 在 $H$ 中是邻接的,

(2) 对所有 $x \in V(G)$, $x$ 和 $\phi(x)$ 都染相同的颜色.

此时, 函数 $\phi$ 称为是**保色同构** (**color-preserving isomorphism**).

图 $G$ 的一个**红 − 蓝染色** (**red-blue coloring**)指的是给 $G$ 的顶点分配红蓝两种颜色, 且每个顶点分配一种颜色. 对于 $G$ 的一个红 − 蓝染色, 可能每个顶点都染红色, 或者每个顶点都染蓝色. 如果每种颜色的顶点都存在, 则该红 − 蓝染色将形成 $G$ 的一个 2 分层.

分层图的研究是由 Reza Rashidi 和 Naveed Sherwani 于 1990 年代提出的. 当我们想把晶体管安置在超大规模集成 (VLSI) 的电路芯片上, 必须设计一个算法以解决多层布线问题. 应用图的顶点集划分的想法解决上述问题, 取得了令人满意的结果.

图的控制与图的分层之间有着紧密的联系, 特别是图的 2 分层. 设 $F$ 是一个 2 分层图, 因此, $F$ 含有一个或更多个红色顶点以及一个或更多个蓝色顶点. 选择 $F$ 的一个蓝色顶点作为 $F$ 的**根** (**root**), 记为 $v$. 图 13.13 中的图 $G$ 的另一个 2 分层图 $G_3$ 可如图 13.14 所示. 因为 $G_3$ 含有两个非相似的蓝色顶点, 所以我们可以区分它们, 主要依据是哪个蓝色顶点被选为根, 并用 $F'$ 和 $F''$ 分别表示这两个 2 分层有根图.

现在, 设 $F$ 是一个 2 分层有根图, 即 $F$ 是以某个蓝色顶点 $v$ 作为根的 2 分层图. 图 $G$ 的一个**$F$ 染色** (**$F$-coloring**)定义为 $G$ 的一个红 − 蓝染色, 并满足: 对 $G$ 的每个蓝色顶点 $w$, $G$ 都含有 $F$ 的一个拷贝且使得 $v$ 对应于 $w$; 也就是说, 对 $G$ 的

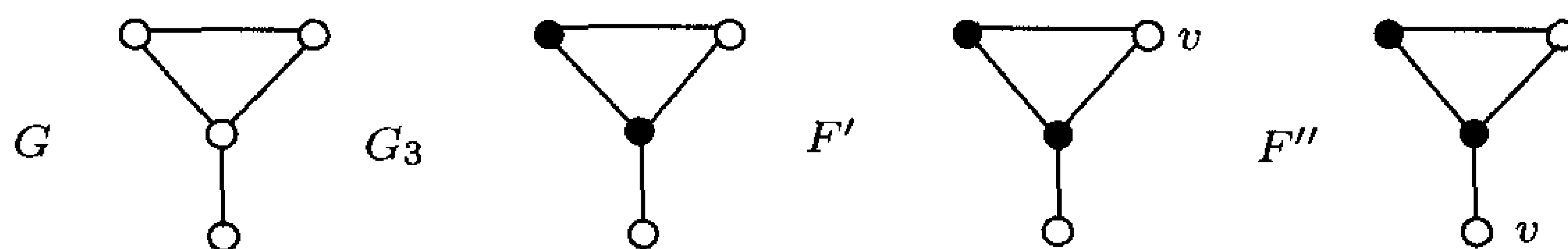



图 13.14　2 分层有根图

每个蓝色顶点 $w$, 都存在 $G$ 的一个包含 $w$ 的 2 分层子图 $G'$ 以及从 $F$ 到 $G'$ 的保色同构映射 $\alpha$, 使得 $\alpha(v)=w$. 若在 $G$ 的一个红 – 蓝染色中, 每个顶点都染红色, 则此时对任一 2 分层有根图 $F$, 该红 – 蓝染色都是 (平凡的)$F$ 染色.

例如, 对图 13.15 的 2 分层有根图 $F'$ 以及图 $G$, 我们给出了 $G$ 的一个 $F'$ 染色, 此外, 当 $F'$ 的根 $v$ 放置在 $G$ 的蓝色顶点 $u_2$ 上, 我们也给出了示意图.

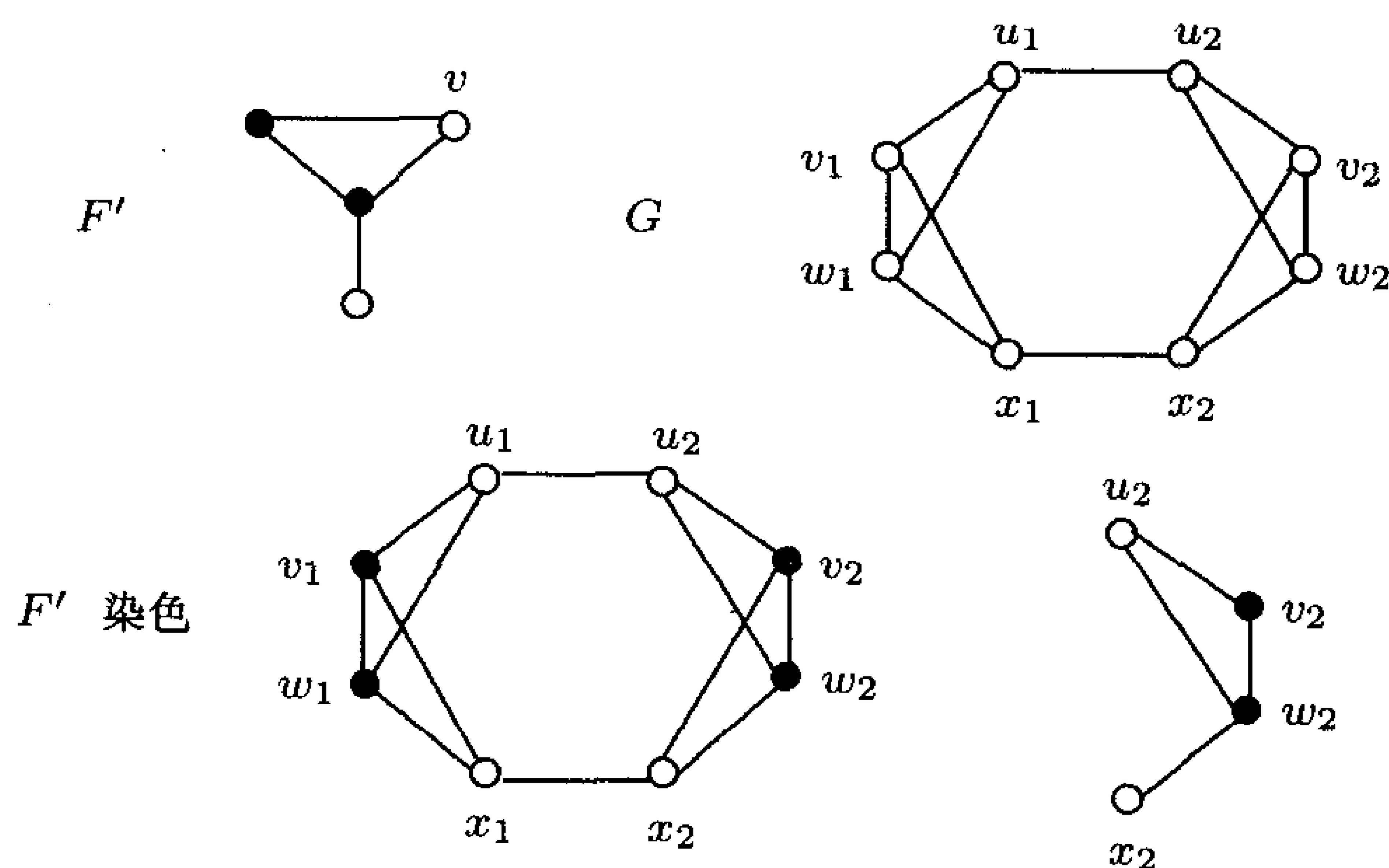



图 13.15　图 $G$ 的 $F'$ 染色

设 $F$ 是一个以某蓝色顶点 $v$ 为根的 2 分层有根图, 并设 $G$ 是一个图. 在 $G$ 的一个 $F$ 染色中, 红色顶点集合称为是 $G$ 的一个**$F$ 控制集 ($F$-dominating set)**. 具有最小基数的 $F$ 控制集称为是**最小 $F$ 控制集 (minimum $F$-dominating set)**, 最小 $F$ 控制集内的顶点数称为是 $G$ 的**$F$ 控制数 ($F$-domination number)**, 记为 $\gamma_F(G)$. 注意到, $\gamma_F(G)$ 对每个图都有定义, 即使 $G$ 不含同构于 (未染色的)$F$ 的子图; 因为每个顶点都染红色的红 – 蓝染色 (对 $G$ 而言) 就是一个 $F$ 染色. 若图 $G$ 的一个 $F$ 染色含有 $\gamma_F(G)$ 个红色顶点, 则称该染色为**最小 $F$ 染色 (minimum $F$-coloring)**.

对一些较小的连通 2 分层有根图 $F$, $\gamma_F(G)$ 蕴涵着什么呢? 显然, 最简单的情形是当 $F$ 为 2 分层 $K_2$ (见图 13.16). 对于该 2 分层图 $F$, 图的 $F$ 控制数则是为大家所熟悉的一个参数.

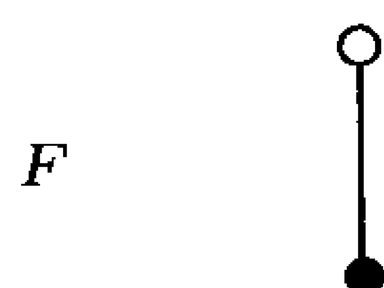



图 13.16 2 分层图 $K_2$

**定理 13.9** 设 $F$ 是 2 分层图 $K_2$. 则对每个图 $G$,

$$\gamma_F(G) = \gamma(G).$$

**证** [直接证法] 设 $G$ 是一个图, 并给定 $G$ 的一个最小 $F$ 染色. 这就推出, $G$ 的每个蓝色顶点都邻接于 $G$ 的一个红色顶点. 因此, 红色顶点形成 $G$ 的一个控制集, 从而 $\gamma(G) \leqslant \gamma_F(G)$. 接下来, 考虑一个最小控制集 $S$, 并把 $S$ 的所有顶点都染红色而把其余顶点都染蓝色. 因为每个蓝色顶点至少与一个红色顶点相邻, 因此该红 – 蓝染色是 $G$ 的一个 $F$ 染色. 因此 $\gamma_F(G) \leqslant \gamma(G)$, 从而 $\gamma_F(G) = \gamma(G)$. ■

定理 13.9 说明, 通常的控制可视为是一个 $F$ 染色, 只要选取适当的 2 分层有根图 $F$ 即可. 我们现在转向 2 分层有根图 $P_3$. $P_3$ 的红 – 蓝染色共有五种可能, 见图 13.17.

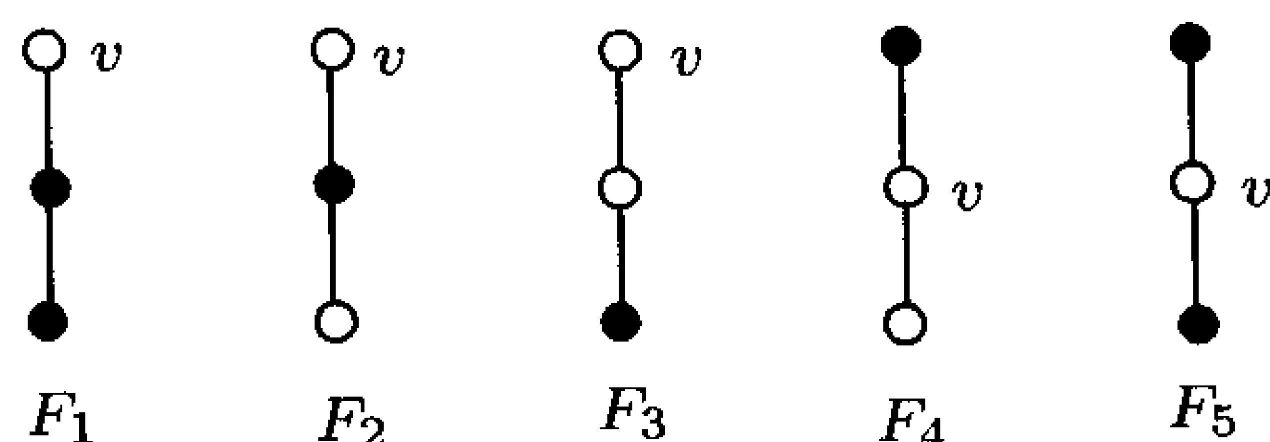



图 13.17 2 分层有根图 $P_3$

对图 13.17 中的图 $F_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 以及图 13.18 的图 $G$, 图 13.18 给出了 $G$ 关于每个 2 分层有根图 $F_i$ 的五个控制参数, 且给出了对应的最小 $F_i$ 控制集.

对于图 13.17 的 2 分层有根图 $F_1$, 所对应的控制参数也为大家所熟悉.

**定理 13.10** 设 $F_1$ 为图 13.17 的 2 分层有根图. 如果 $G$ 为不含孤立顶点的图, 则 $G$ 的 $F_1$ 控制数就是 $G$ 的开控制数, 即

$$\gamma_{F_1}(G) = \gamma_o(G).$$

**证** [直接证法, 反证法] 因为 $G$ 不含孤立顶点, 所以 $G$ 有一个开控制集. 设 $S$ 是 $G$ 的一个最小开控制集, 并给 $S$ 的顶点染红色, 而给 $G$ 的其他顶点染蓝色. 现在设 $v$ 是 $G$ 的一个蓝色顶点. 因为 $v \notin S$, 所以 $v$ 邻接于 $S$ 的一个顶点 $u$, 即 $v$ 邻接于一个红色顶点 $u$. 因为 $u$ 不被其自身开控制, 且 $S$ 是一个开控制集, 所以 $u$ 必须

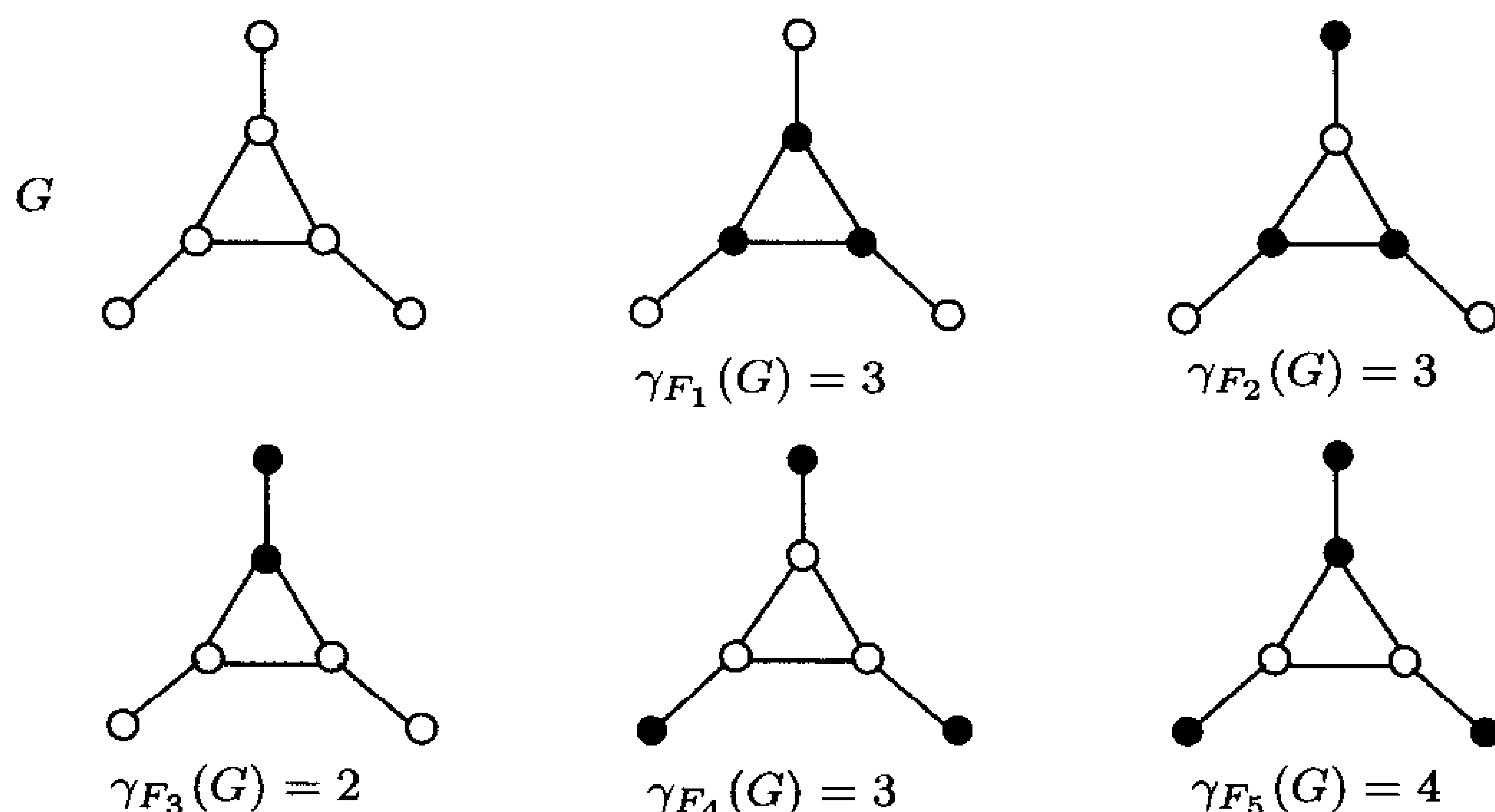



图 13.18 图 $G$ 的最小 $F_i$ 控制集 $(1 \leqslant i \leqslant 5)$

邻接于 $S$ 的某个顶点 $w$ (不同于 $v$). 因此, $v$ 是 $F_1$ 拷贝的一个根, 从而 $G$ 的该红－蓝染色是一个 $F_1$ 染色, 故 $\gamma_{F_1}(G) \leqslant \gamma_o(G)$.

接下来, 我们要证明 $\gamma_o(G) \leqslant \gamma_{F_1}(G)$. 在 $G$ 的所有最小 $F_1$ 染色中, 设 $c$ 是满足如下条件的染色, 使得由红色顶点诱导的子图包含最少的孤立顶点. 对于 $G$ 的 $c$ 染色, 设 $R_c$ 是由红色顶点构成的集合, 因此 $|R_c| = \gamma_{F_1}(G)$. 由于在 $G$ 中, 每个蓝色顶点 $v$ 都邻接于一个红色顶点, 所以 $R_c$ 是 $G$ 的一个控制集. 我们断言, $R_c$ 的每个红色顶点都邻接于其他一个红色顶点. 否则, 假设存在一个红色顶点 $u \in R_c$, 它仅邻接于蓝色顶点. 设 $v$ 是 $u$ 的一个邻点, 则 $v$ 属于一个以 $v$ 为根的 $F$ 拷贝. 从而 $v$ 必须邻接于一个红色顶点 $w$, 也就是说, $v$ 邻接于另一个红色顶点, 这隐含了 $u \neq w$. 交换 $u$ 和 $v$ 的颜色, 则形成 $G$ 的一个新的 $\gamma_F$ 染色, 此时由红色顶点诱导的子图含有更少的孤立顶点; 这与 $c$ 的选择矛盾. 因此, 如前面断言, $R_c$ 中的每个红色顶点都与另一个红色顶点相邻. 因此 $R_c$ 是 $G$ 的一个开控制集. 从而 $\gamma_o(G) \leqslant |R_c| = \gamma_{F_1}(G)$, 故 $\gamma_o(G) = \gamma_F(G)$. ■

尽管开控制数仅仅对不含孤立顶点的图有定义, 但 $F_1$ 控制数可以对所有图有定义. 根据定理 13.10, 对这两类控制数都有定义的图来说, 它们的值是相同的.

对图 13.17 的 2 分层有根图 $F_2$, 我们还可以获得一个熟悉的参数. 我们不加证明地给出下面这个定理.

**定理 13.11** 对每个阶大于或等于 3 的连通图 $G$,

$$\gamma_{F_2}(G) = \gamma(G).$$

如果 $F$ 是一个 2 分层有根图, $G$ 是一个 $n$ 阶图, 且 $G$ 不含同构于 (非染色的) $F$ 的子图. 则显然有 $\gamma_F(G) = n$. 但其逆不成立. 考虑图 13.17 中的 2 分层有根图

$F_3$, 显然, 星图 $K_{1,n-1}$ ($n \geqslant 3$) 含有很多同构于 $P_3$ 的子图; 事实上, 它含有 $\binom{n-1}{2}$ 个这样的子图. 然而, 不管 $K_{1,n-1}$ 的哪个顶点染蓝色, $K_{1,n-1}$ 都不含 $F_3$ 染色. 因此, $\gamma_{F_3}(K_{1,n-1}) = n$.

### 习题

13.17　对图 13.19 的图 $G$ 以及图 13.17 的每个 2 分层图 $F_i$ ($1 \leqslant i \leqslant 5$), 确定 $\gamma_{F_i}(G)$.

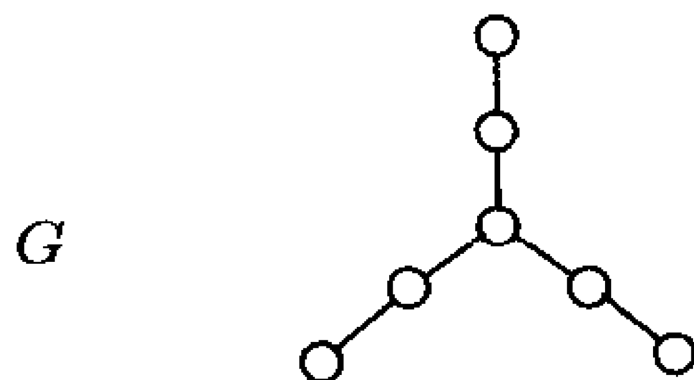



图 13.19　习题 13.17 的图 $G$

13.18　对 Petersen 图 $PG$ 以及图 13.17 的每个 2 分层图 $F_i$ ($1 \leqslant i \leqslant 5$), 确定 $\gamma_{F_i}(G)$.

13.19　考虑图 13.17 的 2 分层图 $F_3$.

(a) 列举一个阶至少为 3 的图, 使得 $\gamma_{F_3}(G) = 1$.

(b) 证明: 如果 $G$ 是一个图, 且满足 $\gamma_{F_3}(G) = 1$, 则 $\mathrm{diam}(G) \leqslant 4$.

(c) 如果 $G$ 是一个二部图, 则 $\gamma_{F_3}(G) \geqslant 2$.

13.20　对图 13.17 的 2 分层图 $F_4$ 和 $F_5$, 请讨论 $F_4$ 控制和 $F_5$ 控制.

13.21　选取一个 2 分层有根图 $F$ 和若干图 $G$, 确定每个图 $G$ 的 $F$ 控制数.

## 13.3　专题探索: 关灯游戏

在某个商业大厦的某一层, 一家公司租下了位于同侧的三间办公室 A, B 和 C, 每间办公室都装备一个巨型的顶灯和一个开关按钮, 每按一次按钮, 该办公室以及相邻的办公室的灯就改变一次状态 (由开到关, 或由关到开). 如果每天一开始所有的灯都是关的 (如图 13.20(a)), 此时只要按中间办公室 B 内的按钮, 则得到图 13.20(b) 的状态, 即所有的灯都是开的.

(a) 关灯

| A | B | C |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |

(b) 开灯

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |

图 13.20　关灯和开灯

三间办公室的灯状态可以表示为有序的三元数组 $(a, b, c)$ 或 $abc$, 其中 $a, b$, 和 $c$ 为 0 或 1, 0 表示所对应的办公室的灯处于关闭状态, 1 则表示灯处于开启状态. 图 13.21 列出了所有的八种可能.

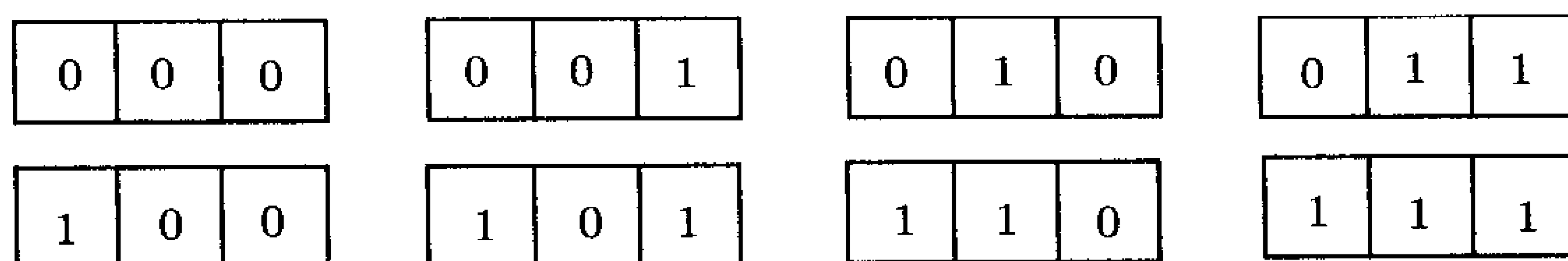



图 13.21 三间办公室的灯的可能状态

上面的情形可以用一个 8 阶图表示, 图的顶点是有序三元数组 $abc$, 其中 $a,b,c \in \{0,1\}$. 如果仅仅按一次按钮, 就可以使灯从一种状态变到另一种状态, 则在这两种状态所对应的顶点之间画一条边, 如图 13.22 所示. 你也许会注意到 $G$ 是立方体 $Q_3$. 图 13.22 中的 $Q_3$ 说明, 从三间办公室的灯全关的状态出发, 可以获得我们想要的任一种灯状态, 尽管这可能需要按按钮三次之多.

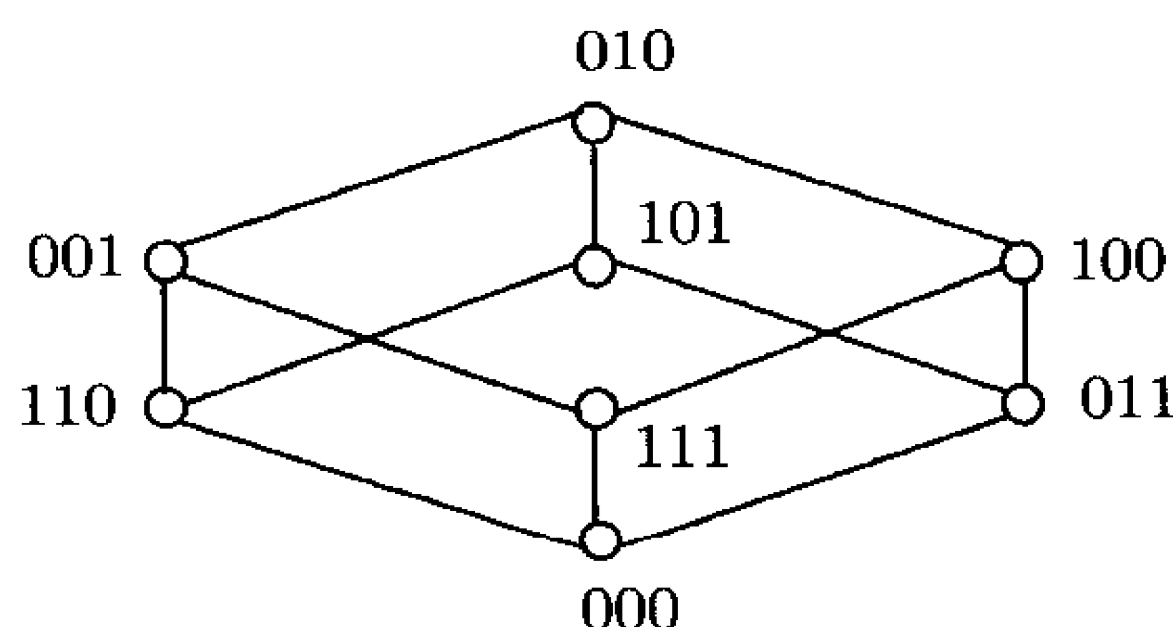



图 13.22 图 $Q_3$

刚刚描述的情形可以一开始就用图的术语来解释. 考虑图 13.23 的图 $G$, 其顶点全被画成实心, 以表示三盏灯全是开的. 如果 "按" 一下中间的实心顶点, 则导致所有的灯关闭, 从而得到图 $H$.




图 13.23 图 $G$ 和 $H$

更一般的情形可以描述为：设 $G$ 是一个连通图, 在它的每个顶点上有一个灯和一个按钮. 对每个顶点, 它上面的灯要么是开的, 要么是关的; 如果 "按" 一下某顶点上的按钮, 则不仅该顶点上的灯, 而且该顶点的所有邻点上的灯, 都要改变发光状态 (由开到关, 或由关到开). 对此, 自然地可以提出很多问题, 但我们主要考虑下面问题：

**关灯游戏** 设 $G$ 是一个图. 如果 $G$ 的所有顶点灯都是开的, 是否存在这样一组开关按钮, 使得：当按下这些按钮时就可以关闭所有的灯? 如果存在, 最少需要多少开关按钮?

美国孩之宝泰格电子有限公司 (Tiger Electronics of Hasbro, Inc.) 推出了一款名为关灯的电子游戏. 由此游戏即可提出上述更一般的图论游戏. 早期的产品是做成一个立方体, 如今关灯游戏是在 $5\times 5$ 的棋盘上进行, 并配以彩色的发光二极管和数字化声音. 目前一些互动网站也有该游戏的多种版本, 供大家娱乐.

在上述以图 $G$ 的术语来表达的关灯游戏中, 我们所要问的就是: 图 $G$ 是否有一个控制集, 使得 $G$ 的每个顶点都被奇数个顶点控制. Klaus Sutner 的结果则说明这个游戏总是有解的 (可能出乎你的意料).

**定理 13.12** 如果 $G$ 是一个连通图且所有顶点灯都是开的, 则存在 $G$ 的一个顶点集 $S$, 使得: 如果对 $S$ 的每个顶点按一下, 即可熄灭 $G$ 的所有顶点灯.

## 习题

13.22 若我们对图 13.24 的路 $G_1$ 玩关灯游戏, 请画一个图以表示灯状态的变化方式. 问: 最少需要多少开关按钮, 使得对这些按钮都按一次, 即可把灯都开的状态变为都关的状态?

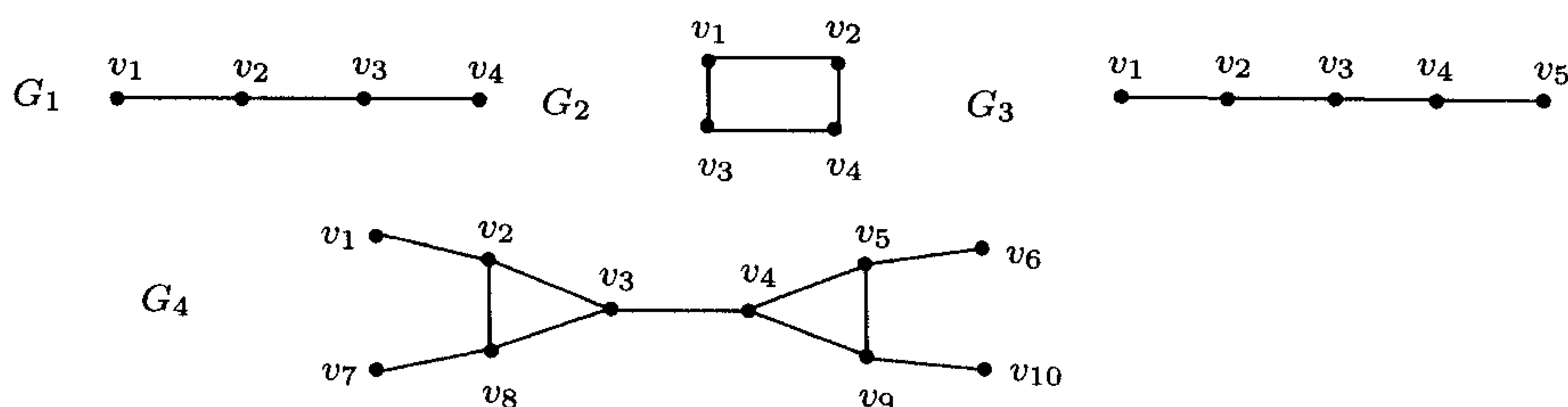



图 13.24 习题 13.22~ 习题 13.25 的图

13.23 对图 13.24 中的圈 $G_2$, 重新考虑习题 13.22.

13.24 对图 13.24 中的路 $G_3$, 问: 最少需要多少开关按钮, 使得对这些按钮都按一次, 即可把灯都开的状态变为都关的状态?

13.25 对图 13.24 中的图 $G_4$, 问: 最少需要多少开关按钮, 使得对这些按钮都按一次, 即可把灯都开的状态变为都关的状态?

13.26 自己选择一个图, 玩关灯游戏.

13.27 考虑图 13.25 中的图 $G$, 其中 $G$ 的灯都是开的.

(a) 问: 最少需要多少开关按钮, 使得对这些按钮都按一次, 即可关闭所有的灯?

(b) 设 $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$. 证明: 对 $S$ 的按钮都按一次, 就可关闭 $G$ 的所有灯. 是否存在 $S$ 的一个真子集, 它也能关闭 $G$ 的所有灯? 这是否会启发你想到另一个问题?

13.28 注意到图 13.26 的图 $H$ 仅有一个灯是开的, 即 $v_1$ 上的灯. 现在想关闭所有的灯, 该如何去做?

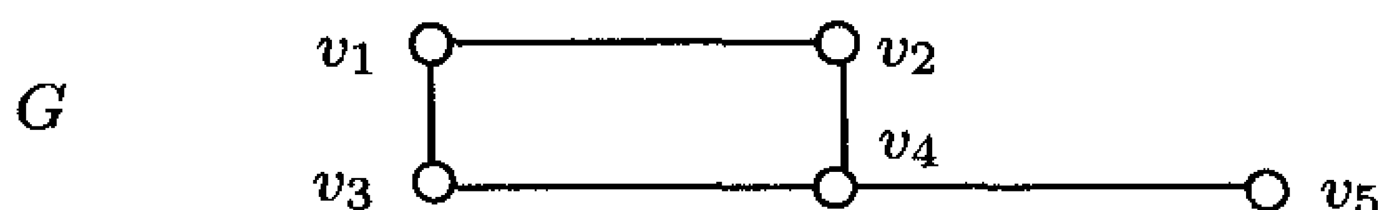
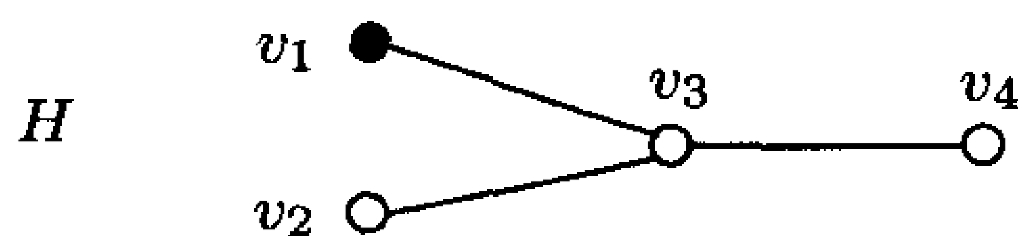



图 13.25 习题 13.27 的图




13.26 习题 13.28 的图

13.29 证明：在关灯游戏中，以何种次序按开关按钮是无关紧要的.

13.30 (a) 改变关灯游戏的规则，并在新规则下选择一个图玩关灯游戏.

(b) 在有向图上定义关灯游戏规则，并选择一个有向图玩关灯游戏.

## 13.4 延伸阅读：明天更美好

我们已经了解到，图论起源于一系列孤立的，彼此之间鲜有联系的结论；休闲娱乐的结论和完全数学的定理都一样地为这门学科的发展发挥重要作用. 早期图论教科书的作者都喜欢总结许多已有的结论，同时也展望下一步的发展方向. 在很大程度上，图论的发展受助于对一些听起来简单但解决起来非常困难的问题的无数次尝试，比如，地图的染色问题. 然而图论的运气很好，它吸引了一大批有才能且有奉献精神的数学家.

随着图论发展到 20 世纪，这个学科的很多领域都繁花盛开. 而且，在此学科工作的数学家的队伍不断壮大. 研究者们或得到大量意义深远的理论结果，或从应用的角度研究图论，或提出更多新的有趣的研究问题，或从历史的角度展望这门学科及其与其他数学学科的联系，或撰写教材或作演讲报告以展示这门学科优美之处，从而把图论介绍给未来的数学家. 图论已经成长为数学中更加显著的领域，这一点在 20 世纪后三分之一的时间表现得尤为明显.

20 世纪 60 年代后期，一系列以图论为重点的会议逐渐显示出其重要地位. 1968 年，第一届图论会议在卡拉马祖 (密歇根州) 举行，并每隔四年在西密歇根大学举办一次，Yousef Alavi 是会议的主要组织者. 1969 年，关于组合数学、图论和计算的东南国际会议在佛罗里达大学召开，由 Frederick Hoffman 组织，该会议有时也会在路易斯安那州立大学召开. 英国组合数学会议也于 1969 年召开，而且自 1973 年起每逢奇数年召开一次. 再近一点，美国工业与应用数学协会 (SIAM) 离散数学会议每逢偶数年召开一次.

1977 年，图论有了它自己的刊物*Journal of Graph Theory*，它是由 Frank Harary 创办的，并开始发行. 在第一卷第一期的第一页上，出版商 John Wiley & Sons 公司这样写到:

> 图论，作为组合理论范畴之内的一个不同的实体，已经正式诞生了 …….
> 我们深信这个刊物将满足该应用数学分支研究者对最新信息的需求.

*Journal of Graph Theory* 获得美国出版商协会颁发的奖项: 1977 年度出版的最佳新期刊 (科学、医学和技术类) 奖.

图论发展的另一个重要里程碑事件发生于 1990 年, 即组合及其应用研究所成立. 该组织的目的是为了促进组合数学 (包括图论) 的发展. 数学家 Ralph G. Stanton 在该组织的成立过程中发挥了重要作用. Stanton 是加拿大马尼托巴大学计算机科学的著名教授.

1991 年, 组合及其应用研究所发行了正式期刊: *The Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications*. 在第一卷中, 当时研究所的主席, 即受人尊敬的数学家 William Tutte 认为, 图论 (事实上, 任一个数学分支) 不能从数学其他分支中分离出来, 数学是一个统一的整体.

如下网站, 也称为图论白页, 包含了图理论和图论专家的大量信息:

http://www1.cs.columbia.edu/~sanders/graphtheory

这个网站由 Daniel P. Sanders 维护, Sanders 于 1993 年在 Robin Thomas 指导下获得博士学位.

另一个含很多有趣信息的网站是数学系谱计划 (*The Mathematics Genealogy Project*), 其网址为:

http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu

尽管这个网站涉及数学的所有领域, 但可追踪各个数学家的学术先辈和学术后代 (博士生导师和博士生). 这项计划的主办者是 Harry B. Coonce. Coonce 于 1969 年获得特拉华大学的博士学位, 后来来到曼凯托州立大学, 并在那里执教 30 年. 1994 年, Coonce 获得讲授数学史这门课程的机会, 他以数学思想和概念出现的先后次序为主线来讲授这门课. 这导致了他对学术系谱的兴趣, 并于 1996 年创建了数学系谱计划. 1999 年, Coonce 从曼凯托州立大学退休, 数学系谱计划于 2003 年转到北达科他州立大学, 并由该校数学系进行管理, Coonce 是该系的兼职教授.

图论的未来是什么? 我们很难预料. 但无论未来是什么, 我们坚信它必定会更加有趣 ……, 更加精彩!

# 附录 1　集合与逻辑

## 1.1　集　　合

图论中所讨论的集合多数是有限的. 对于常见的无限集, 我们记整数集为 $\mathbf{Z}$, 正整数集为 $\mathbf{N}$, 有理数集为 $\mathbf{Q}$, 实数集为 $\mathbf{R}$. 在无限集中, 到目前为止我们最感兴趣的是整数集合. 即使考虑有理数或实数, 也经常关注该数附近的整数. 对于一个实数 $x$, $x$ 的**下整 (floor)** $\lfloor x \rfloor$ 是指不超过 $x$ 的最大整数. 例如,$\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$,

$$\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+96}}{2} \right\rfloor = 8.$$

$x$ 的**上整 (ceiling)** $\lceil x \rceil$ 是指不小于 $x$ 的最小整数. 例如, $\lceil 5 \rceil = 5$, $\lceil \sqrt{2} \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$,

$$\left\lceil \frac{(8-3)(8-4)}{12} \right\rceil = 2.$$

对于有限集合 $S$, 记 $|S|$ 为 $S$ 的**基数 (cardinality)** (即 $S$ 中元素的个数). 若 $|S| = n$ ($n \in \mathbf{N}$ 为某个整数), 则可设 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$. 基数为 0 的集合称为**空集 (empty set)**, 记为 $\emptyset$. 因此, $\emptyset = \{\ \}$.

对于两个集合 $A$ 和 $B$, $A$ 和 $B$ 的**笛卡儿乘积 (Cartesian product)** $A \times B$ 是指集合

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

因此, $A \times A$ 是由 $A$ 中元素的所有可能的有序对构成. 例如, 若 $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, 则

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\},$$

$$A \times A = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}.$$

若两个集合 $S$ 和 $T$ 是由相同元素构成的, 则称 $S$ 和 $T$ 是**相同的 (equal)**, 记为 $S = T$. 若集合 $T$ 的每个元素均属于集合 $S$, 则称 $T$ 是 $S$ 的**子集 (subset)**, 记为 $T \subseteq S$. 一个 $n$ 元集的所有 $k$ 元子集的个数可表示成二项式系数

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

其中, 若 $n \in \mathbf{N}$, 定义 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, 并定义 $0! = 1$. 特别地,

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$

因而, 集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 的所有 3 元子集的个数为 10. 这些子集为

$$S_1=\{1,2,3\},\ S_2=\{1,2,4\},\ S_3=\{1,2,5\},\ S_4=\{1,3,4\},\ S_5=\{1,3,5\}$$
$$S_6=\{1,4,5\},\ S_7=\{2,3,4\},\ S_8=\{2,3,5\},\ S_9=\{2,4,5\},\ S_{10}=\{3,4,5\}.$$

一个 $n$ 元集的所有 2 元子集的个数可表示为

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

因而, $\binom{2}{2}=1$, $\binom{3}{2}=3$, $\binom{4}{2}=6$, $\binom{5}{2}=10$, $\binom{6}{2}=15$. 若我们将前 $n-1$ 个正整数加起来, 则和为 $\binom{n}{2}$, 即

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\binom{n}{2}.$$

另一个很有用的常见恒等式是

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n. \tag{1}$$

由于一个 $n$ 元集的每个子集包含 $k$ 个元素 (对于某个 $k$, $0\leqslant k\leqslant n$), 式 (1) 表明一个 $n$ 元集的所有子集的个数为 $2^n$. 例如, 集合 $S=\{1,2,3\}$ 有 $2^3=8$ 个子集, 即

$$S_1=\emptyset,\ S_2=\{1\},\ S_3=\{2\},\ S_4=\{3\},$$
$$S_5=\{1,2\},\ S_6=\{1,3\},\ S_7=\{2,3\},\ S_8=\{1,2,3\}=S.$$

一个非空集合 $S$ 的一个**划分 (partition)**是指由 $S$ 的非空子集构成的集合族 $\mathcal{P}$, 使得 $S$ 的每个元素恰好属于 $\mathcal{P}$ 中的一个元素. 对于集合 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$,

$$\mathcal{P}=\{\{1,5\},\{2,3,6\},\{4\}\}$$

是 $S$ 的一个划分. 关于集合的划分, 有下面的著名定理.

**鸽笼原理 (The Pigeonhole Principle)** 若 $\mathcal{P}$ 是某个 $n$ 元集 $S$ 分解为 $k$ 个子集的划分, 则在 $\mathcal{P}$ 中必有 $S$ 的某个子集, 该子集至少包含 $\lceil \frac{n}{k}\rceil$ 个元素.

特别地, 若 $S$ 是由 17 个元素构成的集合, $\mathcal{P}$ 是 $S$ 分解为 5 个子集的划分, 则在 $\mathcal{P}$ 中必有 $S$ 的某个子集, 该子集至少包含 $\lceil 17/5\rceil=4$ 个元素. 下面是鸽笼原理的一个相关定理, 该定理要归功于 Frank Ramsey.

**Ramsey 定理** 设 $\mathcal{P}=\{S_1,S_2,\cdots,S_k\}$ 为集合 $S$ 分解为 $k$ 个子集的划分, $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 为 $k$ 个正整数且使得 $|S_i|\geqslant n_i$ (对每个整数 $i$, $1\leqslant i\leqslant k$), 则存在一个正整数 $N$, 使得 $S$ 的任一 $N$ 元子集必包含某个 $S_i$ 的至少 $n_i$ 个元素 $(1\leqslant i\leqslant k)$.

特别地, 整数

$$N=1+\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)$$

满足上述性质. 事实上, 它是满足上述性质的最小整数.

例如, 若 $\mathcal{P} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ 是集合 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ 的一个划分, 其中 $|S_1| = 5$, $|S_2| = 6$, $|S_3| = 4$, $|S_4| = 7$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$, $n_4 = 5$, 则 $S$ 的任一 12 元子集或者包含 (1) $S_1$ 中的 4 个元素, 或者包含 (2) $S_2$ 中的 3 个元素, 或者包含 (3) $S_3$ 中的 3 个元素, 或者包含 (4) $S_4$ 中的 5 个元素.

## 1.2 逻　辑

一个**命题 (statement)** $P$ 是一个断言, 它要么是真的, 要么是假的, 但不能两者都是. 若 $P$ 是一个真命题, 则它的**真值 (truth value)**为真; 否则, 它的真值为假. $P$ 的**否 (negation)** $\sim P$ (非 $P$) 具有与 $P$ 对立的真值. 两个命题 $P$ 和 $Q$ 的**析取 (disjunction)** $P \vee Q$ ($P$ 或 $Q$) 是真的, 若 $P$ 和 $Q$ 有一个为真的; 否则 $P \vee Q$ 为假. $P$ 和 $Q$ 的**合取 (conjunction)** $P \wedge Q$ ($P$ 且 $Q$) 是真的, 若 $P$ 和 $Q$ 都是真的; 否则 $P \wedge Q$ 为假. 由 $P$ 和 $Q$ 以及**逻辑连接词 (logical connectives)** (如 $\sim$, $\vee$, $\wedge$) 构成的两个命题称为是**逻辑等价的 (logically equivalent)**, 若对 $P$ 和 $Q$ 所有可能的真值组合, 它们都有相同的真值. 由 De Morgan 定律, 对于命题 $P$ 和 $Q$,

$\sim (P \vee Q)$ 逻辑等价于 $(\sim P) \wedge (\sim Q)$,

$\sim (P \wedge Q)$ 逻辑等价于 $(\sim P) \vee (\sim Q)$.

设 $P$ 和 $Q$ 为两个命题, 对于 $P$ 和 $Q$ 真值的所有组合, **蕴涵 (implication)** $P \Rightarrow Q$ (经常表述为 "如果 $P$, 那么 $Q$") 是真的, 除去情形 $P$ 为真且 $Q$ 为假之外. $P \Rightarrow Q$ 也可表述为: (1) $P$ 蕴涵 $Q$; (2) $P$ 仅当 $Q$; (3) $P$ 对于 $Q$ 是充分的; (4) $Q$ 对于 $P$ 的必要的. 此时, $P$ 是 $Q$ 的**充分条件 (sufficient condition)**, 而 $Q$ 是 $P$ 的**必要条件 (necessary condition)**

若一个陈述句的真值依赖于其中变量的值, 则该陈述句不是一个命题, 通常称之为**开命题**. 对于开命题 $P$ 和 $Q$, 蕴涵 $P \Rightarrow Q$ 是一个命题. 例如:

$P$: $n$ 为奇数.　$Q$: $3n-5$ 为偶数.

蕴涵

$P \Rightarrow Q$: 如果 $n$ 为奇数, 那么 $3n-5$ 为偶数　(2)

是一个命题. (在附录 3 中, 我们将介绍如何验证上述方式所构造的命题的真假.)

蕴涵也可用**泛量词 (universal quantifiers)**来表述, 如, 对所有、对任一和对每个. 例如, 蕴涵 (2) 可写成

对每个奇数 $n$, $3n-5$ 为偶数.

该蕴涵断言: 对于奇数集合的任一元素 $n$, $3n-5$ 属于偶数集合.

下面命题使用了**存在量词 (existential quantifier)** (存在、有、对某些和至少有一个).

$$\text{存在奇数 } n, \text{使得} \frac{3^n+1}{4} \text{为素数.}$$

该命题断言：奇数集合中至少存在一个元素 $n$, 使得 $\frac{3^n+1}{4}$ 属于素数集合.

对于命题或开命题 $P$ 和 $Q$, 蕴涵 $P \Rightarrow Q$ 的**逆 (converse)** 是指蕴涵 $Q \Rightarrow P$, $P \Rightarrow Q$ 的**逆否 (contrapositive)** 是指蕴涵 $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$. 蕴涵和其逆否蕴涵是逻辑等价的, 而蕴涵和其逆蕴涵并非如此.

$$\text{如果 } ab=0, \text{ 那么 } a=0 \text{ 或 } b=0. \tag{3}$$

的逆蕴涵为

$$\text{如果 } a=0 \text{ 或 } b=0, \text{ 则 } ab=0;$$

(3) 的逆否蕴涵为

$$\text{如果 } a \neq 0 \text{ 且 } b \neq 0, \text{ 那么 } ab \neq 0.$$

我们可利用 De Morgan 定律, 给出逆否命题.

$P \Leftrightarrow Q$ 意味着 $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. 该命题通常可表述为

$P$ **当且仅当 (if and only if)** $Q$

或

$P$ 对于 $Q$ 是**充分必要的 (necessary and sufficient)**.

例如,

$$\text{对于实数 } a, a^2=9 \text{ 当且仅当 } |a|=3.$$

# 附录 2　等价关系与映射

## 2.1 等价关系

对于两个非空集合 $A$ 和 $B$, **从 $A$ 到 $B$ 的关系 R (relation R from $A$ to $B$)** 是指 $A$ 和 $B$ 的笛卡儿乘积的一个子集, 即

$$R \subseteq A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

**集合 $A$ 上的关系 R (relation R on $A$)** 是指从 $A$ 到 $A$ 的关系, 即 $R$ 是由 $A$ 的元素的有序对所构成的集合. 若 $(a, b) \in R$, 则称 $a$ 和 $b$ 关于 $R$ 有关系, 记为 $a\ R\ b$. 例如, 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 则

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 2)\}$$

是 $A$ 上的一个关系.

非空集合 $A$ 上的关系 $R$ 称为是**等价关系** (equivalence relation), 若 $R$ 满足下面三条性质:

(1) $R$ 是**自反的** (reflexive), 即对于任意 $x \in A$, $x\ R\ x$.

(2) $R$ 是**对称的** (symmetric), 即对于任意 $x, y \in A$, 若 $x\ R\ y$, 则 $y\ R\ x$.

(3) $R$ 是**传递的** (transitive), 即对于任意 $x, y, z \in A$, 若 $x\ R\ y$ 且 $y\ R\ z$, 则 $x\ R\ z$.

例如, 关系

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (3, 4), (4, 3)\} \tag{4}$$

是集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的等价关系.

下面的例子是关于无限集合上的一个等价关系.

**例 2.1** 整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的关系 $R$ 定义为: 若 $x + y$ 为偶数, 则 $x\ R\ y$. 证明 $R$ 是等价关系.

**解** 首先, 证明 $R$ 是自反的. 设 $x \in \mathbf{Z}$, 由于 $x + x = 2x$ 为偶数, 则 $x\ R\ x$, $R$ 是自反的. 下证 $R$ 是对称的. 假设 $x\ R\ y$, 其中 $x, y \in \mathbf{Z}$. 由关系 $R$ 的定义, $x + y$ 为偶数. 由于 $y + x = x + y$, 故 $y + x$ 为偶数. 因此 $y\ R\ x$, $R$ 是对称的.

最后, 我们证明 $R$ 是传递的. 设 $x\ R\ y$, $y\ R\ z$, 其中 $x, y, z \in \mathbf{Z}$, 故 $x + y$ 和 $y + z$ 均为偶数, 即对于某两个整数 $a$ 和 $b$, $x + y = 2a$, $y + z = 2b$. 对 $x + y$ 和 $y + z$ 求和,

我们得到 $(x+y)+(y+z)=2a+2b$. 因此,

$$x+z=2a+2b-2y=2(a+b-y).$$

由于 $a+b-y$ 是整数, 故 $x+z$ 是偶数. 因此 $x\ R\ z$, $R$ 是传递的. ◇

对于定义在非空集合 $A$ 上的等价关系 $R$ 以及元素 $a\in A$, **等价类 (equivalence class)** $[a]$ 定义为

$$[a]=\{x\in A:\ x\ R\ a\}.$$

因为 $a\in[a]$, 所以每个等价类是非空的.

对于定义在非空集合 $A$ 上的一个等价关系, 由此产生的不同等价类形成了 $A$ 的一个划分, 其中, $A$ 的两个元素属于同一个等价类当且仅当它们之间有关系. 对于集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$上按 (4) 定义的关系 $R_1$, 其等价类为 $[1]=\{1,3,4\}$, $[2]=\{2\}$. 在此情形下, $[4]=[3]=[1]$. 对于例 2.1 中 $\mathbf{Z}$ 上定义的关系 $R$ (即, 若 $x+y$ 为偶数, 则 $x\ R\ y$), 不同的等价类为

$$[0]=\{x\in\mathbf{Z}:\ x \text{ 是偶数}\},\ [1]=\{x\in\mathbf{Z}:\ x \text{ 是奇数}\}.$$

下面给出等价关系的一个常见类型.

**例 2.2** *定义在非空整数集合 $A$ 上的关系 $R$, 即, 对于 $x,y\in A$, 若 $x\equiv y\pmod 3$, 则 $x\ R\ y$, 是一个等价关系.*

例如: 若

$$A=\{-4,-2,-1,0,3,4,5,8,11,12\}$$

为例 2.2 中的整数集合, 则由等价关系 $R$ 形成的不同等价类为

$$[-4]=\{-4,-1,5,8,11\},\ [-2]=\{-2,4\},\ [0]=\{0,3,12\}.$$

下面给出本书中出现的一些等价关系:

(1) 若图中两个顶点 $u$ 和 $v$ 是连通, 则定义它们有关系. 这在 1.2 节中已经讨论.

(2) 若两个图 $G$ 和 $H$ 是同构的, 则定义它们有关系. 这在 3.2 节中已经讨论.

(3) 若图 $G$ 中两个顶点 $u$ 和 $v$ 是相似的 (即, 存在 $G$ 的自同构 $\alpha$, 使得 $\alpha(u)=v$), 则定义它们有关系. 这在 3.4 节中已经讨论.

(4) 若非平凡连通图 $G$ 中两条边 $e$ 和 $f$ 属于 $G$ 的同一个圈, 则定义它们有关系. 这在 5.2 节中已经讨论.

(5) 若连通图 $G$ 中两个顶点 $u$ 和 $v$ 是距离相似的 (即, 对于任意顶点 $x\in V(G)-\{u,v\}$, 有 $d(u,x)=d(v,x)$ ), 则定义它们有关系. 这在 12.3 节中已经讨论.

## 2.2 映　　射

对于非空集合 $A$ 和 $B$, 从 $A$ 到 $B$ 的一个**映射 (function)** $f$, 记为 $f: A\to B$,

是指从 $A$ 到 $B$ 的一个关系, 且 $A$ 的每个元素 (作为第一坐标) 恰好出现在一个有序对. 若有序对 $(a,b)$ 属于 $f$, 则记 $b=f(a)$, $b$ 称为 $a$ 的**像 (image)**. $f$ 的所有像的集合称为 $f$ 的**值域 (range)**. 例如, 对于集合 $A_1=\{r,s,t\}$ 和 $B_1=\{w,x,y,z\}$,

$$f_1=\{(r,x),(s,z),(t,z)\} \tag{5}$$

是从 $A_1$ 到 $B_1$ 的一个映射. $f_1$ 的值域为 $\{x,z\}$.

映射 $f:A\to B$ 称为**一一的 (one-to-one)**或**单射 (injective)**, 若 $A$ 中不同的元素在 $B$ 中有不同的像. 因而, 若对 $A$ 的任意两个不同元素 $a_1$ 和 $a_2$, $f(a_1)\neq f(a_2)$, 则 $f$ 是一一的. 利用其逆否, 我们也可以说, 若对 $a_1,a_2\in A$, $f(a_1)=f(a_2)$, 都有 $a_1=a_2$, 则 $f$ 是一一的. 由于 (5) 中 $s$ 和 $t$ 具有相同的像, 即 $f_1(s)=f_1(t)$, 故 $f_1$ 不是一一的. 对于上面的集合 $A_1$ 和 $B_1$, 映射

$$g_1=\{(r,w),(s,z),(t,y)\} \tag{6}$$

是一一的.

映射 $f:A\to B$ 称为**映上的 (onto)**或**满射 (surjective)**, 若 $B$ 中的每个元素均是 $A$ 中某个元素的像, 即 $f$ 的像是 $B$. 在上面的映射中, 由于 $w$ 和 $y$ 都不是 $A_1$ 的任一元素的像, 故 $f_1$ 不是映上的. 在 (6) 中, 由于 $x$ 不在 $g_1$ 的像中, 即 $g_1$ 值域不是 $B_1$, 故 $g_1$ 也不是映上的. 对于集合 $A_2=\{1,2,3\}$ 和 $B_2=\{4,5,6\}$, 映射

$$f_2=\{(1,4),(2,6),(3,5)\} \tag{7}$$

既是一一的又是映上的.

既是一一的又是映上的映射称为**双射 (bijective function)**或**一一对应 (one-to-one correspondence)**. (7) 中的映射 $f_2$ 是双射. 下面列举一个无限集合上的双射.

**例 2.3**　证明如下定义的映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是双射, 其中, 对所有 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=3x-8$.

**解**　首先我们证明 $f$ 是一一的. 对于 $a,b\in\mathbf{R}$, 假设 $f(a)=f(b)$, 即 $3a-8=3b-8$. 等式的两边同时加 8 再除以 3, 得到 $a=b$, 故 $f$ 是一一的.

下面我们证明 $f$ 是映上的. 设 $r$ 为一实数, 则 $x=(r+8)/3$ 同样为一实数. 此外,

$$f(x)=f\left(\frac{r+8}{3}\right)=3\left(\frac{r+8}{3}\right)-8=r,$$

故 $f$ 是映上的.

因此, $f$ 是双射. ◇

对于集合 $A,B,C$, 以及映射 $f: A\to B$ 和 $g: B\to C$, $f$ 和 $g$ 的**复合 (composition)** $g\circ f$ 是一个从 $A$ 到 $C$ 的映射, 定义为：对任意 $a\in A$,

$$(g\circ f)(a)=g(f(a)).$$

例如, 设 $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c,d\}, C=\{x,y,z\}$, 设映射 $f: A\to B$, $g: B\to C$ 分别为

$$f=\{(1,c),(2,d),(3,a)\},\ g=\{(a,y),(b,z),(c,z),(d,y)\}.$$

则 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(c)=z$. 一般地,

$$g\circ f=\{(1,z),(2,y),(3,y)\}.$$

下面给出关于映射复合的一个重要定理.

**定理 2.4** 若 $f: A\to B$ 和 $g: B\to C$ 都是双射, 则 $g\circ f$ 是双射.

对于映射 $f: A\to B$, $f$ 的**逆关系 (inverse relation)** $f^{-1}$ 定义为

$$f^{-1}=\{(b,a):\ (a,b)\in f\}.$$

下面给出关于逆关系的一个重要定理.

**定理 2.5** 对于映射 $f: A\to B$, 逆关系 $f^{-1}$ 是从 $B$ 到 $A$ 的映射当且仅当 $f$ 是双射. 从而, 若 $f$ 是双射, 则 $f^{-1}$ 也是双射.

对于非空集合 $A$, 双射 $f: A\to A$ 称为是 $A$ 的一个**置换 (permutation)**. 例 2.3 的映射 $f$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个置换.

**例 2.6** 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, 则如下定义的映射 $f: A\to A$ 是 $A$ 的一个置换, 其中

$$f=\{(1,3),(2,6),(3,4),(4,1),(5,5),(6,2)\}.$$

例 2.6 的映射 $f$ 也可用置换循环表示, 即 $f=(134)(26)$, 即 $f$ 把 1 映到 3, 把 3 映到 4, 把 4 映到 1, 把 2 映到 6, 把 6 映到 2, 保持 5 不动 (即映到自身).

本书出现的有关映射的例子如下：

(1) 同构 (第 3 章),

(2) 自同构 (3.4 节),

(3) 匹配 (8.1 节),

(4) 染色 (10.2 节和 10.3 节),

(5) 频道分配问题 (12.5 节).

# 附录 3　证明方法

## 3.1　直接证法

数学中大多数定理都是 (或能够) 表达为蕴含 $P \Rightarrow Q$, 其中 $P$ 和 $Q$ 为某命题 (或更确切地说, 开命题). 当然, 最常用的证明就是**直接证明 (direct proof)**, 其中, 假设 $P$ 是正确的, 则要证明 $Q$ 是正确的. 下面给出一个直接证法的例子.

**例 3.1**　*若 $n$ 为偶数, 则 $5n+7$ 是奇数.*

**证**　假设 $n$ 是偶数, 则存在某个整数 $k$, 使得 $n=2k$. 因此,

$$5n+7=5(2k)+7=10k+7=10k+6+1=2(5k+3)+1.$$

由于 $5k+3$ 是整数, 所以 $5n+7$ 是奇数. ■

我们需要对例 3.1 及其证明做一些注释. 首先, 例 3.1 的蕴含关系可以表述为:

*对每个偶数 $n$, $5n+7$ 是奇数.*

如果记 $T$ 为偶数集合, 记 $S$ 为奇数集合, 则例 3.1 的蕴含关系可以用符号重新表述为:

*对每个 $n \in T$, $5n+7 \in S$.*

我们在给出例 3.1 中蕴含关系的直接证明时, 开始假设 $n$ 为一个偶数. 因此, 我们从集合 $T$ 中任意一个元素开始, 然后证明 $5n+7$ 是奇数 (因此是集合 $S$ 的一个元素).

本书的定理 1.11 和定理 2.1 都使用直接证法.

**定理 1.11**　*若 $G$ 是一个不连通图, 则 $\overline{G}$ 是连通的.*

如前面讨论, 我们从不连通图 $G$ 开始, 然后证明 $\overline{G}$ 是连通的.

**定理 2.1**　**(图论第一定理)** *若图 $G$ 的边数为 $m$, 则*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m.$$

在该定理的证明中, 我们从一个边数为 $m$ 的图 $G$ 开始, 然后证明若对 $G$ 的顶点度求和, 则可以得到 $2m$.

## 3.2　反 例 证 法

通过一个反例, 我们可以证明, 一个以蕴含关系表述的数学命题是错误的. 对于开命题 $P$ 和 $Q$, 给定一个命题为 $P \Rightarrow Q$, 其中 $P$ 和 $Q$ 都涉及某个集合 $S$ 的元素.

如果能找到某个元素 $x \in S$, 使得对于 $x$, $P$ 是正确的, 而 $Q$ 是错误的, 那么 $x$ 就是 $P \Rightarrow Q$ 的一个**反例 (counterexample)**. 在验证一个猜想 (即, 一个认为是正确的命题) 时, 我们经常采用反例; 若能够找到一个反例, 则说明此猜想是错误的. 下面举例说明.

**例 3.2** 判断下面命题是否正确.

若 $n$ 为整数, 则 $6n+3$ 不是素数.

**解** 该命题是错误的. 当 $n=0$ 时, $6n+3=3$ 是素数. 因此, $n=0$ 是此命题的一个反例. ◇

若例 3.2 的命题改为:

若 $n$ 为正整数, 则 $6n+3$ 不是素数.

则此时命题是正确的.

本书在 10.3 节中出现过反例, 即 Peter Guthrie Tait 相信: 如果 $G$ 是一个 3 正则的, 3 连通的平面图, 那么 $G$ 是 Hamilton 的. 然而, William Tutte 构造了一个非 Hamilton 的 3 正则的, 3 连通的平面图 (Tutte 图).

## 3.3 逆否证法

我们已经知道, 蕴含关系 $P \Rightarrow Q$ 的逆否是 $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$. 由于这两个蕴含关系在逻辑上是等价的, 所以可通过证明 $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ 来证明 $P \Rightarrow Q$. 在 $P \Rightarrow Q$ 的一个**逆否证明 (proof by contrapositive)**中, 我们假设 $Q$ 是错误的, 接着证明 $P$ 也是错误的. 也就是说, $P \Rightarrow Q$ 的逆否证明就是其逆否 $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ 的直接证明. 下面给出一个逆否证法的例子.

**例 3.3** 设 $n \in \mathbf{Z}$. 若 $11n-5$ 是奇数, 则 $n$ 是偶数.

**证** 假设 $n$ 是奇数, 则存在某个整数 $k$, 使得 $n=2k+1$. 因此

$$11n-5=11(2k+1)-5=22k+11-5=22k+6=2(11k+3).$$

由于 $11k+3 \in \mathbf{Z}$ 是整数, 所以 $11n-5$ 是偶数. ■

本书的定理 4.1 就使用了逆否证法 (实际上使用了两次).

**定理 4.1** 设 $G$ 为一个连通图. $G$ 的边 $e$ 是割边当且仅当 $e$ 不在 $G$ 的任何一个圈上.

为了证明蕴含关系 "若 $G$ 的边 $e$ 是割边, 则 $e$ 不在 $G$ 的任何一个圈上", 我们采用了逆否证法, 即, 假设 $e$ 在 $G$ 的某个圈上, 接着证明 $e$ 不是割边. 为了证明充分性 "若 $e$ 不在 $G$ 的任何一个圈上, 则 $e$ 是割边", 我们也采用了逆否证法, 即, 假设 $e$ 不是割边, 接着证明 $e$ 在 $G$ 的某个圈上.

## 3.4 反证法

在证明数学命题 $S$ 的**矛盾证明** (proof by contradiction)中, 我们假设 $S$ 是错误的, 然后这将会导致矛盾. 这种证明方法通常简称为反证法. 若 $S$ 是一个蕴含关系 $P \Rightarrow Q$, 则假设 $P \Rightarrow Q$ 是错误的意味着 $P$ 是正确的, 而 $Q$ 是错误的. 下面给出反证法的一个例子.

**例 3.4** 设 $n$ 为正整数. 若 $n^3+1$ 是素数, 则 $n=1$.

**证** 设 $n^3+1$ 是素数, 并假设 $n \neq 1$. 因此 $n \geqslant 2$. 由于 $n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)$, 而且 $n+1>1$, $n^2-n+1=n(n-1)+1>1$, 所以可得 $n^3+1$ 不是素数, 导致矛盾. ■

通常用反证法来证明听起来含有否定意思的结果. 本书的定理 5.5 可以说明这一点.

**定理 5.5** 设 $G$ 是一个非平凡的连通图, 并且 $u \in V(G)$. 若 $v$ 是 $G$ 中一个离 $u$ 最远的顶点, 则 $v$ 不是 $G$ 的割点.

为了使用反证法, 设 $v$ 为 $G$ 中一个离 $u$ 最远的顶点, 并假设 $v$ 是 $G$ 的一个割点. 然后我们推出一个矛盾.

本书的如下定理同时用到了逆否证法与反证法.

**定理 5.1** 设 $v$ 是连通图 $G$ 中与割边关联的顶点. 则 $v$ 是 $G$ 的割点当且仅当 $\deg v \geqslant 2$.

采用逆否证法来验证蕴含关系 "若 $v$ 是 $G$ 的一个割点, 则 $\deg v \geqslant 2$." 因此, 我们假设 $\deg v=1$, 接着证明 $v$ 不是 $G$ 的割点. 用反证法来验证充分性 "若 $\deg v \geqslant 2$, 则 $v$ 是 $G$ 的一个割点". 所以, 我们假设 $\deg v \geqslant 2$, 并且 $v$ 不是 $G$ 的割点. 然后我们证明了该假设导致矛盾.

## 3.5 最小反例证法

在反证法中, 有一类是最小反例证法. 证明技巧通常与**良序原理** (The Well-Ordering Principle)有关. 正整数集合 **N** 是良序的, 即 **N** 的任一非空子集都有一个最小元素.

假设每个正整数都对应一个命题, 即有一个命题序列 $S_1, S_2, S_3, \cdots$. 我们想证明这些命题都是正确的. 假设它们不都是正确, 那么由良序原理, 存在一个最小的正整数 $n$, 使得 $S_n$ 是错误的. 我们的想法就是用这个信息获得一个矛盾. 下面给出一个最小反例证法的例子.

**例 3.5** 对每个正整数 $n$, $n^2-3n$ 是偶数.

**证** 假设此命题是错误的. 则在所有使得 $n^2-3n$ 是奇数的正整数 $n$ 中, 设 $m$ 是最小的一个. 若 $n=1$, 则 $n^2-3n=-2$ 为偶数. 因此, $m\geqslant 2$. 所以存在 $k$ $(1\leqslant k<m)$, 使得 $m=k+1$. 由于 $1\leqslant k<m$, 所以 $k^2-3k$ 是偶数. 因此, 存在某个整数 $x$, 使得 $k^2-3k=2x$. 注意到

$$\begin{aligned}m^2-3m&=(k+1)^2-3(k+1)=(k^2+2k+1)-3(k+1)\\&=(k^2-3k)+2k-2=2x+2k-2=2(x+k-1).\end{aligned}$$

由于 $x+k-1$ 是整数, 所以 $m^2-3m$ 是偶数, 导致矛盾. ■

本书定理 11.18 的证明采用了最小反例证法.

**定理 11.18** *每个阶为 $n\geqslant 3$ 且边数至少为 $\binom{n-1}{2}+2$ 的图都是 Hamilton 的.*

为了证明定理 11.18, 我们使用最小反例证法. 假设该命题是错误的, 则存在一个最小正整数 $n\geqslant 3$, 使得对于该整数 $n$, 有一个阶为 $n$ 且边数为 $\binom{n-1}{2}+2$ 的非 Hamilton 图 $G$. 接着我们证明了 $G$ 是 Hamilton 的, 得到矛盾.

## 3.6 归纳证法

假设每个正整数都对应一个命题, 即有一个命题序列 $S_1,S_2,S_3,\cdots$. 为了应用归纳证法来验证这些命题都是正确的, 我们采取以下步骤:

(1) 证明 $S_1$ 是正确的 (最基本的一步),

(2) 对于每个正整数 $k$, 证明蕴含关系 "若 $S_k$, 则 $S_{k+1}$".

下面给出一个归纳证法的例子.

**例 3.6** *对于每个正整数 $n$, $2^{n+2}\geqslant 7n+1$.*

**证** 我们用归纳来证明. 对于 $n=1$, 有 $2^{1+2}=2^3=8=7\cdot 1+1$, 此时命题成立. 假设对于某个整数 $k\geqslant 1$, $2^{k+2}\geqslant 7k+1$. 我们要证明 $2^{(k+1)+2}\geqslant 7(k+1)+1=7k+8$. 此时,

$$\begin{aligned}2^{(k+1)+2}&=2\cdot 2^{k+2}\geqslant 2(7k+1)=2(7k)+2\\&=7k+7k+2\geqslant 7k+7+2>7k+8,\end{aligned}$$

满足要求. ■

本书如下定理的证明使用了归纳证法.

**定理 4.4** *每个 $n$ 阶树都有边数 $n-1$.*

为了使用归纳, 我们首先证明, 对于 $n=1$, 命题是正确的. 然后证明: 若对任一正整数 $k$, $k$ 阶树的边数为 $k-1$, 则 $k+1$ 阶树的边数为 $k$.

本书还采用了标准数学归纳法的另一种形式. **第二数学归纳法**也可以用来证明命题 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 是正确的. 在此情形下, 我们需要

(1) 证明 $S_1$ 是正确的 (最基本的一步),

(2) 对每个正整数 $k$, 证明蕴含关系 "对所有整数 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 若 $S_i$, 则 $S_{k+1}$" 是正确的.

下面的定理使用了第二数学归纳证法.

**例 3.7** *每个整数 $n \geqslant 2$ 或者是素数, 或者能够表示成素数的乘积; 即, $n = p_1 p_2 \cdots p_m$, 其中 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 为素数.*

**证** 为了证明此分解的存在性, 我们使用第二数学归纳证法. 由于 2 是素数, 所以对于 $n = 2$, 命题成立.

对任一整数 $k \geqslant 2$, 假设每个 $i$ $(2 \leqslant i \leqslant k)$, 或者是素数, 或者能够表示成素数的乘积. 我们证明 $k+1$ 或者是素数, 或者能够表示成素数的乘积. 显然, 若 $k+1$ 是素数, 则命题成立. 假设 $k+1$ 是合数, 则存在整数 $a$ 和 $b$, 使得 $k+1 = ab$, 其中 $2 \leqslant a \leqslant k$, $2 \leqslant b \leqslant k$. 因此, 由归纳假设, $a$ 和 $b$ 是素数或者能够表示成素数的乘积. 在每种情形下, $k+1 = ab$ 都是素数的乘积. ■

本书的 Menger 定理 (定理 5.16) 使用了第二数学归纳证法.

**Menger 定理** *设 $u$ 和 $v$ 是 $G$ 中两个不邻接的顶点. 则在图 $G$ 中, $u-v$ 分离集中顶点的最小个数等于内部不相交的 $u-v$ 路的最大个数.*

我们使用第二数学归纳法证明 Menger 定理, 首先证明对于所有空图 (即边数为 0 的图), 该命题成立. 接着假设命题对于所有边数小于 $m$ 的图均成立, 其中 $m$ 为正整数. 然后证明对于每个边数为 $m$ 的图, 命题都成立.

## 3.7 存在性证法

数学的许多命题都以存在量词形式出现, 如, 存在、有、对某个、至少存在一个. 为了证明这种类型的命题, 列举一个适当的例子就足够了 (或者, 尽管没有找到适当的例子, 但能从理论上证明这样的例子必定存在, 也就足够了). 接下来举例说明.

**例 3.8** *存在大于 1 的整数 $a, b, c$, 使得 $a^2 + b^3 + c^4$ 是素数.*

**证** 设 $a = 7$, $b = c = 2$, 则 $a^2 + b^3 + c^4 = 49 + 8 + 16 = 73$ 是素数. ◇

大多数情形下, 存在量词出现在一个蕴含关系中. 下面的例子说明了这一点.

**例 3.9** *若 $\epsilon$ 为正数, 则存在正整数 $\delta$, 使得: 若 $|x-2| < \delta$, 则 $|(2x+3)-7| < \epsilon$.*

**证** 给定 $\epsilon$, 考虑 $\delta = \epsilon/2$, 并假设 $|x-2| < \delta$. 则

$$|(2x+3) - 7| = |2x - 4| = |2(x-2)| = 2|x-2| < 2(\epsilon/2) = \epsilon.$$ ■

设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义为：对所有 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=2x+3$. 例 3.9 可以有更一般的表述：对于任一正数 $\epsilon$, 存在正数 $\delta$, 使得若 $|x-2|<\delta$, 则 $|(2x+3)-7|<\epsilon$. 例 3.9 说明 $f$ 在 2 处是连续的.

本书的定理 2.7 出现了存在量词.

**定理 2.7** *对每个图 $G$ 以及每个整数 $r\geqslant\Delta(G)$, 存在含 $G$ 作为诱导子图的 $r$ 正则图 $H$.*

在定理 2.7 的证明中, 我们真正地构造了一个 $r$ 正则图 $H$, 使得所给的图 $G$ 是 $H$ 的一个诱导子图.

尽管可以通过一个例子 (反例) 来证明一个蕴含关系是错误的, 但要证明一个存在性命题是错误的, 必须要证明满足条件的每个情形都不存在).

**例 3.10** *存在一个素数 $p$, 使得：对每个正整数 $n$, $n^2-n+p$ 是素数.*

**解** 该命题是错误的. 设 $p$ 为素数, 并设 $n=p$. 则 $n^2-n+p=p^2-p+p=p^2$ 不是素数. ◇

# 奇数号习题的解答与提示

## 第 1 章　图与图模型

1.1　这 7 个委员会能够在 3 个时间段内集会吗? 可以. (需要进一步解释.)

1.3　见图 1.

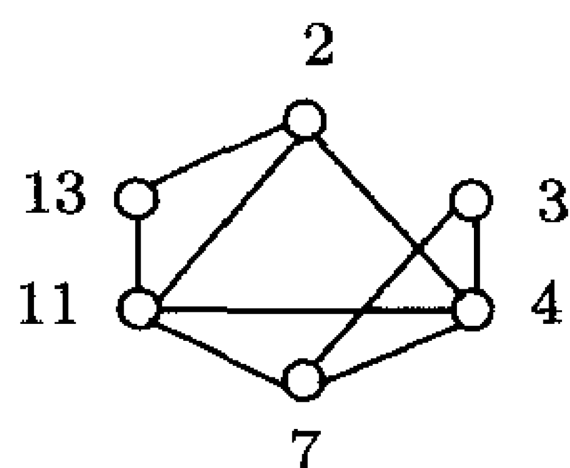



图 1　习题 1.3 中的图

1.7　(b) $S = \{$CUP, CAP, TAP, PAT, PUT$\}$　(c) $S = \{$RAT, TAR, TAP, CAP, CAT$\}$

1.11　见图 2.

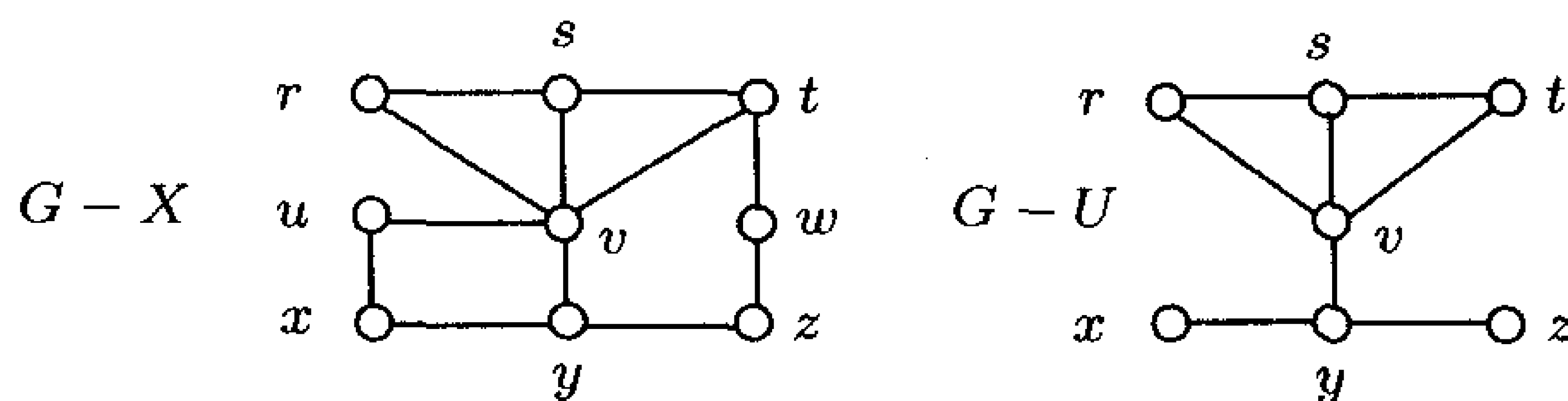



图 2　习题 1.11 中的图

1.13　(a) 图 $F$(如图 3 所示) 的阶 $n = 10$, 边数 $m = 8$.

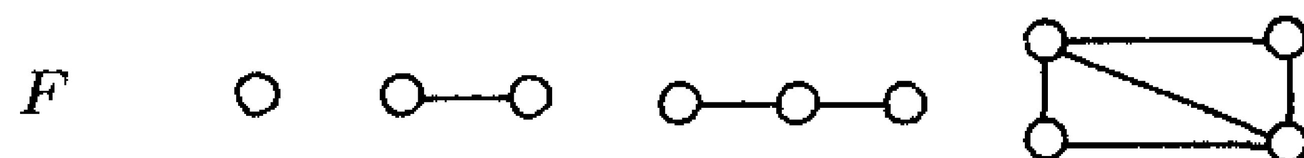



图 3　习题 1.13 中的图

(b) 最小边数为 6, 最大边数为 10.

1.15　提示: 只有 1 个这样的图.

1.17　(a) 提示: 假设产生相反的情形, 即存在连通图 $G$, 且 $G$ 包含两条最长且没有公共顶点的路 $P$ 和 $Q$. 由于 $G$ 是连通的, 所以存在一条 $u - v$ 路 $P'$, 其中 $u$ 在 $P$ 上, $v$ 在 $Q$ 上, 且 $P'$ 的内部顶点都不属于 $P$ 或 $Q$.

(b) 提示: 该命题是错误的.

1.19　提示: 不正确.

1.21　见图 4.

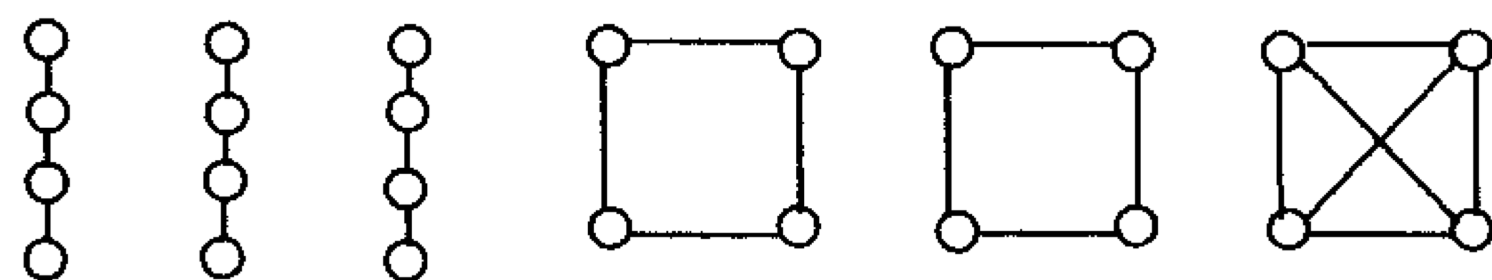


图 4　习题 1.21 中的图

1.23　(a) 对于 $k=1$, 考虑 5 圈 $u,v,x,w,y,u$; 对于 $k=2$, 考虑 5 圈 $u,x,y,v,z,u$.

(b) 提示: 注意到 $k\geqslant 3$. 考虑 $P_4: u,x,y,v$.

1.25　**证**　若 $G$ 不是二部的, 则我们得到了所需要的结果. 因此, 我们可以假设 $G$ 是二部的. 设 $V_1$ 和 $V_2$ 为 $G$ 的两个部集. 由于 $G$ 的阶至少为 5, 所以 $V_1$ 和 $V_2$ 中至少有一个含有 3 个或多于 3 个顶点, 不妨设 $|V_1|=k\geqslant 3$. 又因为 $\overline{G}$ 的由 $V_1$ 所诱导的子图是完全图 $K_k$, 并且 $k\geqslant 3$, 所以可得 $\overline{G}$ 含有一个三角形. 根据定理 1.12, $\overline{G}$ 不是二部的. ■

1.27　(a) $K_5+K_2\cong K_7$, $K_5\times K_2$ 如图 5(a) 所示.

(b) $\overline{K}_5+\overline{K}_3\cong K_{5,3}$, $\overline{K}_5\times\overline{K}_3\cong\overline{K}_{15}$.

(c) $C_5+K_1$ 如图 5(b) 所示, $C_5\times K_1\cong C_5$.

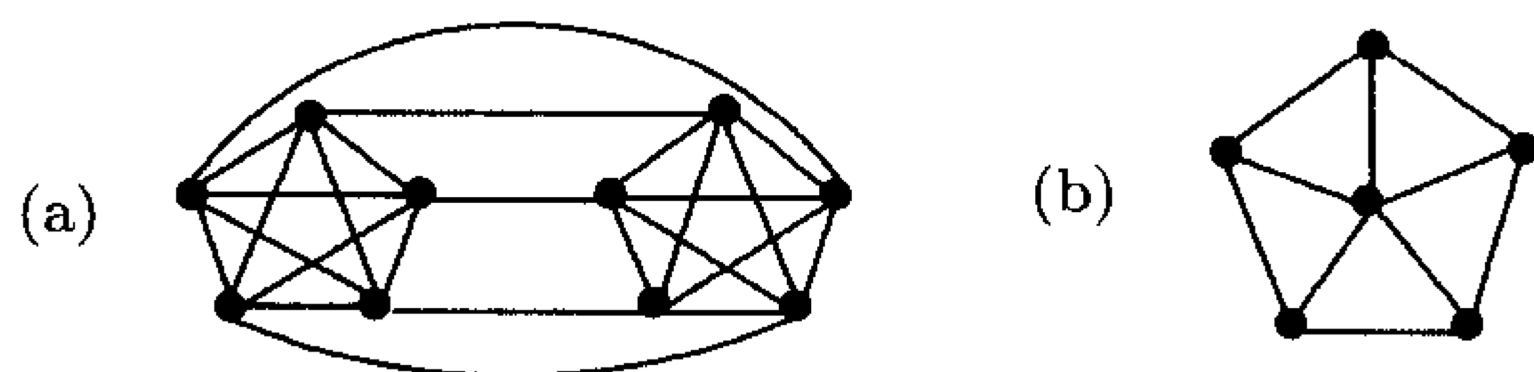



图 5　习题 1.27 中的图

1.29　(a) 见图 6 中的多重图.　(b) 在顶点 2 处加一个环.

1.33　见图 6 中的有向图 $D$.

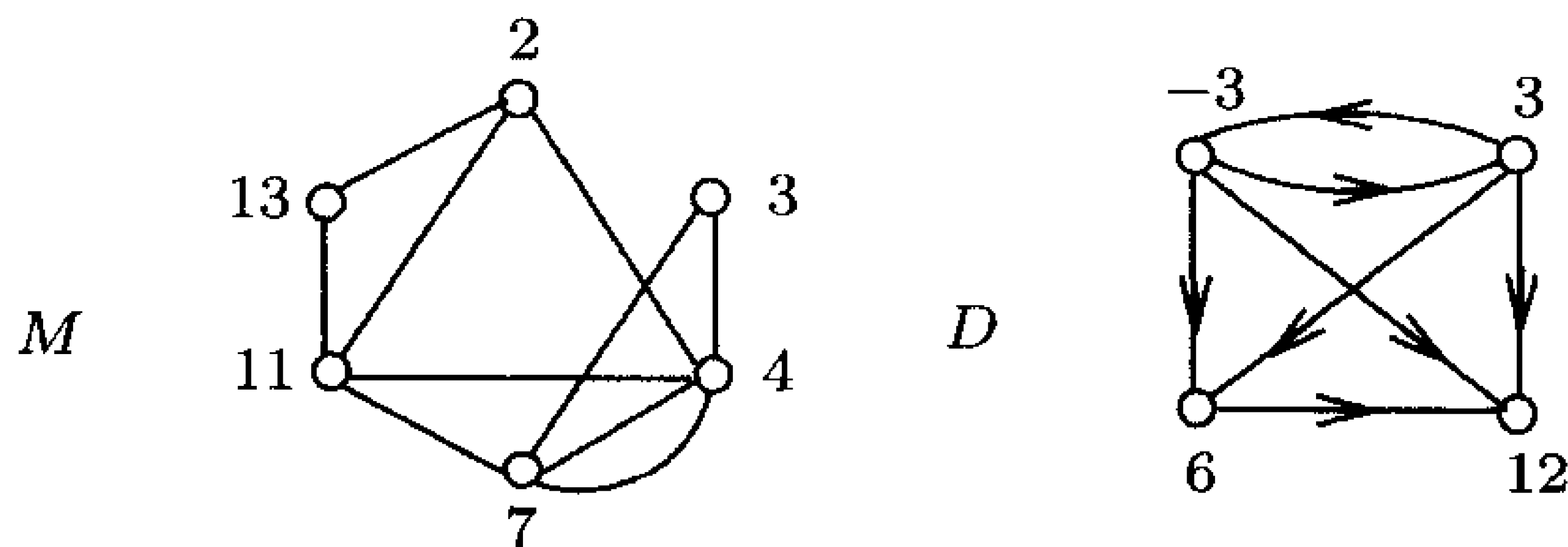



图 6　习题 1.29 和习题 1.33 中的多重图和有向图

## 第 2 章 度

2.1 (a) 不存在. 由推论 2.3, 不存在包含奇数个奇点的图.

(b) 不存在. 因为对于任意 7 阶图, $\Delta(G) \leqslant 6$.

(c) 不存在. 假设存在这样的图 $G$, 设 $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. 我们可以假设 $\deg v_i = 3$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, $\deg v_4 = 1$. 因而, 顶点 $v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 邻接于 $G$ 中除自身之外的所有顶点, 当然包含 $v_4$, 导致矛盾.

2.3 **解** 设该图中有 $x$ 个度为 4 的顶点. 由图论第一定理, $(12-x)\times 6+4x = 2\times 31$, 解得 $x = 5$. ◇

2.5 **解** 设该图中有 $x$ 个度为 5 的顶点. 由图论第一定理, $(12-x)\times 3+2\times 4+5x+6\times 11 = 2\times 62$, 解得 $x = 7$. ◇

2.7 $G$ 的边数为 $3|U| = 3\times 12 = 36$. 设 $G$ 中有 $x$ 个度为 2 的顶点, 则 $2x+(10-x)\times 4 = 36$, 解得 $x = 2$.

2.9 **证** 假设这两个奇点位于 $G$ 的不同连通分支内. 则 $G$ 的某个连通分支 (本身作为一个图) 仅包含一个奇点, 与推论 2.3 矛盾. ■

2.11 是的. 考虑 $G = K_5 \cup K_5$, 其阶 $n = 10$, $\delta(G) = 4 = (n-2)/2$.

2.13 (a) **证** 假设 $G$ 至少含有三个连通分支, 分别记为 $G_1$, $G_2$ 和 $G_3$. 设 $v_i \in V(G_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$. 由于 $\deg v_i \geqslant (n-2)/3$, 则每个连通分支 $G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 至少包含 $(n-2)/3+1 = (n+1)/3$ 个顶点. 则 $G$ 至少包含 $3\cdot(n+1)/3 = n+1$ 个顶点, 与 $G$ 的阶为 $n$ 矛盾. ■

**另一种证明** 假设 $G$ 至少含有三个连通分支. 则 $G$ 含有一个阶至多为 $n/3$ 的连通分支 $G_1$. 设 $v \in V(G_1)$. 则 $\deg v \leqslant (n/3)-1 = (n-3)/3$, 与 $\delta(G) \geqslant (n-2)/3$ 矛盾 ■

(b) 考虑 $G = 3K_3$.

2.15 **证** 假设 $G$ 不是二部图, 则 $G$ 包含奇圈 $C$. 设 $u$ 和 $v$ 是 $C$ 上任意两个顶点, 则 $C$ 上存在两条 $u-v$ 路, 其中一条的长度为奇数, 另一条长度为偶数. ■

2.17 **证** 假设 $G$ 包含顶点 $x$, 其中 $\deg x \equiv 0 \pmod 3$. 由于 $G$ 是连通的, 则 $G$ 包含一条 $w-x$ 路, 记为 $P: w = w_0, w_1, \ldots, w_k = x$. 设 $t$ 为使得 $\deg w_t \equiv 0 \pmod 3$ 的最小正整数, 则 $\deg w_{t-1} \not\equiv 0 \pmod 3$. 然而, $\deg w_{t-1} + \deg w_t \not\equiv 0 \pmod 3$, 导致矛盾. ■

2.21 对于 (a) 和 (b), 见图 7.

(c) 找到 Petersen 图的四个具有**最大阶数**的诱导子图 $F_0, F_1, F_2, F_3$, 其中 $F_r$ 是 $r$ 正则图 $(0 \leqslant r \leqslant 3)$.

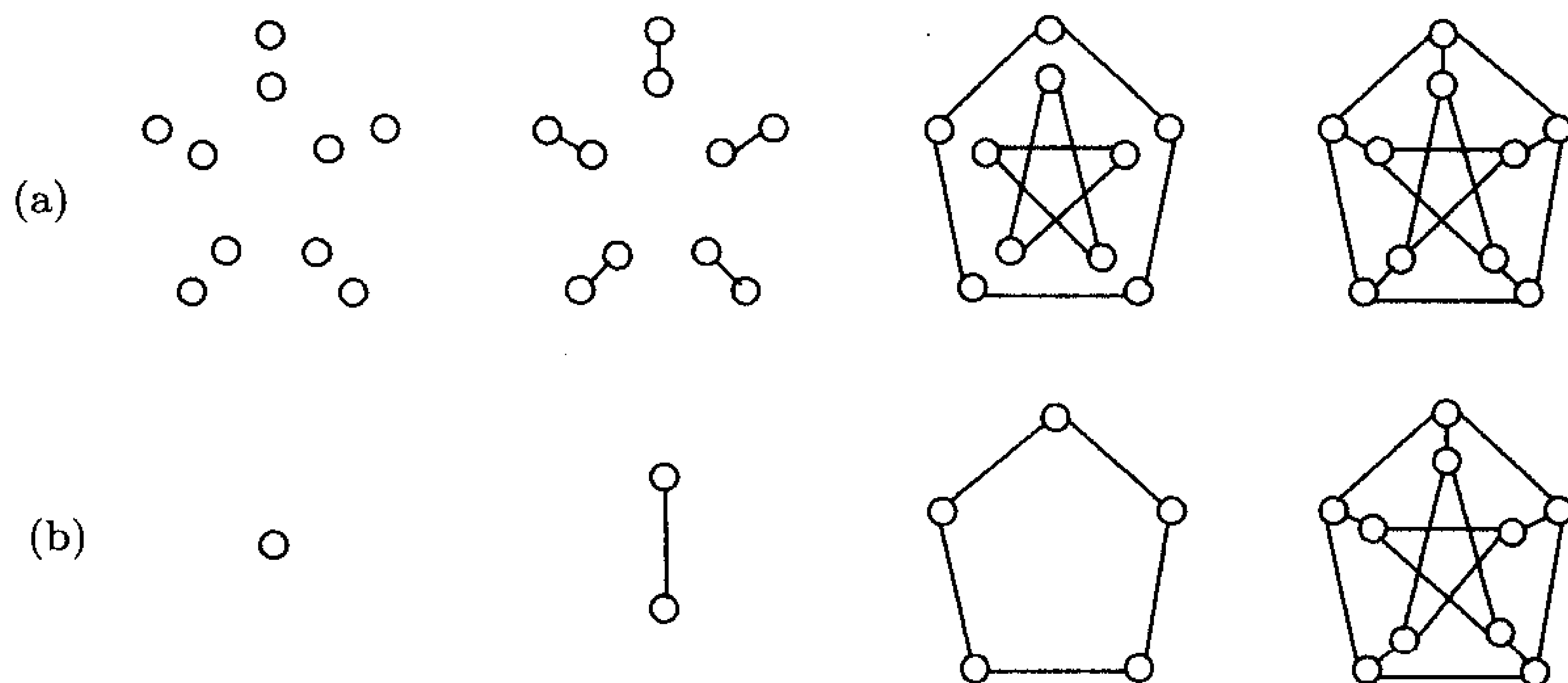



图 7　习题 2.21 的图

2.23　见图 8.

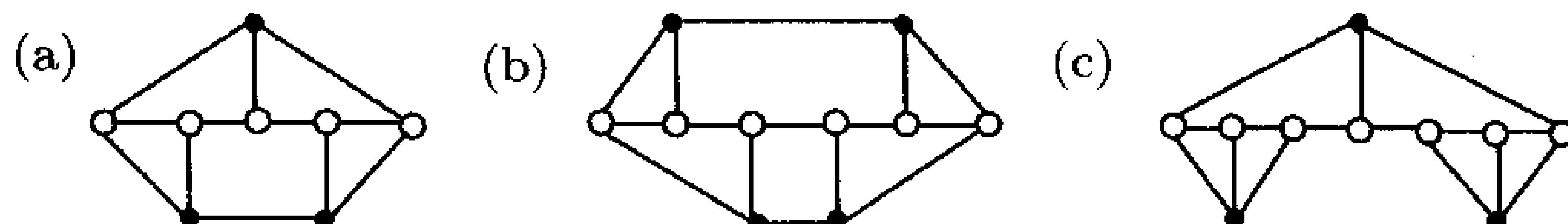



图 8　习题 2.23 的图

2.25　(a) 由于 $G-v$ 是 3 正则的, 且 $G-v$ 的阶为偶数, 则 $G$ 的阶为奇数.

2.27　$G$ 的边数为 $r|U|=r|W|$. 两边同除以 $r$, 得到 $|U|=|W|$.

2.29　(a) 设 $v$ 为 $G$ 的任一顶点, 记 $\deg_G v=k$, 则 $\deg_{\overline{G}} v=n-1-k$. 因此,

$$\delta(G)+\delta(\overline{G})\leqslant k+(n-1-k)=n-1.$$

(b) **证**　假设 $G$ 是 $r$ 正则的, 则 $\overline{G}$ 是 $(n-1-r)$ 正则的. 因而, $\delta(G)=r$, $\delta(\overline{G})=n-1-r$. 故 $\delta(G)+\delta(\overline{G})=n-1$.

另一方面, 假设 $G$ 不是正则的, 则 $G$ 包含两个顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $a=\deg_G u<\deg_G v=b$. 此时, $\deg_{\overline{G}} v=n-1-b$, $\delta(\overline{G})\leqslant n-1-b$. 因此,

$$\delta(G)+\delta(\overline{G})\leqslant a+(n-1-b)=n-1-(b-a)<n-1. \qquad \blacksquare$$

2.31　提示: 对于 $n$ 阶图 $G$ 的一个顶点 $v$, $\deg_G v+\deg_{\overline{G}} v=n-1$. 因而, 若 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ 为 $n$ 阶图 $G$ 的度序列, 则 $(n-1)-d_1,(n-1)-d_2,\ldots,(n-1)-d_n$ 为 $\overline{G}$ 的度序列.

2.33　提示: 若存在度序列为 $x,1,2,3,5,5$ 的图 $G$, 则 $G$ 的阶为 6. 由于 $G$ 含有两个度为 5 的顶点, 则 $\delta(G)\geqslant 2$. 因而, $G$ 中不可能含有度为 1 的顶点.

2.35　提示: 若存在度序列为 $x, 7, 7, 5, 5, 4, 3, 2$ 的图 $G$, 则 $\delta(G) \geqslant 2$. 由于每个图奇点的个数为偶数, 则 $x$ 必为奇数. 故 $x$ 可能的值仅为 3, 5, 7. 利用 Havel-Hakimi 定理可以证明 $x = 5$, $x = 3$.

## 第 3 章　同构图

3.1　见图 9.

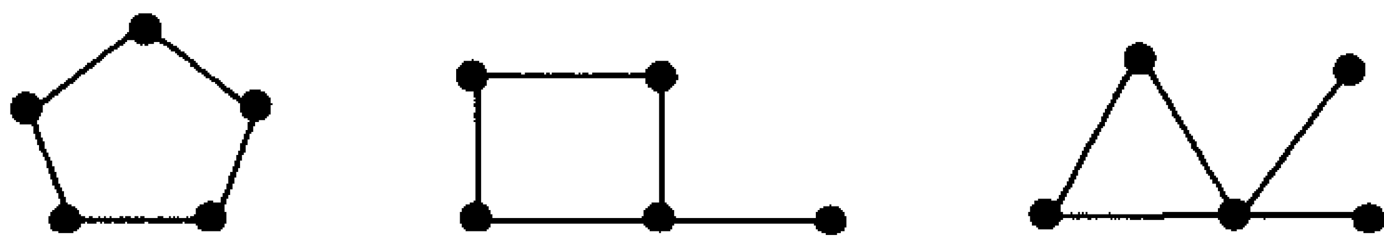


图 9　习题 3.1 的图

3.3　(a) $G_1 \ncong G_2$,　(b) $G_1 \cong G_2$.

3.5　从这些信息中我们不能得出 $G_1 \ncong G_2$. 例如, 除 $v_2$ 外, $G_2$ 中存在度为 3 的顶点使其邻接于某个度为 2 的顶点. 见图 10.

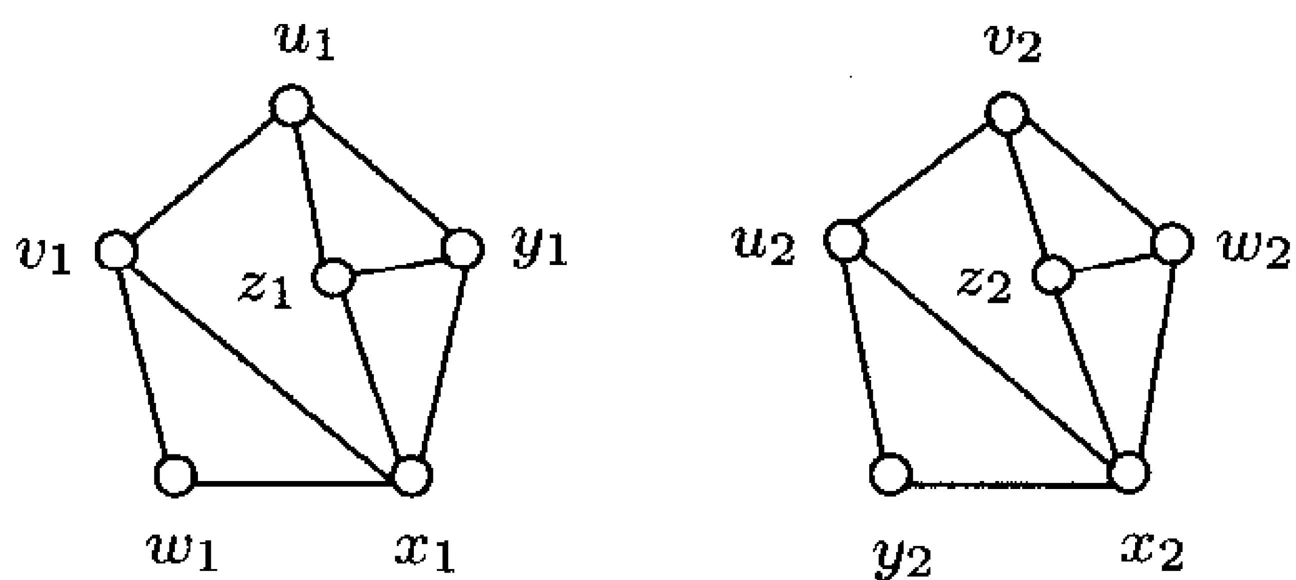



图 10　习题 3.5 的图

3.7　解法不正确. 事实上, $G_1 \cong G_2$. 因为在长度为 5 的圈的内部没有长度为 2 的路是图中 $G_2$ 所独有的性质.

3.9　图 $G_1$ 和 $G_2$ 不同构. 例如, $G_1$ 中两个度为 2 的顶点是邻接的, 而 $G_2$ 中两个度为 2 的顶点却不邻接.

3.11　**证**　假设 $|W| = a$. 则 $|U| = a$. 由于顶点 $v \in W$, 因此 $\deg_G v \geqslant n/2$. 从而, $\deg_{\overline{G}} v = n-1-\deg_G \leqslant n/2-1$. 因为在 $G$ 中有 $a$ 个顶点 $v$ 满足 $\deg_G v \geqslant n/2$, 所以在 $G$ 中也有 $a$ 个顶点 $v$ 满足 $\deg_G v \leqslant n/2-1$. 又由于在 $G$ 中有 $a$ 个顶点 $v$ 满足 $\deg_G v \leqslant n/2$, 所以在 $G$ 中没有满足 $\deg_G v = n/2$ 的顶点 $v$. ■

3.13　两个图 $G$ 和 $H$ 是同构的.

**证**　映射 $\phi$ 是一一的和映上的. 考虑 $G$ 的任意两个顶点 $u$ 和 $v$, 有 $uv \in E(G)$ 或者 $uv \notin E(G)$. 首先假设 $uv \in E(G)$, 因此 $d_G(u,v) = 1$. 由于 $d_H(\phi(u), \phi(v)) = 1$, 故在 $H$ 中 $\phi(u)$ 与 $\phi(v)$ 邻接. 接下来, 假设 $uv \notin E(G)$. 因为 $d_G(u,v) \geqslant 2$, 我们有 $d_H(\phi(u), \phi(v)) \geqslant 2$. 即, 如果 $u$ 和 $v$ 在 $G$ 中不邻接, 则 $\phi(u)$ 和 $\phi(v)$ 在 $H$ 中也不邻接. 因此 $\phi$ 是一个同构. ■

3.15 这种说法是错误的. 设 $G_1 \cong P_3 : u_1, v_1, w_1$, $G_2 \cong P_3 : u_2, v_2, w_2$. 则 $G_1 \cong G_2$. 定义一一映射 $\phi : V(G_1) \to V(G_2)$, 其中 $\phi(u_1) = u_2$, $\phi(v_1) = w_2$, $\phi(w_1) = v_2$. 则 $d_{G_1}(u_1, v_1) = 1$, 所以 $d_{G_2}(\phi(u_1), \phi(v_1)) = d_{G_2}(u_2, w_2) = 2$.

3.17 (a) 是, (b) 否, (c) 是.

3.19 构造图 $G$, 其中 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, 且 $v_iv_j \in E(G)$ 当且仅当 $G_i$ 同构于 $G_j$. 因为 $G$ 是一个图, 所以它含有偶数个奇点.

## 第 4 章 树

4.1 考虑图 $G$, $G$ 是由图 $K_3(V(K_3) = \{v_1, v_2, v_3\})$ 通过增加两个新的顶点 $x$ 和 $y$, 以及两条边 $v_1x$ 和 $v_2y$ 所获得.

4.3 **证** 由于 $e = uv$ 为边, 所以 $G$ 含有 $u - v$ 路 $P : u, v$. 我们来证明 $P$ 是 $G$ 中唯一的 $u - v$ 路. 假设 $G$ 含有另一条 $u - v$ 路 $P'$. 因为 $P' \neq P$, 所以路 $P'$ 至少含有 3 个顶点. 又因为 $u$ 和 $v$ 为 $P'$ 的两个端点, 并且 $P'$ 是路, 所以 $u, v \notin V(P') - \{u, v\}$, 从而 $e \notin E(P')$. 因此, $P'$ 与 $e = uv$ 构成了一个含有 $e$ 的圈, 与 $e$ 为 $G$ 的一条割边相矛盾. ■

4.5 (a) $G$ 的边数为 $n - 1$. 提示: 若 $e_1$ 为 $G$ 的一条边, 则 $G_1 = G - e_1$ 含有 2 个连通分支; 若 $e_2$ 为 $G$ 的一条边, 则 $G_2 = G_1 - e_2$ 含有 2 个连通分支.

(b) $G$ 的边数为 $n - k$.

4.7 (a) 存在 3 个 5 阶树.

(b) 存在 6 个含有 1 个连通分支的 6 阶林, 6 个含有 2 个连通分支的 6 阶林, 4 个含有 3 个连通分支的 6 阶林, 2 个含有 4 个连通分支的 6 阶林, 1 个含有 5 个连通分支的 6 阶林, 1 个含有 6 个连通分支的 6 阶林. 因此存在 20 个 6 阶林.

4.9 对于 $n \geqslant 4$, 设 $G \cong C_{n-1} \cup K_1$.

4.11 提示: $T_2 \cong P_4$.

4.13 设 $x$ 是度为 5 的顶点个数. 因此, $T$ 有 $21 - 15 - 1 - x = 5 - x$ 个度为 3 的顶点. 由于 $T$ 的边数为 $21 - 1 = 20$, 所以根据图论第一定理, $\sum_{v \in V(T)} \deg v = 15 + 6 + 5x + 3(5 - x) = 2 \times 20$. 因此, $x = 2$.

4.15 设 $x$ 是度为 2 的顶点个数. 则 $T$ 的阶为 $n = 50 + 4x$. 因此,$m = 49 + 4x$. 求度和, 我们得到 $50 \times 1 + 2x + 3x + 4x + 5x = 2(49 + 4x)$, 因此 $x = 8$. 从而, $n = 50 + 4 \times 8 = 82$.

4.17 (a) 图 $T$ 是含有两个度为 4 的顶点的双星.

(b) 设 $T$ 为 $n$ 阶树, 其中 75% 顶点的度为 1, 余下 25% 顶点的度为 4. 则有 $(3n/4) \times 1 + (n/4) \times 4 = 2(n - 1)$. 对 $n$ 求解, 得到 $n = 8$. 因此, $T$ 为 (a) 中的双星.

(c) $T$ 为 $n$ 阶树, 其中 75% 顶点的度为 1, 余下 25% 顶点具有固定度 $x$. 则有 $(3n/4)\times 1+(n/4)\times x=2(n-1)$. 可得 $n(5-x)=8$, 意味着 $x\leqslant 4$. 因此, $x=2,3,4$. 由于 $n$ 为整数, 所以 $x\neq 2$. 因此, $x=3$ 或者 $x=4$. 若 $x=3$, 则 $n=4$, $T=K_{1,3}$; 若 $x=4$, 则 $n=8$, $T$ 为 (a) 中的双星.

4.19 (a) 提示: 由 $n=\sum_i n_i$ 与 $2(n-1)=2m=\sum_i in_i$, 可得 $2\left(\sum_i n_i-1\right)=\sum_i in_i$, 从而 $2\sum_i n_i-2=\sum_i in_i$. 因此, $2\sum_i n_i-\sum_i in_i=\sum_i(2-i)n_i=2$. 特别地, 我们有 $n_1=\sum_{i\neq 1}(i-2)n_i+2=n_3+2n_4+\cdots+2$.

(b) $n_1=5+2\times 2+2=11$.

4.21 图 $\overline{C}_{n+2}$ 是 $(n-1)$ 正则的. 由于 $\delta(\overline{C}_{n+2})=n-1$, 所以由定理 4.9 可得 $T$ 同构于 $\overline{C}_{n+2}$ 的一个子图.

4.23 **解** $T\cong K_1$ 或 $T\cong P_4$.

**证** 设树 $T$ 的阶为 $n$. 由于 $T$ 和 $\overline{T}$ 都是 $n$ 阶树, 所以可得 $T$ 和 $\overline{T}$ 的边数均为 $n-1$. 所以, $n-1+n-1=2(n-1)=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$. 从而 $4(n-1)=n(n-1)$, 所以 $(n-1)(n-4)=0$, 意味着 $n=1$ 或 $n=4$. 若 $n=1$, 则 $T\cong K_1$; 若 $n=4$, 则 $T\cong P_4$ 或 $T\cong K_{1,3}$. 因为 $\overline{P_4}\cong P_4$, $\overline{K}_{1,3}$ 不是树, 所以 $T\cong P_4$. ■

4.25 (a) $G$ 中存在 8 个生成树; 2 个非同构的生成树.

(b) $H$ 中存在 9 个生成树; 3 个非同构的生成树.

4.27 见图 11 所示的例子.

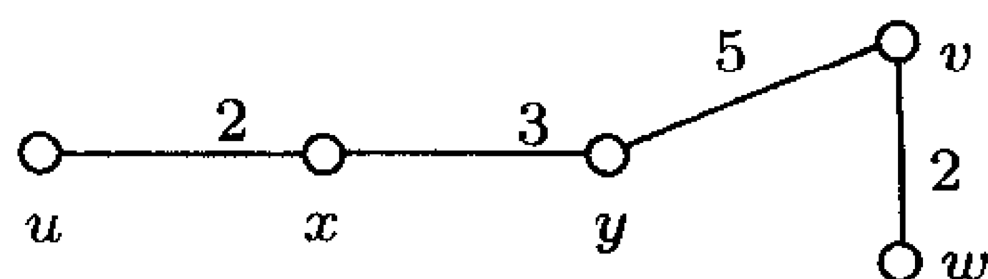



图 11 习题 4.27 中的图

4.29 提示: 由 Kruskal 算法, 每个步骤中, 对于所要选择的边只存在唯一的选择.

4.31 对于 $k=2$, 设 $G=C_3$ 具有权值 1,2,2. 对于 $k\geqslant 3$, 设 $G=C_k$ 使得 $G$ 的每条边都具有相同的权值.

## 第 5 章 连通度

5.1 (a) 每个非平凡的树均具有这样的性质.

(b) 对于图 12 所示的三个图, $v$ 均是割点.

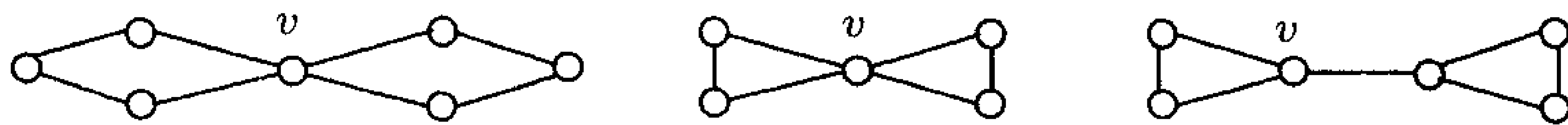



图 12 习题 5.1(b) 的图

5.3　陈述 (a)~(d) 均是错误的.

(a) $G$ 为图 12 中的某个图.

(b) $v$ 为图 $G$ 的一个端点.

(c) $G \cong K_{1,n-1}$ $(n \geqslant 3)$.

(d) 每个 $n$ 阶树均含有 $n-1$ 条割边和至多 $n-2$ 个割点.

5.5　(a) $G \cong K_{1,12}$.

(b) $G$ 为图 12 前两个图中的某个.

(c) $G$ 为图 12 前两个图中的某个.

(d) $G \cong K_2$.

5.7　**证**　设 $x$ 和 $y$ 为 $T$ 的两个顶点, 且 $d(x,y) = \mathrm{diam}(T) \geqslant 2$. 由定理 5.5, $x$ 和 $y$ 均不是割点, 则 $x$ 和 $y$ 是 $T$ 的端点. 设 $v$ 为 $x-y$ 测地线 $P$ 上邻接于 $y$ 的那个顶点, 则 $v$ 是割点. 假设命题不成立, $v$ 邻接于两个割点, 则这两个顶点必有一个不在 $P$ 上, 记为 $w$. 因而,$G-w$ 存在一个包含顶点 $z$ 的连通分支, 其中 $z$ 不位于 $P$ 的 $x-v$ 子路上. 由于 $T$ 中 $x-z$ 路是唯一的, 则这条路的长度为 $d(x,z) = d(x,y)+1 = \mathrm{diam}(T)+1$, 导致矛盾. ■

5.9　$G$ 的割点为 $r,t,w$, 割边为 $qr,tw$. $G$ 的块如图 13 所示.

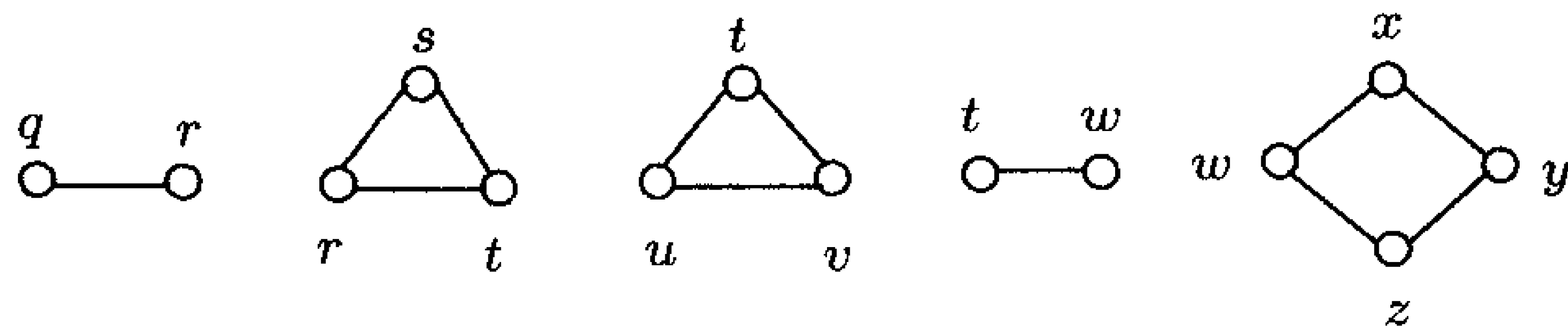



图 13　习题 5.9 中的图

5.11　**证**　由推论 2.5, $G$ 是连通的. 因而, 我们只需证明 $G$ 中不存在割点即可. 设 $v \in V(G)$, $u$ 和 $w$ 是 $G$ 中任意两个不同于 $v$ 的顶点. 下面证明 $G$ 中存在一条不包含 $v$ 的 $u-w$ 路. 若 $uw \in E(G)$, 命题显然成立. 因此, 我们可以假设 $u$, $w$ 不邻接. 根据题意, $u$ 的邻域 $N(u)$ 和 $w$ 的邻域 $N(w)$ 均至少包含 $n/2$ 个顶点. 由于 $G$ 的阶为 $n$, 则 $N(u) \cap N(w)$ 中至少包含两个顶点. 这两个顶点中至少有一个不是 $v$, 记为 $x$. 故 $u,x,w$ 是不包含 $v$ 的 $u-w$ 路. ■

5.13　陈述是错误的, 如图 14 所示.

5.15　提示: 设 $B$ 是 $G$ 的不可分子图, 且 $B$ 不是 $G$ 的其他任意不可分子图的真子图. 设 $e$ 和 $f$ 为 $B$ 的两条边. 下面我们证明: $e=f$, 或 $e$,$f$ 位于 $G$ 的同一个圈上. 假设 $e \neq f$. 设 $C$ 是包含 $e$ 的一个圈. 若 $f$ 位于 $C$ 上, 则命题得证. 否则, 在 $B$ 中存在一条 $u-v$ 路 $P: u=u_0, u_1, \cdots, u_k=v$, 其中 $f=u_0u_1$, 且对于 $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $u_i$ 不在 $C$ 上. 由于 $u_k$ 不是 $B$ 的割点, 则存在不含 $u_k$ 的

$u_{k-1}-w$ 路 $P'$, 使得 $w$ 是 $P'$ 中唯一一个位于 $C$ 上的顶点.(下面只需证明 $B$ 中存在一个包含 $e$ 和 $u_{k-1}u_k$ 的圈即可.)

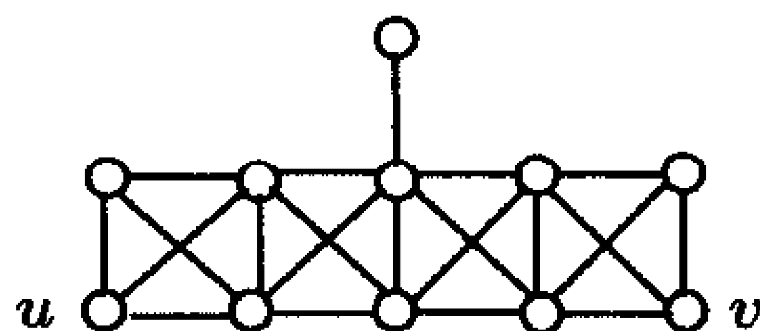



图 14　习题 5.13 中的图

另一方面, 设 $B$ 是由等价类中的边所诱导的子图, 其中该等价类是由定理 5.8 中定义的等价关系形成的. 下证 $B$ 是 $G$ 的不可分子图, 且不是 $G$ 的其他任意不可分子图的真子图. 若 $B$ 仅包含一条边, 命题显然成立. 因此, 我们可以假设 $B$ 的阶至少为 3. 因为 $B$ 的任意两条边共圈, 所以 $B$ 是连通的. 设 $w$ 是 $B$ 的一个顶点. (若 $w$ 是 $B$ 的割点, 则存在邻接于 $w$ 的两个顶点 $u$ 和 $v$, 使得每条 $u-v$ 路均包含 $w$, 矛盾.) 因而, $w$ 不是割点, 故 $B$ 是不可分的.(下面只需证明 $B$ 不是 $G$ 的其他任意不可分子图的真子图即可.)

5.17　连通图 $G$ 的顶点割 $U$ 称为是**极小的 (minimal)**, 若 $U$ 的任一真子集均不是 $G$ 的顶点割. 因此, 最小顶点割是极小的, 但反之不成立. 问题: 在 $G$ 中极小顶点割的最大基数是多少?

5.19　陈述是错误的, 例如:$G \cong K_1+(K_1\cup K_2)$.

5.21　(a) $G\cong C_5$.

(b) 不存在这样的图.

(c) $G\cong C_5$.

(d) 不存在这样的图.

5.23　(a) **证**　设 $H=G+K_1$, $v$ 是 $H$ 一个顶点, 且 $v$ 不在 $G$ 中. 下面, 我们证明 $\kappa(H)\geqslant k+1$. 设 $S$ 是 $H$ 顶点集的子集, 且 $|S|=k$. 考虑下面两种情形:

**情形 1**　$v\notin S$. 由于 $G$ 的每个顶点在 $H$ 中均邻接于 $v$, 则在 $H-S$ 中的每个顶点均邻接于 $v$, 故 $H-S$ 是连通的.

**情形 2**　$v\in S$. 在该情形下, $H-S=G-(S-\{v\})$. 由于 $\kappa(G)\geqslant k$, $|S-\{v\}|=k-1$, 则 $G-(S-\{v\})$ 是连通的.

在上述两种情形中, $S$ 均不是 $H$ 的顶点割. 因而, 在 $H$ 中移除 $k$ 个 (或少于 $k$ 个) 顶点不会导致 $H$ 不连通. 故 $\kappa(H)\geqslant k+1$, 即 $H$ 是 $(k+1)$–连通的. ■

(b) 提示: 利用类似于 (a) 的方法讨论.

5.25　(a) 如图 15(a) 所示.

(b) 不存在这样的图.

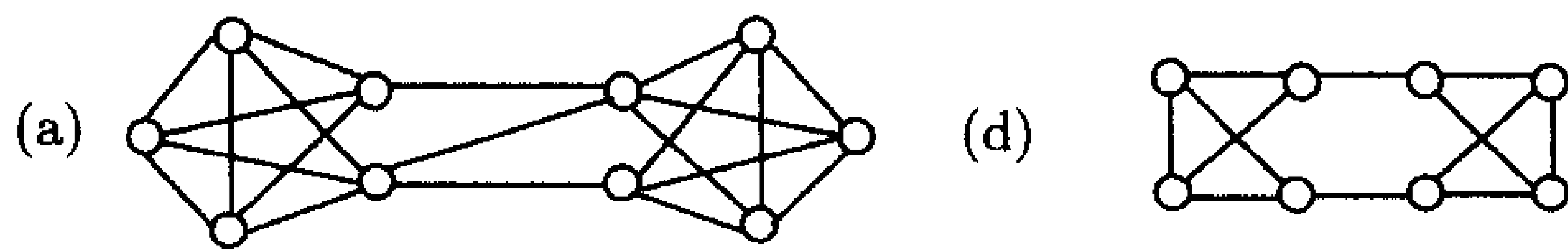



图 15 习题 5.25(a), (d) 中的图

(c) 不存在这样的图.

(d) 如图 15(d) 所示.

5.27 (a) 提示: 设 $G$ 是一个连通度为 $k \geqslant 1$ 的 (连通) 图, 则 $G$ 中存在一个不是割点的顶点 $v_1$. 因而, $G_1 = G - v_1$ 是连通的. 设 $v_2$ 是 $G_1$ 中一个不是割点的顶点.

(b) 提示: 答案依赖于 $k$ 和 $G$.

(c) 陈述是错误的, 考虑 $G \cong K_{1,3}$.

(d) 陈述是正确的.

**证** 假设存在顶点割 $W$, 使得 $v \notin W$. 由于 $v$ 与 $G - W$ 中每个顶点均邻接, 则 $G - W$ 是连通的, 导致矛盾. ■

(e) 提示: 陈述是正确的.

5.29 (a) 设 $G \cong P_3 \times K_2$. (b) 设 $G \cong K_{2,3}$.

5.31 (a) $k = 2 = \lambda(G) - 1$. (b) $k = 1 = \kappa(G) - 1$.

5.33 **证** 由于 $G$ 是 5 连通的, 则 $G - w$ 是 4 连通的. 因此, $G - w$ 中存在四条内部不相交的 $u - v$ 路, 且每两条路可构成一个圈. 记 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 为上述四条 $u - v$ 路, $C$ 为由 $P_1$ 和 $P_2$ 构成的圈, $C'$ 为由 $P_3$ 和 $P_4$ 构成的圈. 圈 $C$ 和 $C'$ 仅有 $u, v$ 两个公共顶点. 由于圈 $C$ 和 $C'$ 在 $G - w$ 中, 故它们均不包含 $w$. ■

5.35 **证** 在图 $G$ 上添加一个新的顶点 $w$, 再连接 $w$ 到 $v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 按上述方法构造的图记为 $H$. 由于 $G$ 是 $k$ 连通的, 由推论 5.18, 则 $H$ 也是 $k$ 连通的. 由定理 5.17, $H$ 中存在 $k$ 条内部不相交的 $u - w$ 路. 这些路是图 $G$ 的内部不相交的 $u - v_i$ 路 $(1 \leqslant i \leqslant k)$. ■

5.37 提示: $\kappa(Q_n) = \lambda(Q_n) = n$.

## 第 6 章 可遍历性

6.1 **解** 多重图 $M$ 可以作为此情形的模型, 其中 $V(M)$ 是房子构成的全体, 并且 $M$ 的两个顶点之间的边数等于这两个房子之间门的数目. 因为 $M$ 是连通的并且恰好含有两个奇度顶点 (R3 和 R6), 所以 $M$ 含有一条 Euler 迹. 并且这条道路可能始于 R3 止于 R6, 也可能始于 R6 止于 R3. ◇

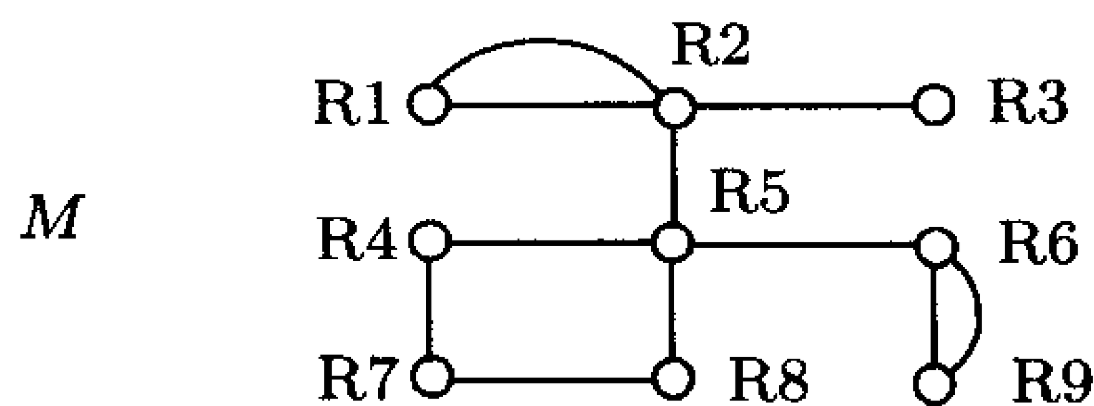



图 16 习题 6.1 中的多重图 $M$

6.3 **证** 设 $G_i$ 是阶为 $n_i$ $(i=1,2,3)$ 的 $r_i$ 正则图. 因为 $G_1$ 是 Euler 的, 所以 $r_1$ 是偶数. 又由于 $\overline{G}_1$ 是 Euler 的, 所以 $n_1-r_1-1$ 是偶数. 因此 $n_1$ 是奇数. 因为 $G_2$ 不是 Euler 的, 所以 $r_2$ 是奇数, 从而 $n_2$ 是偶数. 类似地, $r_3$ 是奇数,$n_3$ 是偶数. 注意到

(1) $G$ 中 $G_1$ 的每个顶点的度为偶数 $r_1+n_2+n_3$,

(2) $G$ 中 $G_2$ 的每个顶点的度为偶数 $r_2+n_1+n_3$,

(3) $G$ 中 $G_3$ 的每个顶点的度为偶数 $r_3+n_1+n_2$.

因为 $G$ 是连通的, 并且其每个顶点的度是偶数, 所以 $G$ 是 Euler 的. ■

6.5 设 $G \cong K_5 - e$.

6.7 **解** (b) 正确. 因为 $n$ 是奇数, 所以 $r$ 和 $n-1-r$ 都是偶数. 在 $H$ 中, $G$ 的每个顶点的度为 $r+2$, $\overline{G}$ 的每个顶点的度为 $(n-1-r)+2$, 并且这两个数都是偶数, 故顶点 $u$ 和 $v$ 的度均为 $2n+1$. 因此 $H$ 是恰好有两个奇度顶点的连通图. ◇

6.9 **解** 假设相反, 则 $V(G)$ 中存在一个非空子集 $S$, 使得 $k(G-S)>|S|$. 因为 $G$ 中不含割点, 所以 $|S| \geqslant 2$. 又因为 $z$ 与 $G$ 中任意其他顶点均邻接, 所以必然有 $z \in S$; 否则 $G-S$ 是连通的. 又因为 $G$ 的阶为 7, 则删除 $G$ 中四个或更多的顶点所得到的图的连通块一定小于或等于 3, 所以 $|S|=2$ 或 $|S|=3$. 图 $G-z$ 如图 17 所示. 如果 $|S|=2$, 则只有当 $S$ 中含有 $u, w$, 或 $y$ 时, $G-S$ 才是连通的. 但此时, $k(G-S)=|S|=2$. 如果 $|S|=3$, 则只有当 $S$ 含有 $\{u,w,y\}$ 中的顶点时, $G-S$ 才可能含有两个或两个以上的连通块, 而此时 $k(G-S)=|S|=3$. 这就是说, 上面的 $G$ 是 Hamilton 图的条件是必要的, 但却不是充分的, 即这个定理的逆不成立. ◇

6.11 提示: 注意 $\overline{C}_n$ 是一个 $(n-3)$ 正则图. 如果 $n=5$, 则 $\overline{C}_5 \cong C_5$, 是 Hamilton 的. 如果 $n \geqslant 6$, 则 $n-3 \geqslant n/2$.

6.13 (a) 设 $G \cong K_{2,4}$. 则删除基数为 2 的分类集中的所有顶点所得的图含有四个连通块.

(b) 设 $G \cong K_4 - e$. 则此图含有两个奇度顶点.

(c) 设 $G \cong K_4 - e$.

(d) 设 $G \cong P_3$.

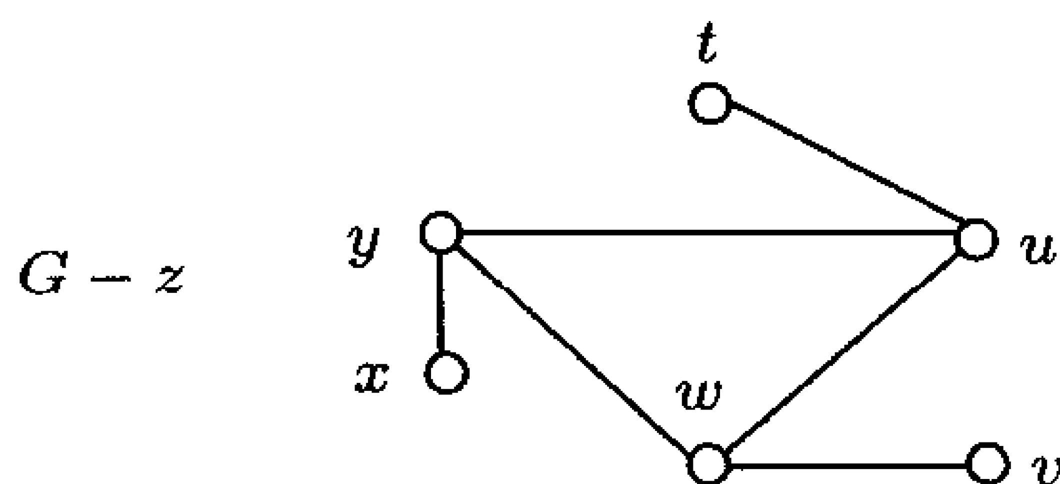



图 17　习题 6.9 的图 $G-z$

6.15 **解**　正确.

**证**　设 $F$ 是图 $G$ 的细分子图. 首先, 注意到如果 $F$ 是 Hamilton 的, 则 $G$ 必须是连通的. 如果 $G$ 含有一个端点, 则 $F$ 中也含有一个端点, 所以 $\delta(G) \geqslant 2$. 如果 $G$ 中含有一个度大于或等于 3 的顶点, 则 $F$ 中含有一个至少邻接于三个度为 2 的顶点. 因为没有哪个 Hamilton 图拥有这样的顶点, 所以 $\Delta(G) \leqslant 2$. 则 $G$ 是一个连通的 2 正则图, 即对某个整数 $n \geqslant 3$, 有 $G \cong C_n$. 因此 $G$ 是 Euler 的. ■

6.17 **解**　所有图的阶都为 4.

**证**　首先易证: 如果 $G$ 是任意一个阶为 4 的图, 则 $G(3)$ 是 Hamilton 的. 所以设 $n \geqslant 5$, 并设 $G$ 是一个阶为 4 的图. 设 $V(G(3)) = V(G) \cup W$, 其中

$$W = \{v_S : S \subseteq V(G) \text{ 和 } |S| = 3\}.$$

则 $|W| = \binom{n}{3}$, $G(3) - V(G)$ 中含有 $k(G(3) - V(G)) = |W|$ 个连通分支. 易知, 如果 $k(G(3) - V(G)) > |V(G)|$ (即, 如果 $\binom{n}{3} > n$), 则 $G(3)$ 不是 Hamilton 的. 对于正整数 $n$, 不等式 $\binom{n}{3} > n$ 等价于 $n > 4$. 又因为 $n \geqslant 5$, 所以图 $G(3)$ 不是 Hamilton 的. ■

6.19 **证**　首先, 注意到 $G$ 的阶是 $2n$. 因为 $\delta(G_1) \geqslant n/2$, 且 $\delta(G_2) \geqslant n/2$, 所以 $G_1$ (或 $G_2$) 中每个顶点的度至少为 $n/2 + n/2 = n$. 所以根据 Dirac 定理,$G$ 是 Hamilton 的. ■

6.21 提示: 考虑 $G' \cong G + K_1$, 其中 $V(K_1) = \{x\}$. 则对 $G'$ 中任意两个不邻接顶点 $u$ 和 $v$, 有 $\deg_{G'} u + \deg_{G'} v \geqslant n + 1$. 因此, $G'$ 中含有一个 Hamilton 圈 $C$, 从而 $G$ 中含有一条 Hamilton 路 $C - x$.

6.23 提示: (a) 是,　(b) 否.

## 第 7 章　有向图

7.1 (a) **证**　设 $v$ 为 $G$ 的一个顶点. 根据假设, $D - v$ 是强定向图. 因此 $D - v$ 是

一个有向圈 (如图 18(a) 所示). 另一方面, $D-u$ 是强连通的, 因此它也是一个有向圈. 由于 $(w,x)$ 是一条有向边, 所以 $D-u$ 是图 18(b) 中所示的有向圈. 因此, $D$ 含有图 18(c) 中的有向图作为其有向子图, 从而 $D$ 是强连通的. ■

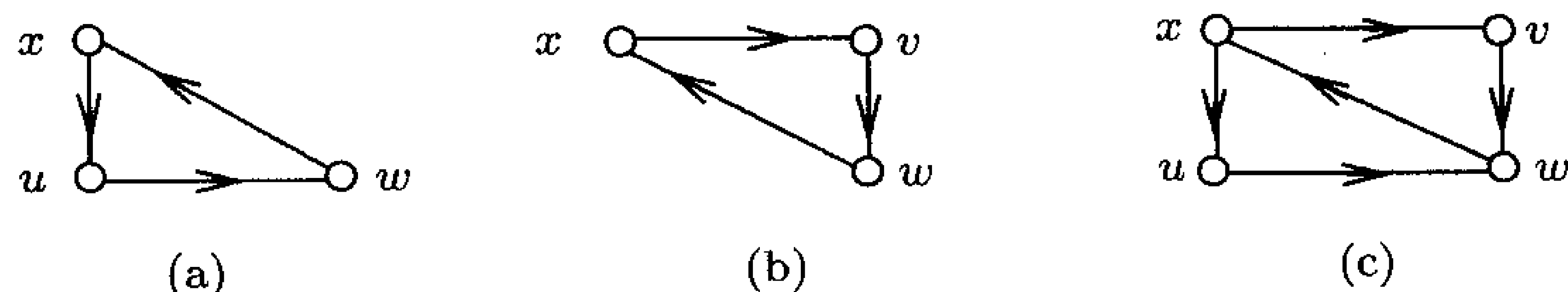



图 18　习题 7.1(a) 证明中的有向圈

(b) 由 (a) 可知, $D$ 含有图 18(c) 中的有向图作为其有向子图. 不论 $u$ 和 $v$ 是否邻接, $D-w$ 都不是强连通的.

7.3　见图 19.

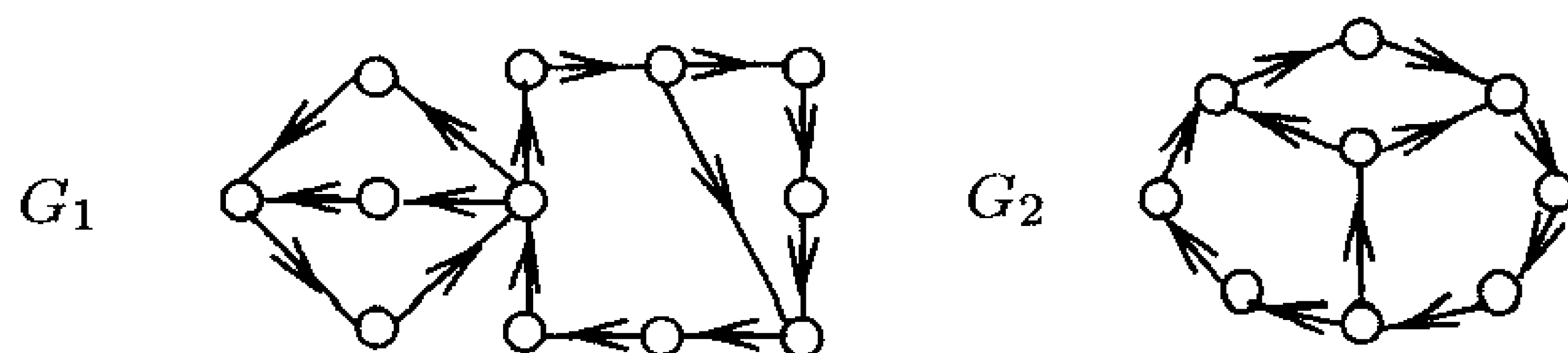



图 19　习题 7.3 中的图

7.5　**证**　设 $D$ 为强有向图. 假设 $D$ 的基础图 $G$ 存在一个边割 $S$, 把 $V(G-S)$ 分成两个集合 $A$ 和 $B$, 使得不存在从 $A$ 到 $B$ 的弧. 设 $u\in A$, $v\in B$. 则 $D$ 中不存在 $u-v$ 路, 与 $D$ 是强连通的矛盾. 反之, 假设 $D$ 不是强连通的. $D$ 含有两个顶点 $u$ 和 $v$, 使得 $D$ 中不存在 $u-v$ 路. 设 $A=\{x\in V(D):\ D$ 含有 $u-x$ 路$\}$, $B=V(D)-A$. 由于 $u\in A$, $v\in B$, 所以 $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$. $G$ 中, 连接 $A$ 中一个顶点与 $B$ 中一个顶点的边的集合 $S$ 是 $G$ 的一个边割. 因为对于任一 $x\in A$, $D$ 含有 $u-x$ 路, 并且对于任一 $x\in B$, $D$ 不含 $u-x$ 路, 所以 $D$ 中不存在从 $A$ 到 $B$ 的弧. ■

7.7　**证**　首先考虑, 由于 $T$ 是强连通的, 所以 $T$ 不含满足下述条件的顶点 $x$, $\mathrm{od}\,x=0$ 或 $\mathrm{id}\,x=0$. 又因为对于 $T$ 中任一弧 $(u,v)$, $T-(u,v)+(v,u)$ 是强连通的, 所以 $T$ 不含满足 $\mathrm{od}\,x=1$ 或 $\mathrm{id}\,x=1$ 的顶点 $x$. 因此, 对于 $T$ 的每个顶点 $x$, $\mathrm{od}\,x\geqslant 2$, $\mathrm{id}\,x\geqslant 2$. 由于 $T$ 的阶为 $n$, 其中 $3\leqslant n\leqslant 5$, 所以可得 $n=5$, 且 $T$ 每个顶点 $x$ 都有 $\mathrm{od}\,x=\mathrm{id}\,x=2$. 存在唯一具有这个性质的 5 阶竞赛图. ■

7.9　**证**　首先, 假设 $T$ 是一个可迁竞赛图. 设 $u$ 和 $v$ 为 $T$ 的两个顶点. 不失一般性,

设 $(u,v)$ 为 $T$ 的一条弧. 设 $U$ 是所有 $v$ 所邻接到的顶点的集合. 则 $\mathrm{od}\,v=|U|$. 因此, 若 $x\in U$, 则 $(v,x)$ 为 $T$ 的一条弧. 因为 $T$ 是可迁的, $(u,v)$ 和 $(v,x)$ 是弧, 所以 $(u,x)$ 是 $T$ 的一条弧. 从而 $u$ 邻接到 $U$ 中每一个顶点, 有 $\mathrm{od}\,u\geqslant 1+|U|$, 意味着 $\mathrm{od}\,u\neq \mathrm{od}\,v$.

现在证明充分性, 假设 $T$ 是一个顶点的度都不相同的 $n$ 阶竞赛图. 则这些出度为 $0,1,2,\ldots,n-1$. 因此可以假设 $V(T)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, 其中 $\mathrm{od}\,v_i=n-i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 我们断言任一顶点 $v_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 都邻接到 $v_{i+1},v_{i+2},\ldots,v_n$. 我们通过归纳来证明这点. 由于 $\mathrm{od}\,v_1=n-1$, 所以对于顶点 $v_1$, 断言正确. 假设对于所有 $i$ $(1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant k<n)$, $v_i$ 都邻接到 $v_{i+1},v_{i+2},\ldots,v_n$. 考虑 $v_{k+1}$. 由归纳假设, 顶点 $v_1,v_2,\ldots,v_k$ 都邻接到 $v_{k+1}$. 由 $\mathrm{od}\,v_{k+1}=n-k-1$, 可得 $v_{k+1}$ 邻接到 $v_{k+2},v_{k+3},\ldots,v_n$. 现在来证明 $T$ 是可迁的. 设 $(u,v)$ 和 $(v,w)$ 为 $T$ 的弧. 则 $u=v_r,v=v_s,w=v_t$, 其中 $r<s<t$. 由 $r<t$ 可得, $(u,w)$ 为 $T$ 的弧, 因此, $T$ 是可迁的. ■

7.11 **证** 由于 $\sum_{i=1}^n \mathrm{od}\,v_i=\sum_{i=1}^n \mathrm{id}\,v_i$, 所以 $\sum_{i=1}^n(\mathrm{od}\,v_i-\mathrm{id}\,v_i)=0$. 而

$$\begin{aligned}0&=\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{od}\,v_i-\mathrm{id}\,v_i)=\sum_{i=1}^{n-1}(\mathrm{od}\,v_i-\mathrm{id}\,v_i)+(\mathrm{od}\,v_n-\mathrm{id}\,v_n)\\&\geqslant(n-1)+\mathrm{od}\,v_n-\mathrm{id}\,v_n.\end{aligned}$$

因此, $\mathrm{id}\,v_n-\mathrm{od}\,v_n\geqslant n-1$, 意味着 $\mathrm{id}\,v_n=n-1$, $\mathrm{od}\,v_n=0$. 由 $\mathrm{od}\,v_n=0$ 可得, $T$ 不是强连通的. ■

7.13 **解** 设 $u$ 和 $v$ 是竞赛图 $T$ 中两个不同的顶点. 可以假设 $(u,v)\in E(T)$, 因此 $(v,u)\notin E(T)$. 则 $\vec{d}(u,v)=1$, $\vec{d}(v,u)\neq 1$. 从而, $\vec{d}(u,v)\neq\vec{d}(v,u)$. ◇

7.15 **证** 我们用归纳法来证明. 设 $T$ 是阶为 $n\geqslant 3$ 的强连通的竞赛图, $v$ 为 $T$ 的一个顶点. 首先来证明 $T$ 含有一个长度为 3 的圈. 由于 $T$ 是强连通的, 所以 $\mathrm{od}\,v>0$, $\mathrm{id}\,v>0$. 因此 $N^+(v)$ 和 $N^-(v)$ 是非空的. 由同样的原因, 存在顶点 $u\in N^+(v)$ 邻接到 $N^-(v)$ 中的某个顶点 $w$. 因而, $v,u,w,v$ 是一个长度为 3 的圈.

假设 $T$ 含有一个长度为 $k$ 的圈, 其中 $3\leqslant k<n$. 下面证明 $T$ 含有一个长度为 $k+1$ 的圈.

设 $C: v=v_1,v_2,\ldots,v_k,v_1$ 是一个长度为 $k$ 的圈. 假设 $T$ 中存在一个不属于 $C$ 的顶点 $u$, 使得 $u$ 邻接自 $C$ 的某个顶点, 并邻接到 $C$ 的其他某个顶点. 则 $C$ 中存在一对邻接的顶点, 不妨设为 $v_i$ 和 $v_{i+1}$(下标关于模 $k$ 同余), 使得 $(v_i,u)$ 和 $(u,v_{i+1})$ 都是 $T$ 的弧. 在此情形下, $v_1,v_2,\ldots,v_i,u,v_{i+1},\ldots,v_k,v_1$ 是一个含有 $v$ 的, 并且长度为 $k+1$ 的圈.

现在假设 $T$ 每个不属于 $C$ 的顶点, 或者邻接到 $C$ 的所有顶点, 或者邻接自 $C$ 的所有顶点. 设 $U$ 为 $V(T)-V(C)$ 中所有满足下述性质的顶点集合, 这些顶点都邻接自 $C$ 上所有顶点; 设 $W$ 为 $V(T)-V(C)$ 中所有满足下述性质的顶点集合, 这些顶点都邻接到 $C$ 上所有顶点. 由于 $T$ 是强连通的, 所以存在某个顶点 $u \in U$, 其邻接到某个顶点 $w \in W$. 从而, $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}, u, w, v_1$ 是一个含有 $v$ 的长度为 $k+1$ 的圈. ■

## 第 8 章 匹配与分解

8.1 (a) 见图 20. (b) $G$ 的完美匹配为 $M = \{u_0w_6,\ u_1w_1,\ u_2w_0,\ u_3w_5,\ u_4w_2,\ u_5w_4,\ u_6w_3\}$.

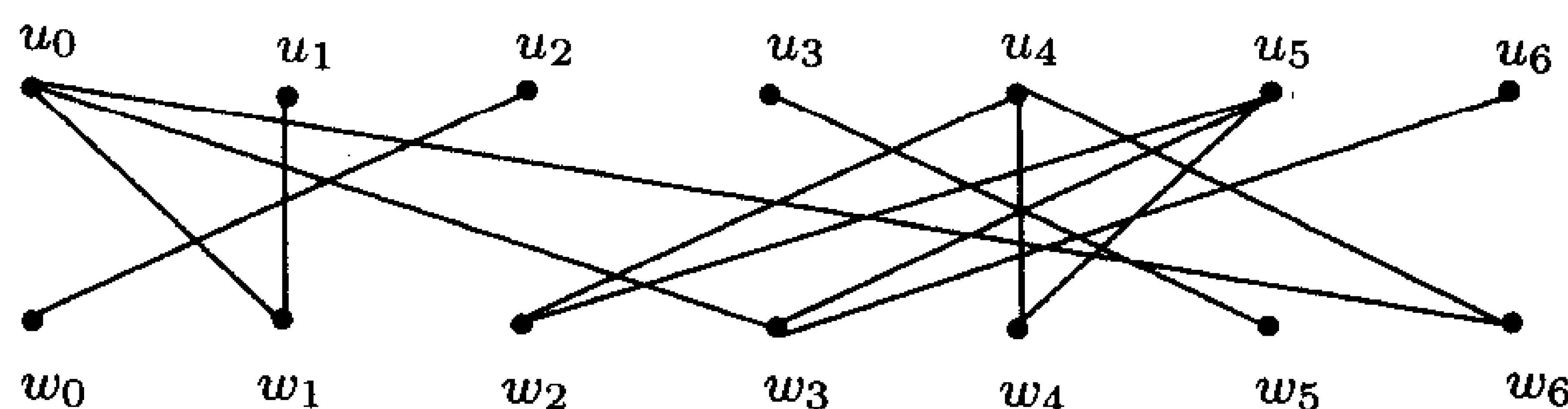



图 20 习题 8.1 的图 $G$

8.3 对于图 $G_1$, 通过 $M = \{av, bw, cy, dz, ex\}$, 集合 $U$ 可以匹配到 $W$ 上. 对于图 $G_2$, 由于 $U$ 不是友好的, 则 $U$ 不能被匹配到 $W$ 上. 例如, $X = \{v, x, y\}$, 而 $N(X) = \{a, c\}$.

8.5 **证** 假设树 $T$ 包含两个不同的完美匹配 $M_1$ 和 $M_2$, 则 $T$ 中存在一个顶点 $v$, 使得 $v$ 关联两条不同的边 $e_1$ 和 $e_2$, 其中 $e_1 \in M_1$, $e_2 \in M_2$. 记 $e_1 = uv$, $e_2 = vw$, $u \neq w$. 因而, $T$ 存在一条长为 2 路, 其边以 $M_1 - M_2$ 和 $M_2 - M_1$ 的交错方式出现. 在边以 $M_1 - M_2$ 和 $M_2 - M_1$ 的交错方式出现的所有路中, 设 $P$ 为的长度最大的一条. 假设 $P$ 是一条 $x-y$ 路, 在 $P$ 上 $x$ 关联一条以 $M_1 - M_2$ 方式出现的边. 由于 $M_2$ 是完美匹配, 则 $x$ 关联一条不在 $P$ 上以 $M_2 - M_1$ 方式出现的边, 记为 $e = xz$. 若 $z$ 不在 $P$ 上, 则 $z, P$ 是一条 $z-y$ 路, 其边以 $M_1 - M_2$ 和 $M_2 - M_1$ 的交错方式出现, 且其长度大于 $P$, 导致矛盾. 若 $z$ 在 $P$ 上 (事实上, 必有 $z = y$, 且在 $P$ 上 $y$ 关联一条以 $M_1 - M_2$ 方式出现的边), 则可构成 $T$ 中的一个圈, 导致矛盾. ■

8.7 考虑如图 21 所示的图, $M_1 = \{uv, ws, tx, yz\}$, $M_2 = \{us, vw, xy, tz\}$.

8.9 考虑 $G_1 = K_8$, $G_2 = K_6 - e$, $G_3 = P_5$, $G_4 = K_{1,4}$.

8.11 若 $G$ 为二部图, 则 $\alpha_1(G) = \beta(G)$.

8.13 $\alpha(H) = \beta_1(H) = 2$, $\beta(H) = \alpha_1(H) = 5$. 集合 $\{t, u\}$ 为最小点覆盖, $\{u, w, x, y, z\}$

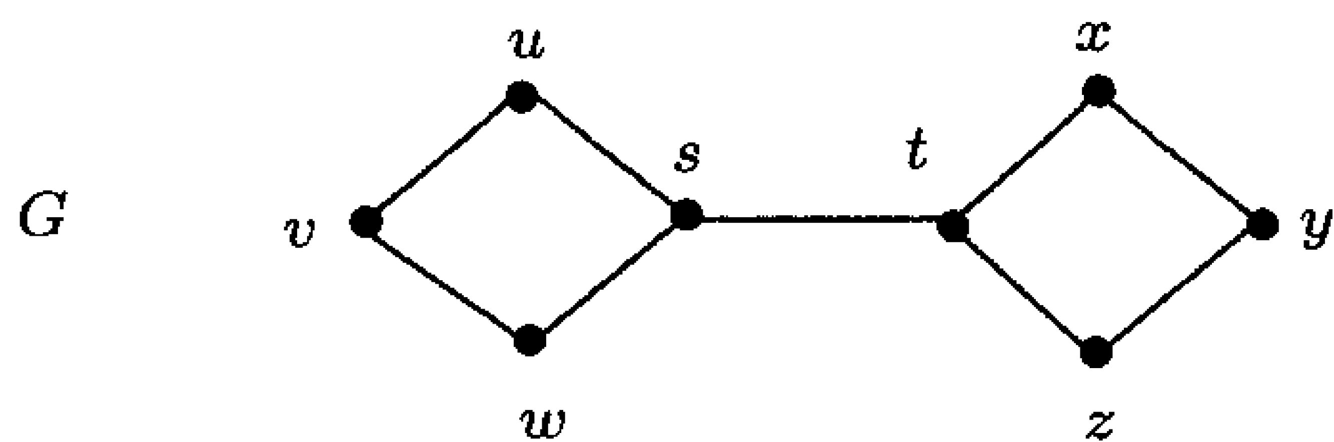



图 21　习题 8.7 中的图

为最大独立集, $\{uv, tw, tx, ty, tz\}$ 为最小边覆盖, $\{uv, tw\}$ 为最大边独立集.

8.15　$\beta_1(G) = (n_1 + n_2)/2$. 由定理 8.7, $\alpha_1(G) = (n_1 + n_2)/2$.

8.17　图 $G_1$ 存在 1 因子, 但不是可 1 因子分解的; $G_2$ 不存在 1 因子 (当然不是可 1 因子分解的); $G_3$ 存在 1 因子, 但不是可 1 因子分解的.

8.19　提示: 构造 $K_9$ 的 Hamilton 因子分解.

8.21　提示: 设 $S$ 为 $K_{3,5}$ 的一个部集, 且 $|S| = 3$, 则 $k_o(G - S) = 5$.

8.23　提示: 由定理 8.11, 若 $G$ 不含割边, 则 $G$ 包含 1 因子; 否则, 设 $P : u = u_0, u_1, \cdots, u_k = v$ 是一条包含 $G$ 的所有割边的 $u - v$ 路. 不失一般性, 我们可以假设 $uu_1$ 和 $u_{k-1}v$ 为割边. 设 $G_1$ 为 $G - uu_1$ 的包含 $u$ 的连通分支, $G_2$ 为 $G - u_{k-1}v$ 包含 $v$ 的连通分支. 对于每个 $i$ $(i = 1, 2)$, 设 $e_i = x_iy_i$ 为 $G_i$ 中的一条边. 此外, 在 $G$ 中删除边 $e_i$, 添加一个新的顶点 $w_i$ 和边 $x_iw_i$ 和 $w_iy_i$, 其中 $i = 1, 2$. 设按照上述操作得到的图为 $G'$. 因而, $w_1$ 和 $w_2$ 是 $G'$ 中仅有的两个度为 2 的顶点. 设 $F_1$, $F_2$, $F_3$ 是 $G'$ 的三个拷贝. 对于每个 $j$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$, 设 $F_j$ 中的顶点 $w_{1j}$ 对应着 $G'$ 中的顶点 $w_1$, $F_j$ 中的顶点 $w_{2,j}$ 对应着 $G'$ 中的顶点 $w_2$. 在 $F_1$, $F_2$, $F_3$ 的基础上通过下述方式构造图 $F$,(1) 添加两个新的顶点 $z_1$ 和 $z_2$, (2) 连接 $z_1$ 到 $w_{1j}$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$, 连接 $z_2$ 到 $w_{2j}$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$. 因此, $F$ 是不含割边的 3 正则图, 由定理 8.11, $F$ 包含 1 因子. 下面只需证明 $F_1$, $F_2$, $F_3$ 中至少有一个包含 1 因子即可.

8.25　提示: 若 $n$ 为偶数, 则 $C_n$ 是可 1 因子分解的. 若 $n$ 为奇数, 我们考虑在 $C_n \times K_2$ 上的两个 $n$ 圈 $C : v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1$ 和 $C' : v_1', v_2', \cdots, v_n', v_1'$, 其中 $v_iv_i'$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为 $C_n \times K_2$ 中一条边. 考虑 $C_n \times K_2$ 的三个子图 $F_1$, $F_2$, $F_3$, 其中 $v_1v_1' \in E(F_1)$, $v_2v_2' \in E(F_2)$, $v_iv_i' \in E(F_3)$ $(3 \leqslant i \leqslant n)$.

8.27　提示: 考虑 $C^* : v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_6, v_1, v_4, v_2, v_5, v_6, v_3, v_1$.

8.29　提示: 注意到 $K_{n+1} \cong K_n + K_1$.

8.31　提示: 图 $K_7$ 可分解成 $C_3 \cup C_4$ 的三个拷贝.

8.33　提示: 若 $K_{2,2,2}$ 是可 $K_{1,4}-$ 分解的, 则 $K_{2,2,2}$ 可分解成 $K_{1,4}$ 的三个拷贝, 故 $K_{2,2,2}$ 中存在不位于任一星图 $K_{1,4}$ 中心的顶点.

8.35　提示: 图 $C_6$ 不是优美的. 当 1 在 $C_6$ 上循环移动时, 考虑标号的奇偶性. 另一

方面, $C_8$ 是优美的. 设 $C_8: v_1, v_2, \cdots, v_8, v_1$, 考虑按下面方式定义的标号 $f$: $f(v_1)=0$, $f(v_2)=8$, $f(v_3)=1$, $f(v_4)=4$, $f(v_5)=5$, $f(v_6)=7$, $f(v_7)=2$, $f(v_8)=6$.

8.37 提示: 先证明 $T$ 是边数为 5 的优美树, 再利用定理 8.24.

## 第 9 章 可平面性

9.1 见图 22. 对 $G_1$, 有 $n=6, m=10, r=6$. 对 $G_2$, 有 $n=10, m=17, r=9$. 对 $G_3$, 有 $n=6, m=12, r=8$. 在每种情况下, 都有 $n-m+r=2$ 成立.

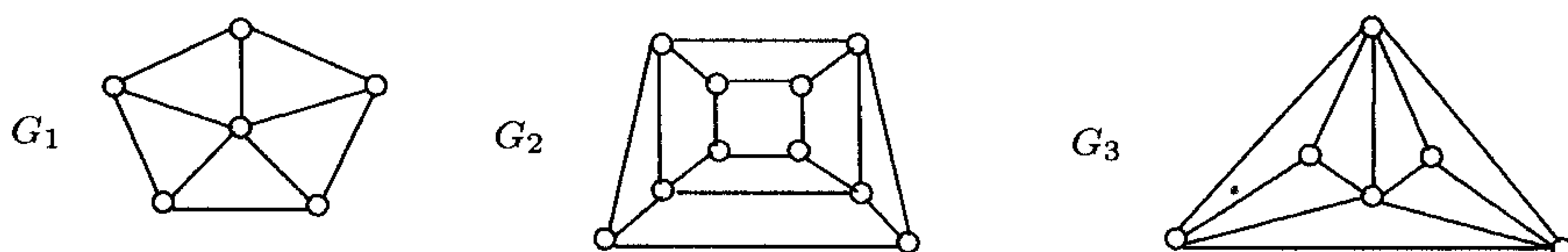



图 22 习题 9.1 的图

9.3 (a) **解** 图 $G$ 的阶为 $n=7$ 边数为 $m=16$. 因此 $m=16>3\cdot 7-6=15$. 根据定理 9.2, 图 $G$ 是非平面的. ♢

(b) **解** 图 $G$ 的阶为 $n=12$ 边数为 $m=33$. 因此 $m=33>3\cdot 12-6=30$. 根据定理 9.2, 图 $G$ 是非平面的. ♢

9.5 (a) 八面体图是一个 4 正则平面图, 而完全二部图 $K_{4,4}$ 是一个 4 正则非平面图.

(b) 二十面体图是一个 5 正则平面图, 而完全二部图 $K_{5,5}$ 是一个 5 正则非平面图.

(c) 根据推论 9.3, 每个平面图含有一个度小于或等于 5 的顶点.

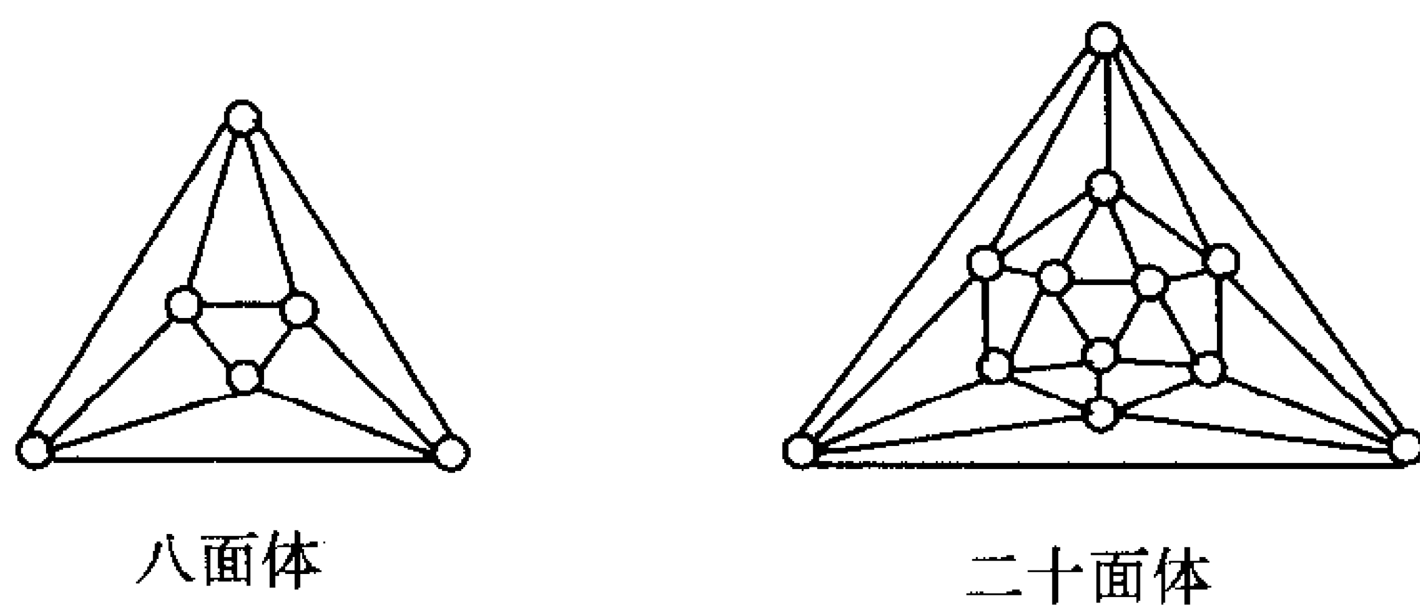



图 23 习题 9.5(a) 和 (b) 的图

9.7 (a) $C_4$.

(b) 没有这样的图存在, 因为每个非平面图必须含有至少 5 个顶点以使其以 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ (或它们的一个细分) 作为子图.

(c) 通过细分 $K_5$ 的每条边恰好一次所得到的图.

(d) 没有这样的图存在. 如果 $G$ 含有 5 个顶点和 10 条边, 则 $G \cong K_5$, 其为非平面图. (注意:Euler 恒等式也可能成立, 因为 $n - m + r = 5 - 10 + 7 = 2$, 但却没有这样的平面图.)

(e) 设 $G \cong K_3$.

(f) 设 $G \cong K_6 \cup K_1$.

9.9 图 $G$ 为一个非平面图, 因为 $G$ 含有 $K_{3,3}$ 的一个细分, 见图 24.

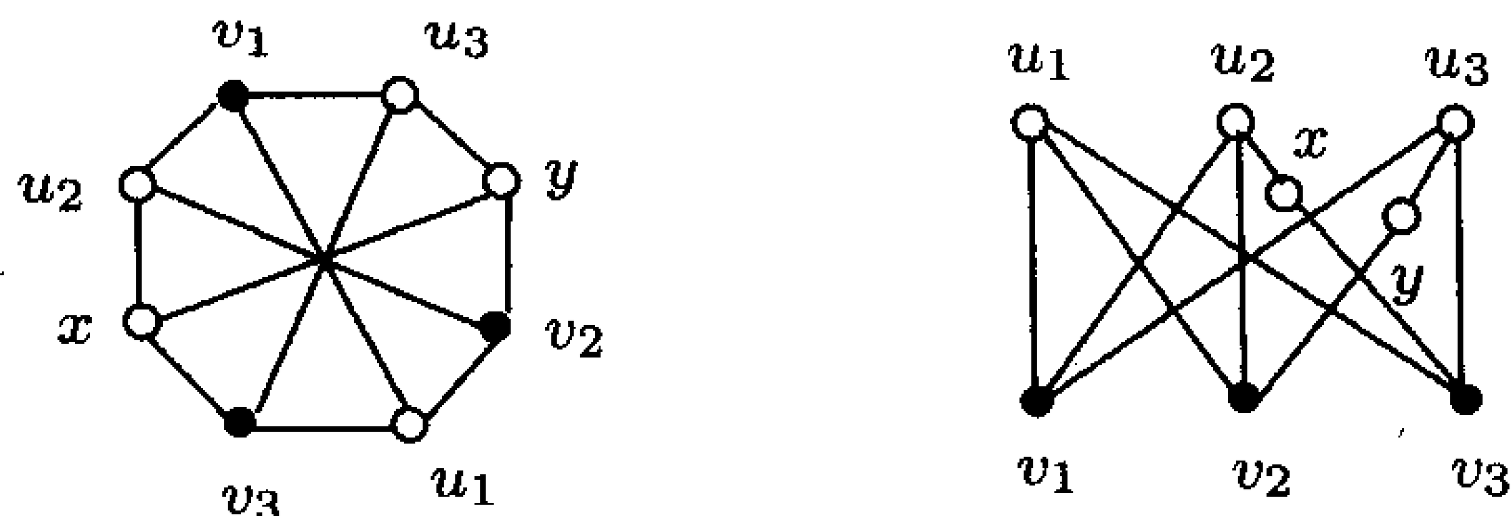



图 24 习题 9.9 的图

9.11 为平面图, 见图 25.

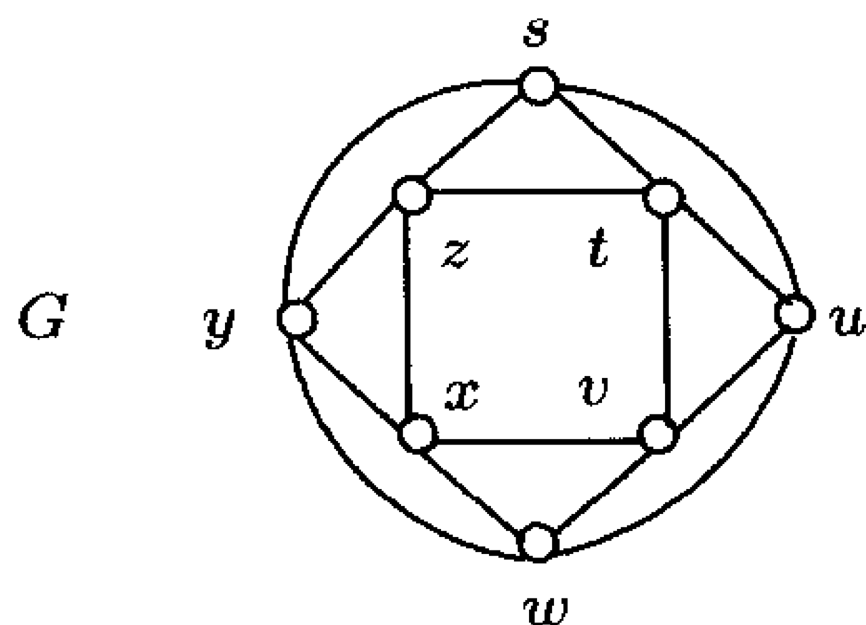



图 25 习题 9.11 的图

9.13 (a) **证** 首先, 假设 $G$ 是连通的. 注意, 如果 $m = 2, 3$, 则不等式成立. 因此, 我们假设 $m \geqslant 4$ 并把 $G$ 画成平图, 用 $r$ 表示 $G$ 的区域数. 对 $G$ 的每个区域 $R$, 我们来确定位于边界 $R$ 上的边数, 并把 $G$ 的所有区域的这个数加起来, 记为 $M$. 因为 $G$ 中不含三角形, 则 $G$ 的每个区域上至少含有 4 条边. 因此 $M \geqslant 4r$. 另一方面, 数 $M$ 给 $G$ 的每条边计数恰好两次, 即 $M \leqslant 2m$. 因此 $4r \leqslant M \leqslant 2m$ 或 $2r \leqslant m$. 因为 $n - m + r = 2$, 从而有

$$4 = 2n - 2m + 2r \leqslant 2n - 2m + m.$$

因此, $m \leqslant 2n - 4$.

如果 $G$ 是不连通的, 则可以通过给 $G$ 增加边而使其成为一个阶数为 $n$ 边数为 $m'$ 且没有三角形的平图, 其中 $m' > m$. 则 $m' \leqslant 2n - 4$, 因此 $m < 2n - 4$. ■

(b) 因为 $K_{3,3}$ 是二部的且不含三角形, 它的阶为 $n=6$, 边数为 $m=9$. 又由于 $9>8=2\cdot 6-4=2n-4$, 所以根据 (a), $K_{3,3}$ 是非平面的.

(c) **证** 假设相反, 则存在一个阶为 $n$ 边数为 $m$ 的二部平面图 $G$, 使得 $\delta(G)\geqslant 4$. 则 $2m\geqslant 4n$, 从而 $m\geqslant 2n$. 另一方面, $G$ 是二部的, 因此不含三角形, 根据 (a), $m\leqslant 2n-4$, 这是不可能的. ■

9.15 **证** 假设相反, 存在一个阶为 $n\leqslant 11$ 的平面图 $G$, 使得 $\delta(G)\geqslant 5$. 因此 $2m\geqslant 5n$. 另一方面, 由于 $G$ 是一个平面图, 所以 $m\leqslant 3n-6$. 因此, $5n\leqslant 2m\leqslant 6n-12$, 这隐含了 $n\geqslant 12$, 导致矛盾. ■

9.17 提示: 图 $\overline{C_6}$ 是一个平面图. 图 $\overline{C_7}$ 含有一个 $K_{3,3}$ 的细分, 因此为一个非平面图. 图 $\overline{C_8}$ 为一个非平面图, 因为 $m=\binom{8}{2}-8=20$, $3n-6=3\cdot 8-6=18$, $m>3n-6$.

9.19 提示: 因为 $G$ 是一个极大平面图, 因此 $m=3n-6$. 然后应用 Euler 恒等式.

9.21 **证** 假设相反, 则 $G$ 含有一个顶点 $v$ 满足 $\deg v\leqslant 2$. 假设 $G$ 的阶为 $n$ 边数为 $m$. 因为 $G$ 是一个极大平面图, 因此 $m=3n-6$. 则 $G-v$ 是一个平面图. 因此, $G-v$ 的阶为 $n$, 边数为 $m'\geqslant m-2$. 故 $m'\leqslant 3(n-1)-6$, 从而 $m-2\leqslant 3n-3-6$, 因此 $m\leqslant 3n-7$, 导致矛盾. ■

9.23 见图 26.

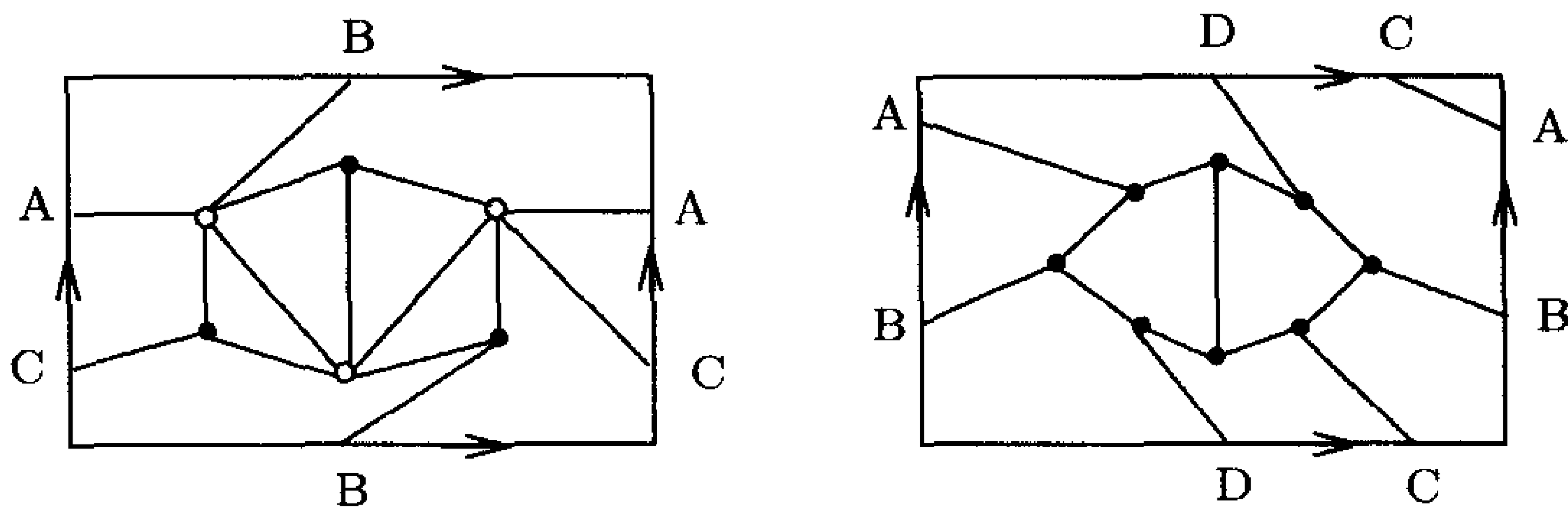



图 26 习题 9.23 中在环面上嵌入的图

9.25 **解** 因为 $K_{3,3}$ 是 $K_{4,4}$ 的一个子图, 所以 $K_{4,4}$ 为一个非平面图, 从而 $\gamma(K_{4,4})\geqslant 1$. 又因为 $K_{4,4}$ 可以嵌入到环面上, 所以 $\gamma(K_{4,4})=1$. ◇

9.27 (a) 错误. 每个平面图均可以被嵌入到球面上, 因此也可以被嵌入到环面上.

(b) 正确. 完全图 $K_8$ 的亏格为 2 (根据定理 9.12).

(c) 正确. 在球面上画 $G$(可能会出现边相交). 对每条边, 插入一个手柄并在该手柄上画那条边.

(d) 错误. 每个平面图都可以嵌入到环面上.

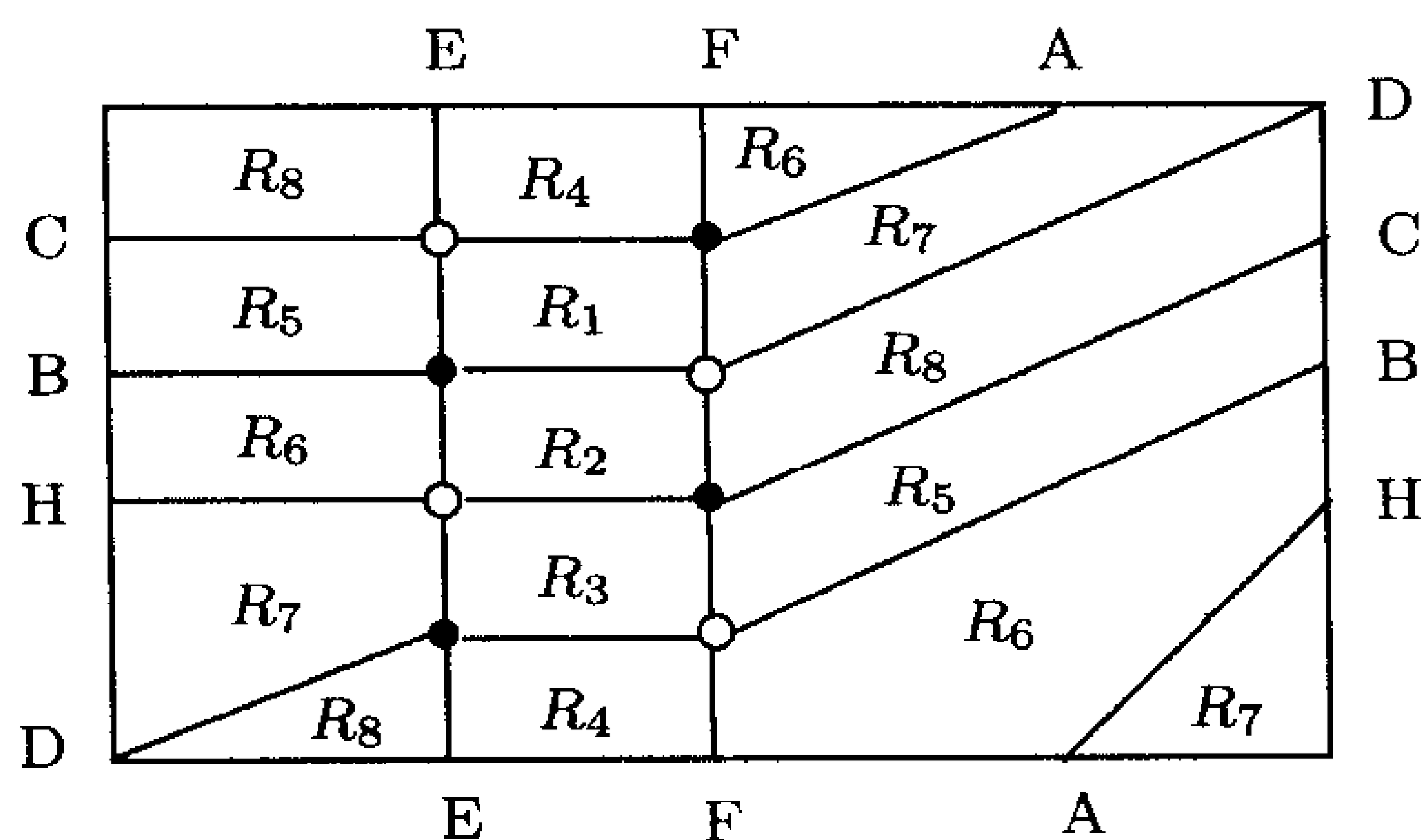



图 27 习题 9.25, 把 $K_{4,4}$ 嵌入到环面上

## 第 10 章 染色

10.1 $\chi(G_1) = \chi(G_4) = 3$, $\chi(G_2) = \chi(G_3) = \chi(G_5) = 4$. 因为 $G_1$ 含有三角形, 所以 $\chi(G_1) \geqslant 3$. 因为 $G_1$ 存在一个 3 染色, 所以 $\chi(G_1) \leqslant 3$. 因为 $G_2$ 包含 $K_4$ 作为一个子图, 所以 $\chi(G_2) \geqslant 4$. 因为 $G_2$ 是平面的, 所以 $\chi(G_2) \leqslant 4$. 因为 $G_3$ 包含 $K_4$ 作为一个子图, 所以 $\chi(G_3) \geqslant 4$. 因为 $G_3$ 存在一个 4 染色, 所以 $\chi(G_3) \leqslant 4$. 因为 $G_4$ 含有三角形, 所以 $\chi(G_4) \geqslant 3$. 因为 $G_4$ 存在一个 3 染色, 所以 $\chi(G_4) \leqslant 3$. 因为 $G_5$ 包含 $K_4$ 作为一个子图, 所以 $\chi(G_5) \geqslant 4$. 因为 $G_5$ 存在一个 4 染色, 所以 $\chi(G_5) \leqslant 4$.

10.3 由于树是二部图, 所以阶至少为 2 的树的色数为 2.

10.5 **证** 设 $G$ 是一个阶为 6, 色数为 3 的图, 并设 $G$ 存在一个 3 染色. 若存在 3 个 (或更多个) 顶点被染成了相同的颜色, 则 $G$ 有一个顶点数至少为 3 的独立集. 因此, $G$ 的边数至多为 $\binom{6}{2} - 3 = 12$. 若不存在 3 个 (或更多个) 顶点被染成了相同的颜色, 则 $V(G)$ 能够划分成 3 个均含有 2 个顶点的独立集, $G$ 的边数至多为 $\binom{6}{2} - 1 - 1 - 1 = 12$. ■

这个结果不能再改进了, 由于 $G \cong K_{2,2,2}$ 是一个阶为 6, 边数为 12 的图, 其色数为 3.

10.7 由于 $\Delta(G) = 5$, $G$ 不是完全的, 也不是奇圈, 所以 $\chi(G) \leqslant \Delta(G) = 5$.

10.9 (a) **证** 设 $G \cong K_5$. 则 $G$ 是非平面的, 且 $\chi(G) = 5$. 考虑对于 $G$ 的每个顶点 $v$, $G - v \cong K_4$ 是平面的, 并且 $\chi(K_4) = 4$. ■

(b) **证** 设 $G \cong K_{3,3}$. 则 $G$ 是非平面的, 且 $\chi(G) = 2$. 考虑对于 $G$ 的每个顶点 $v$, $G - v \cong K_{2,3}$ 是平面的, 并且 $\chi(K_{2,3}) = 2$. ■

10.11 **解** 设图 $G$ 的顶点集是化学药品的集合. 在图 $G$ 中, 在两个顶点 (化学药品) 之间连一条边, 如果把它们放在相同容器中运送会产生危险. 图 $G$ 如图 28 所示. 由于 $\chi(G) = 4$, 所以运送化学药品的最少费用是 $125 + 3 \times 85 = 380$.

容器 1: $c_1$, $c_7$; 容器 2: $c_4$, $c_5$; 容器 3: $c_2$, $c_8$; 容器 4: $c_3$, $c_6$. ◇

图 28 习题 10.11 中的图 $G$

10.13 **证** 设 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 为由 $G$ 的一个 $k$ 染色所产生的的 $k$ 个色类, 其中 $V_i$ 中的顶点染成颜色 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. 则任何两个不同色类的基数是不同的. 因此, 我们可以假设 $1 \leqslant |V_1| < |V_2| < \cdots < |V_k|$. 由于 $\beta(G) = k$, 所以 $|V_k| \leqslant k$. 这意味着, 对于任一 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $|V_i| = i$. 因此, $V_1$ 仅由一个顶点 $v$ 构成, 染成颜色 1. 若存在一个与 $v$ 不邻接的顶点 $u \in V_i$ $(i \neq 1)$, 则 $u$ 能够染颜色 1, 导致矛盾. 从而, $v$ 与 $G$ 中其他所有顶点都邻接, 所以 $\deg v = n - 1$. ■

10.15 设图 $G$ 的顶点集为 $A$, $a_i$ 和 $a_j$ 是邻接的, 如果 $\{a_i, a_j\} \in S$. 则 $f$ 是 $G$ 的一个染色. $f$ 的值域为 $\chi(G)$.

10.17 $\chi_1(G_1) = \chi_1(G_2) = \chi_1(G_4) = \chi_1(G_5) = 4$, $\chi_1(G_3) = 5$.

10.19 **解** 如果两个队伍需要进行比赛, 那么在两个顶点 (队伍) 之间画一条边. 图 $G$ 具有奇数阶 $n = 7$, 边数 $m = 13$, 以及 $\Delta(G) = 4$. 由于 $m > \frac{(n-1)\Delta(G)}{2}$, 所以能够得到 $\chi_1(G) = 1 + \Delta(G) = 5$, 是安排 13 次比赛所需要的最少天数. $G$ 的一个边染色在图 29 中给出.

第 1 天: A - B, N - M, D - L
第 2 天: B - N, A - C, L - M
第 3 天: C - L, D - M
第 4 天: A - N, C - D
第 5 天: A - M, D - N, B - C ◇

图 29 习题 10.19 中的图

## 第 11 章 图的 Ramsey 数

11.1 提示: $F_1$ 是 $K_s$ 的一个子图, $F_2$ 是 $K_t$ 的一个子图.

11.3 **证** 对于 $K_{18}$ 给定的红 – 蓝染色, 设 $V(K_{18})=\{v_1,v_2,\cdots,v_{18}\}$. 由鸽笼原理, 与 $v_1$ 关联的 17 条边中至少有 9 条被染成了相同的颜色, 不妨设 $v_1v_2$, $v_1v_2$, $\cdots$, $v_1v_{10}$ 为红边. 由于 $r(K_3,K_4)=9$, 则 $H=\langle\{v_2,v_3,\cdots,v_{10}\}\rangle\cong K_9$ 中存在红 $K_3$ 或蓝 $K_4$. 若 $H$ 中存在红 $K_3$, 则 $K_{18}$ 中存在红 $K_4$; 若 $H$ 中存在蓝 $K_4$, 则 $K_{18}$ 中存在蓝 $K_4$. 因此, $r(K_4,K_4)\leqslant 18$. ■

11.5 $r(2K_2,P_3)=4$.

**证** 由于 $2K_2$ 的阶为 4, 则 $r(2K_2,P_3)\geqslant 4$. 下面只需证明 $r(2K_2,P_3)\leqslant 4$ 即可. 对于 $K_4$ 给定的一个红 – 蓝染色, 若 $K_4$ 的所有边均被染成红色, 则可得到一个红 $2K_2$. 因而, 我们可以假设 $K_4$ 中至少有一条蓝边, 记为 $uv$, 如图 30(a) 所示. 若 $ux$ 和 $vy$ 中有一条是蓝边, 则可得到一个蓝 $P_3$, 如图 30(b) 所示. 否则, $ux$ 和 $vy$ 均为红边, 则可得到一个红 $2K_2$, 如图 30(c) 所示. ■

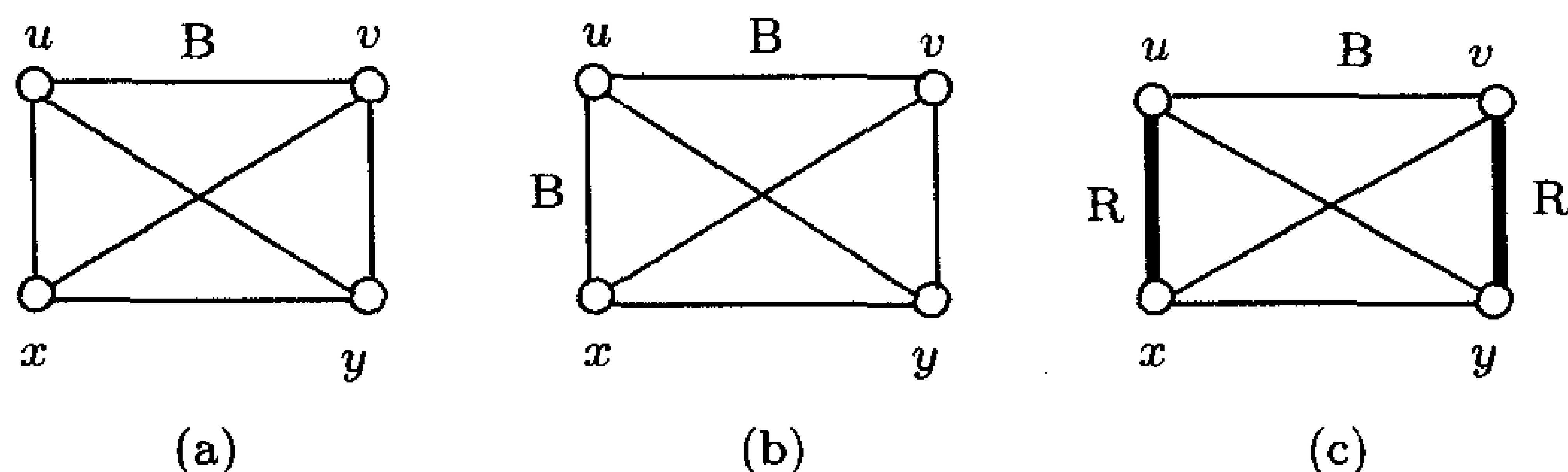



图 30 习题 11.5 中 $K_4$ 的红 – 蓝染色

11.7 $r(2K_2,2K_2)=5$.

**证** $K_4$ 的红 – 蓝染色如图 31(a) 所示, 其中 $K_4$ 的红边被画成了粗体. 该红 – 蓝染色既不包含红 $2K_2$ 也不包含蓝 $2K_2$. 因而,$r(2K_2,2K_2)\geqslant 5$.

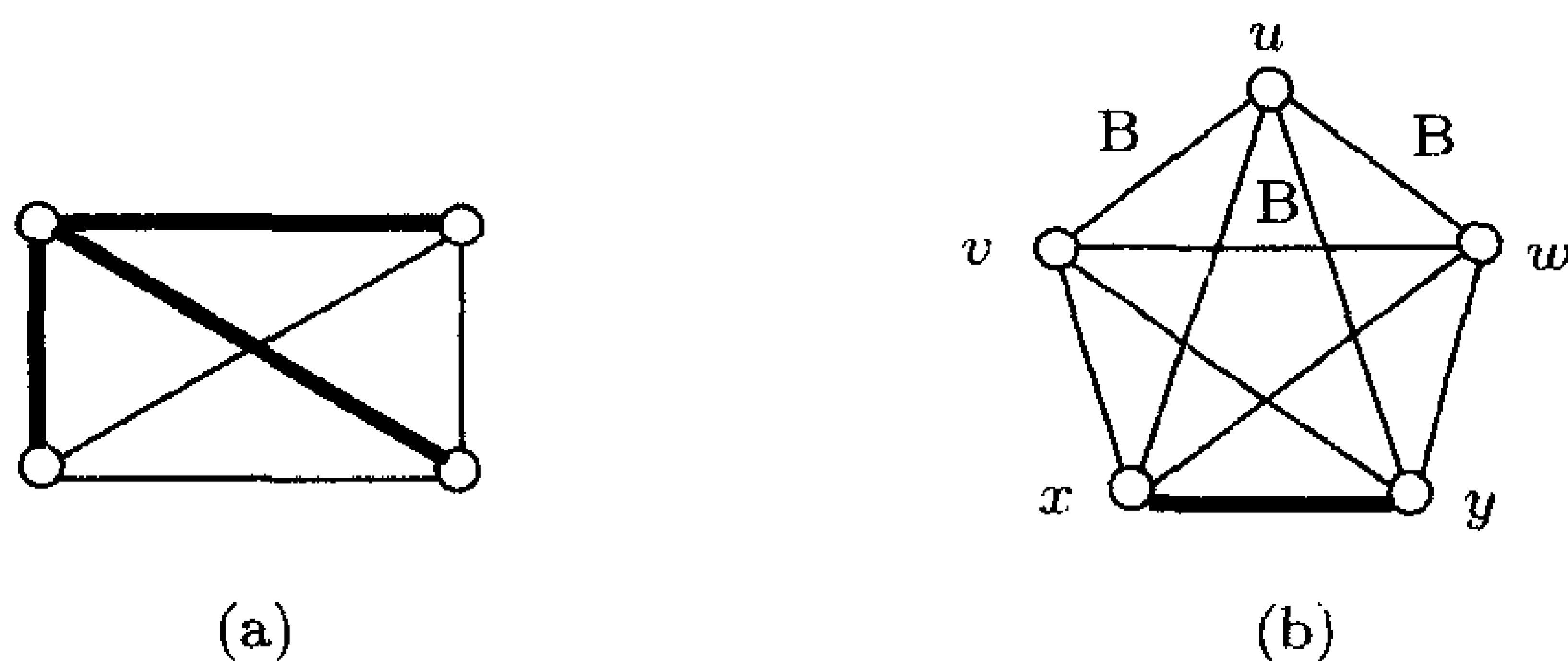



图 31 习题 11.7 中 $K_4$ 和 $K_5$ 的红 – 蓝染色

下面, 我们证明 $r(2K_2,2K_2)\leqslant 5$. 给定 $K_5$ 的一个红 – 蓝染色, 假设该红 – 蓝染色既不红 $2K_2$ 也不包含蓝 $2K_2$. 若 $K_5$ 的所有边均被染成蓝色, 则

可得到一个蓝 $2K_2$. 因而, 我们可以假设 $K_5$ 中至少有一条红边, 记为 $xy$, 如图 31(b) 所示. 由于该红 – 蓝染色不含红 $2K_2$, 则 $uv, uw, vw$ 均为蓝边. 由于 $uw$ 为蓝边, 则 $vx$ 必为红边. 由于 $uv$ 为蓝边, 则 $wy$ 必为红边. 由 $vx$ 和 $wy$ 可构成一个红 $2K_2$, 从而导致矛盾. ■

11.9 $r(K_{1,3}, K_{1,3}) = 6$.

**证** $K_5$ 存在一个红 – 蓝染色, 使得 $K_5$ 的红色子图与蓝色子图均为 $C_5$. 因而, 该红 – 蓝染色既不包含红 $K_{1,3}$ 也不包含蓝 $K_{1,3}$, 故 $r(K_{1,3}, K_{1,3}) \geqslant 5$. 考虑 $K_6$ 给定的一个红 – 蓝染色, 对于 $K_6$ 的某个顶点 $v$, 在 $K_6$ 中有 5 条与 $v$ 关联的边. 在这 5 条边中至少有 3 条被染成了相同的颜色, 记为红色. 此时, 即可得到一个红 $K_{1,3}$. 因此, $r(K_{1,3}, K_{1,3}) = 6$. ■

11.11 $r(K_{1,4}, K_{1,4}) = 7$.

**证** 我们先考虑习题 11.11 中 $K_6$ 的红 – 蓝染色. 由于 $K_6$ 的红色子图为 $C_6$, 蓝色子图是 3 正则的, 则该红 – 蓝染色既不包含红 $K_{1,4}$, 也不包含蓝 $K_{1,4}$. 因而,$r(K_{1,4}, K_{1,4}) \geqslant 7$.

下面, 我们证明 $r(K_{1,4}, K_{1,4}) \leqslant 7$. 假设存在 $K_7$ 的红 – 蓝染色, 使得该红 – 蓝染色既不包含红 $K_{1,4}$, 也不包含蓝 $K_{1,4}$. 因而, $K_7$ 的每个顶点均恰好关联三条红边和三条蓝边; 否则,$K_7$ 必包含一个红 $K_{1,4}$ 或一个蓝 $K_{1,4}$. 在此情形下, $K_7$ 的红色子图是 7 阶 3 正则图, 导致矛盾. ■

11.13 $r(C_4, C_4) = 6$.

**证** 如图 32(a) 所示, $K_5$ 的红 – 蓝染色既不包含红 $C_4$, 也不包含蓝 $C_4$. 因此,$r(C_4, C_4) \geqslant 6$.

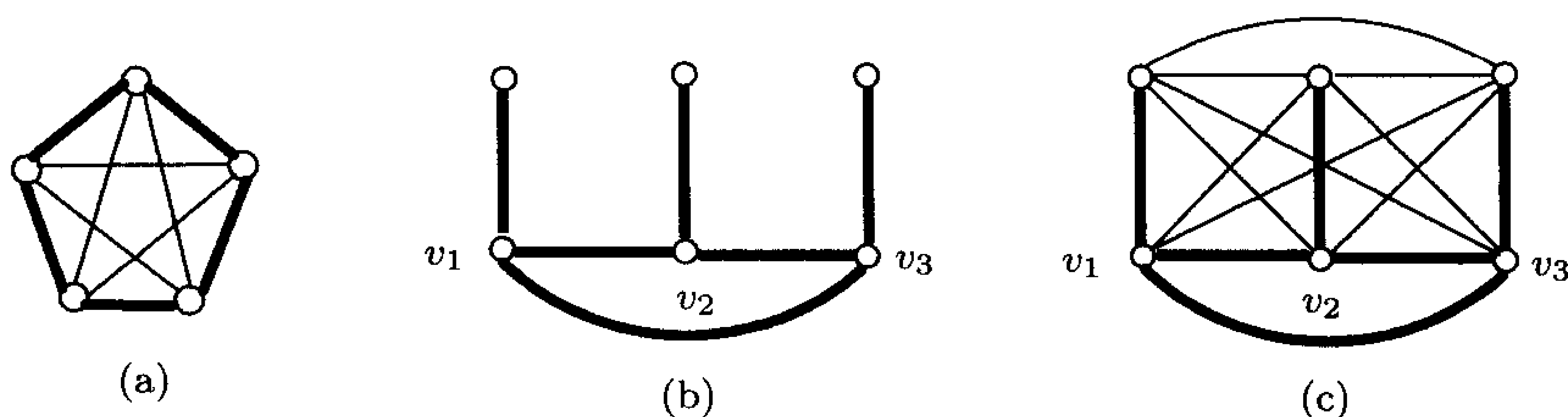



图 32 习题 11.13 中 $K_5$ 和 $K_6$ 的红 – 蓝染色

下面, 我们证明 $r(C_4, C_4) \leqslant 6$. 假设 $K_6$ 的红 – 蓝染色既不包含红 $C_4$, 也不包含蓝 $C_4$, 其中 $V(K_6) = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$. 由于 $r(K_3, K_3) = 6$, 则 $K_6$ 的红 – 蓝染色包含一个红 $K_3$ 或一个蓝 $K_3$. 设红 $K_3$ 为 $\langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle$. 若 $\{v_4, v_5, v_6\}$ 中存在某个顶点, 使得该顶点可与 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 中的两个顶点

通过红边邻接, 则 $K_6$ 包含一个红 $C_4$. 因此,$\{v_4, v_5, v_6\}$ 的任一顶点均与 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 中至少两个顶点通过蓝边邻接. 同时, $\{v_4, v_5, v_6\}$ 中任两个顶点均不能同时与 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 中某两个顶点通过蓝边邻接; 否则, 可以得到一个蓝 $C_4$, 导致矛盾. 这就意味着 $\{v_4, v_5, v_6\}$ 中每个顶点均恰好与 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 中两个顶点通过蓝边邻接, 一个顶点通过红边邻接. 因而, $K_6$ 包含一个如图 32(b) 所示的红色子图. 若 $\{v_4, v_5, v_6\}$ 中某两个顶点之间通过红边邻接, 则 $K_6$ 包含一个红 $C_4$, 导致矛盾. 因此,$\langle\{v_4, v_5, v_6\}\rangle$ 是一个蓝 $K_3$, 如图 32(c) 所示. 从而, 我们可以得到一个蓝 $C_4$, 导致矛盾. ■

11.15 **证** 设 $p = r(K_s, K_t)$, $G \cong K_{p-1}$. 对于 $G$ 的一个红 – 蓝染色, 在 $G$ 上添加一个新的顶点 $v$, 并通过红边将 $v$ 连接到 $G$ 的每个顶点, 按上述操作得到的图记为 $H$. 显然, $H \cong K_p$. 由于 $p = r(K_s, K_t)$, 则 $H$ 包含一个红 $K_s$ 或一个蓝 $K_t$. 若 $H$ 包含一个蓝 $K_t$, 则 $G$ 必包含一个蓝 $K_t$. 因而,$G$ 包含一个蓝 $K_{t-1}$. 否则,$H$ 包含一个红 $K_s$. 若该红 $K_s$ 不包含顶点 $v$, 则 $G$ 包含该红 $K_s$. 因而, $G$ 包含一个红 $K_{s-1}$. 若该红 $K_s$ 包含顶点 $v$, 则 $G$ 包含一个红 $K_{s-1}$. ■

11.19 (a) $G \cong K_{3,3,4}$, 其边数为 33.

(b) 最小正整数 $m$ 为 $33 + 1 = 34$.

11.21 $T_{5,1} = \overline{K}_5$, $T_{7,2} = K_{3,4}$, $T_{6,3} = K_{2,2,2}$, $T_{6,4} = K_{1,1,2,2}$, $T_{5,5} = K_5$.

11.23 提示: $1 + \lfloor k(n-1)/2 \rfloor$.

11.25 满足下面条件的最小正整数 $m$ 为 $\binom{n-1}{2} + 1$, 使得对于每个阶为 $n \geqslant 2$, 边数为 $m$ 的图均包含一条 Hamilton 路.

**证** 首先, 我们注意到阶为 $n$, 边数为 $\binom{n-1}{2}$ 的不连通图 $K_{n-1} \cup K_1$ 不包含 Hamilton 路. 下面我们只需证明: 对于任意阶为 $n$, 边数为 $\binom{n-1}{2} + 1$ 的图均包含一条 Hamilton 路. 设 $G$ 是一个阶为 $n$, 边数为 $\binom{n-1}{2} + 1$ 的图, $H \cong G + K_1$, 其中 $H$ 是通过在 $G$ 上添加一个新的顶点, 并连接该顶点到 $G$ 的每个顶点而得到. 因此,$H$ 的阶为 $n+1$, 边数为 $n + \binom{n-1}{2} + 1 = \binom{n}{2} + 2$. 由定理 11.18, $H$ 含有 Hamilton 圈 $C$. 在 $C$ 上移除顶点 $v$ 即可得到 $G$ 上的一条 Hamilton 路. ■

## 第 12 章 距离

12.1 $\text{rad}(G) = \text{diam}(G) = 5$, 且 $\text{Cen}(G) = G$.

12.3 注意: 如果 $s = 1$, 则 $\text{rad}(K_{s,t}) = 1$; 如果 $s \geqslant 2$, 则 $\text{rad}(K_{s,t}) = 2$. 且如果 $t = 1$, 则 $\text{diam}(K_{s,t}) = 1$; 如果 $t \geqslant 2$, 则 $\text{diam}(K_{s,t}) = 2$. 因此, 如果 $s = 1$ 且 $t \geqslant 2$, 则 $\text{Cen}(K_{s,t}) \cong K_1$, 否则,$\text{Cen}(K_{s,t}) = K_{s,t}$.

12.5 考虑图 12.3 中的图 $G_4$.

12.7 (a) 提示: 设 $v \in V(G)$ 使得 $e(v) = \mathrm{diam}(G)$. 对每个 $i$ $(0 \leqslant i \leqslant 2)$, 设 $S_i = \{u \in V(G):\ d(v,u) = i\}$, $S_3 = \{u \in V(G):\ d(v,u) \geqslant 3\}$. 则 $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ 是 $V(G)$ 的一个划分. 只要证明, 对所有 $x, y \in V(G)$, 均有 $d_{\overline{G}}(x,y) \leqslant 3$ 即可.

(b) 设 $G \cong P_4$.

12.9 **证** 不失一般性, 假设 $e(u) \geqslant e(v)$. 设 $x$ 是距离 $u$ 最远的一个顶点. 则 $d(u,x) = e(u)$. 根据三角不等式,

$$e(u) = d(u,x) \leqslant d(u,v) + d(v,x) \leqslant d(u,v) + e(v).$$

因此 $e(u) \leqslant d(u,v) + e(v)$, 这隐含了 $0 \leqslant e(u) - e(v) \leqslant d(u,v)$. 因此, $|e(u) - e(v)| \leqslant d(u,v)$. ■

12.11 **证** 设 $x, y \in V(G)$ 使得 $e(x) = \mathrm{rad}\, G$ 且 $e(y) = \mathrm{diam}\, G$, 并设 $P: x = u_0, u_1, u_2, \cdots, u_a = y$ 是一条 $x-y$ 路. 根据定理 12.2, 对于 $0 \leqslant j \leqslant a-1$, 有 $|e(u_j) - e(u_{j+1})| \leqslant 1$. 设 $i$ 是满足下面条件的最大整数: $0 \leqslant i \leqslant a-1$ 且 $e(u_i) < k$. 因此, $e(u_i) \leqslant k-1$, $e(u_{i+1}) \geqslant k$. 故 $e(u_{i+1}) - e(u_i) \geqslant 1$. 因为 $e(u_{i+1}) - e(u_i) \leqslant 1$, 所以根据定理 12.2, $e(u_{i+1}) - e(u_i) = 1$, 从而 $e(u_{i+1}) = 1 + e(u_i) = k$. ■

12.13 (a) **证** 设 $v$ 是 $T'$ 的一个顶点, 且 $e_T(v) = k$. 并设 $u$ 是 $T$ 的一个顶点, 使得 $d(v,u) = k$. 则必然地, $u$ 是 $T$ 的一个端点, 否则, 因为 $T$ 的 $v-u$ 路可以被延伸为 $T$ 的一条更长路, 这与 $e_T(v) = k$ 这一事实矛盾. 所以 $e_{T'}(v) = k-1$. 因此, $T'$ 中具有最小离心率的顶点也是 $T$ 中具有最小离心率的顶点, 从而 $\mathrm{Cen}(T) = \mathrm{Cen}(T')$. ■

(b) 提示: 注意图 $G$ 的中心位于 $G$ 的某个块中. 而对于树 $T$, 仅有的块为 $K_1$ 和 $K_2$.

(c) 提示: 观察到: 如果树 $T$ 的端点被删除, 则产生的树 $T'$, 满足 $\mathrm{diam}\, T' = \mathrm{diam}\, T - 2$.

12.15 $\mathrm{Per}(G) = G$.

12.17 如果 $s = 1$ 且 $t \geqslant 2$, 则 $\mathrm{Per}(K_{s,t}) \cong \overline{K}_t$, 否则, $\mathrm{Per}(K_{s,t}) = K_{s,t}$.

12.19 考虑 $P_9: v_1, v_2, \cdots, v_9$, 并设 $v = v_3$.

12.21 提示: 否.

12.23 提示: 如果 $G$ 是自中心的, 则 $\mathrm{Per}(G) = G$. 反之, 利用定理 12.7 证明, 对 $G$ 的每个顶点 $v$, 有 $e(v) = 2$.

12.25 提示: 否.

12.27 见图 33.

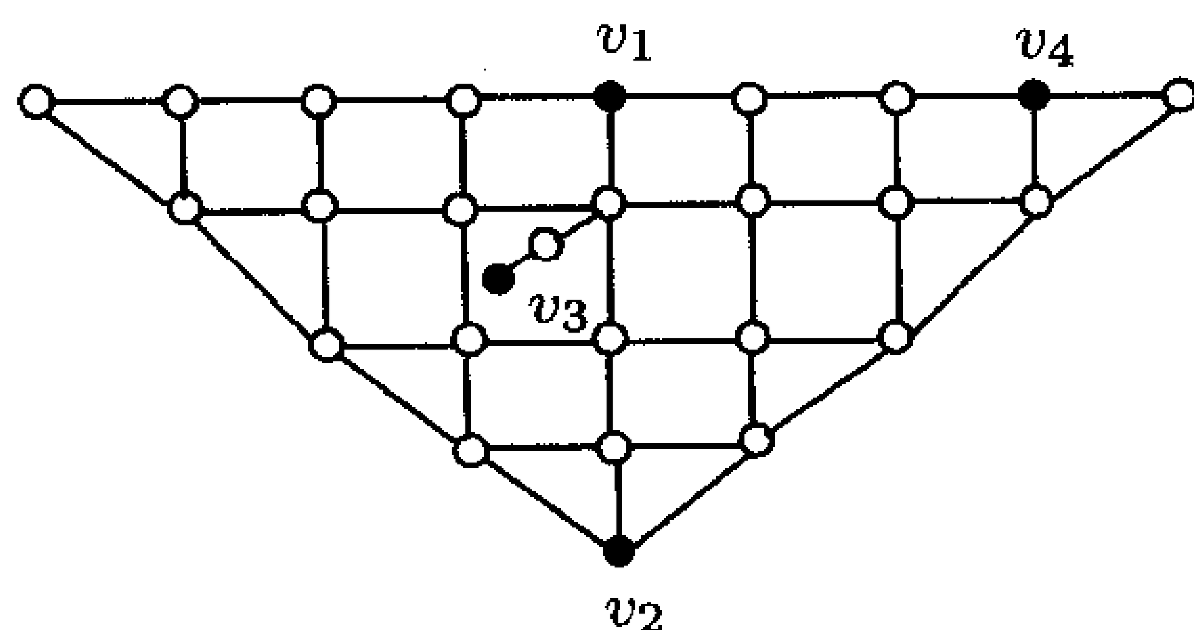



图 33 习题 12.27 的图 $G$

12.31 提示: 设 $V(G)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, 并设 $G'$ 是由 $G$ 通过增加 $n$ 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 并连接每个顶点 $v_i$ 到 $u_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 设 $P$ 和 $Q$ 是路 $P_5$ 的两个拷贝, 其中 $P:x_1,x_2,\cdots,x_5$, $Q:y_1,y_2,\cdots,y_5$. 设 $H$ 是由 $G'$, $P$ 和 $Q$ 通过连接 $P$ 和 $Q$ 的每个端点到达 $G$ 的每个顶点. 证明 $\mathrm{Cen}(H)=\mathrm{Int}(H)=G$.

## 第 13 章 控制

13.1 (a) $\gamma(G)=3$. (b) $\gamma_o(G)=4$.

13.3 当 $n\geqslant 2$ 时, $\gamma(K_n)=1$; $\gamma(P_n)=\lceil n/3\rceil$; 且当 $\min\{s,t\}=1$ 时,$\gamma(K_{s,t})=1$; 当 $\min\{s,t\}\geqslant 2$ 时,$\gamma(K_{s,t})=2$; $\gamma(Q_3)=2$; $\gamma(PG)=3$. 当 $n\geqslant 2$ 时, $\gamma_o(K_n)=2$; 且

$$\gamma_o(P_n)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & \text{如果 } n \text{ 是奇数}\\ \dfrac{n}{2} & \text{如果 } n\equiv 0 \pmod 4\\ \dfrac{n}{2}+1 & \text{如果 } n\equiv 2 \pmod 4.\end{cases}$$

$\gamma_o(K_{r,s})=2$, $\gamma_o(Q_3)=3$, 且 $\gamma_o(PG)=4$.

13.5 (a) 设 $G\cong C_4: u,x,v,y,u$. 则 $S=\{u,v\}$ 是 $G$ 的一个最小控制集, 其中 $N(x)\cap S=S$, $N(y)\cap S=S$.

(b) 提示: 设 $n=2k+1$, 其中 $k\geqslant 1$, 并设 $G$ 是由 $K_{1,k}$ 通过细分每条边得到的图, 则 $\gamma(G)=k$.

13.7 提示: 设 $G$ 是由 $K_{n-k}$ 通过增加 $k$ 个新的顶点 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 和 $k$ 条新的边 $u_iv_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 而得到的图, 其中 $V(K_{n-k})=\{v_1,v_2,\cdots,v_{n-k}\}$, 则 $G$ 是一个阶为 $n$ 的连通图, 且 $\gamma(G)=k$.

13.9 提示: 每个顶点 $v\in S$ 都不能被 $S-v$ 中任意顶点控制, 因此 $S-v$ 不是 $G$ 的控制集. 因此, $S$ 是极小控制集. 但 $S$ 未必是最小控制集. 例如, 设 $G=C_6: v_1,v_2,\cdots,v_6,v_1$, 并设 $S=\{v_1,v_3,v_5\}$.

13.11 (a) **证** 注意到: 如果 $\gamma(G)=1$, 则 $\gamma(\overline{G})\geqslant 2$. 因此, 立即可知下界可达. 下面我们来验证上界. 如果 $G$ 中含有孤立顶点, 则 $\gamma(G)\leqslant n$ 且 $\gamma(\overline{G})=1$; 而如果 $\overline{G}$ 中含有孤立顶点, 则 $\gamma(\overline{G})\leqslant n$ 且 $\gamma(G)=1$. 所以此时, $\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leqslant n+1$. 如果 $G$ 和 $\overline{G}$ 中都不含孤立顶点, 则根据推论 13.5, 可得 $\gamma(G)\leqslant n/2$, $\gamma(\overline{G})\leqslant n/2$, 从而 $\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leqslant n$. ■

(b) 设 $G=K_{1,n-1}$, 其中 $n\geqslant 2$.

(c) 设 $G=\overline{K}_n$.

13.13 对 $n>k\geqslant 2$, 设 $G$ 是由 $P_{k+2}: v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{k+1}$ 通过增加 $k$ 个新的顶点 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 和 $k$ 条新边 $u_iv_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 而得到的图. 则 $G$ 是不含孤立顶点的连通图且 $\gamma(G)=\gamma_o(G)=k$.

13.15 设 $G$ 是由 4 圈 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_1$ 通过增加顶点 $u_i$ 和 $v_i$ $(i=1,3)$ 而得到的图. 则 $\gamma(G)=2$ 且 $\gamma_o(G)=3$.

# 参考文献

## 第 2 章


1. Chartrand G., Erdős P. and Oellermann O. R., *How to define an irregular graph. College Math. J.* **19** (1988) 36–42.
2. Chartrand G., Holbert K. S., Oellermann O. R. and Swart H. C., *F-Degrees in graphs. Ars Combin.* **24** (1987) 133–148.
3. Chartrand G., Jacobson M. S., Lehel J., Oellermann O. R., Ruiz S. and Saba F., *Irregular networks. Congress. Numeran.* **64** (1988) 197–210.
4. Erdős P. and Kelly P. J., *The minimal regular graph containing a given graph. Amer. Math. Monthly* **70** (1963) 1074–1075.
5. Hakimi S. L., *On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph. SIAM J. Appl. Math.* **10** (1962) 496–506.
6. Havel V., *A remark on the existence of finite graphs (Czech.) Časopis Pěst. Mat.* **80** (1955) 477–480.
7. König D., *Theorie der endlichen und unendliehen Graphen.* Teubner, Leipzig (1936).
8. Wells D., *Are these the most beautiful? Math. Intelligencer.* **12** (1990) 37–41.


## 第 3 章


1. Baker G., Bruckner A., Michael E. and Yaqub A., *Paul J. Kelly, Mathematics: Santa Barbara.* 1995, University of California: In Memoriam.
2. Bondy J. A. and Hemminger R. L., *Graph reconstruction-a survey. J. Graph Theory* **1** (1977) 227–268.
3. Frucht R. W., *How I became interested in graphs and groups. J. Graph Theory* **6** (1982) 101–104.
4. König D., *Theorie der endlichen und unendliehen Graphen.* Teubner, Leipzig (1936).
5. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Ferdinand Georg Frobenius.*
   http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Frobenius.html
6. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Issai Schur.*
   http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schur.html
7. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Stanislaw Marcin Ulam.*
   http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Ulam.html


## 第 4 章


1. Borůvka O., O jistém Problému minimálním. *Práce Mor. Přírodověd. Spol. v Brně (Acta Societ. Scient. Natur. Moravicae)* **3** (1926) 37–58.
2. Cayley A., *A theorem on trees. Quart. J. Math.* **23** (1889) 276–378.
3. Graham R. L. and Hell P., *On the history of the minimum spanning tree problem. Annals of the History of Computing* **7** (1985) 43–57.

4. Kirchhoff G., *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme gefürht wird. Ann. Phys. Chem.* **72** (1847) 497–508.
5. Kruskal J. B., *On the shortest spanning tree of a graph and the traveling salesmen problem. Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956) 48–50.
6. Prim R. C., *Shortest connection networks and some generalizations. Bell Syst. Tech. J.* **36** (1957) 1389–1401.
7. Moon J. W. (personal communication).
8. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Arthur Cayley.* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cayley.html
9. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Gustaf Robert Kirchhoff.* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Kirchhoff.html

## 第 5 章

1. Chartrand G., Harary F. and Zhang P., *On the geodetic number of a graph. Networks* **39** (2002) 1–6.
2. Dirac G. A., *In abstrakten Graphen vorhande vollständigene 4-Graphen und ihre Unterteilungen. Math. Nachr.* **22** (1960) 61–85.
3. Harary F., *The maximum connectivity of a graph. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **48** (1962) 1142–1146.
4. Menger K., Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.* **10** (1927) 95–115.
5. Menger K., *On the origin of the n-arc theorem. J. Graph Theory* **5** (1981) 341–350.
6. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Karl Menger* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Menger.html
7. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Hassler Whitney* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Whitney.html
8. Whitney H., *Congruent graphs and the connectivity of graphs. Amer. J. Math.* **54** (1932) 150–168.

## 第 6 章

1. Berge C., *Théorie des Graphes et Ses Applications.* Dunod, Paris (1958).
2. Biggs N. L., Lloyd E. K. and Wilson R. J., *Graph Theory* 1736–1936. Oxford University Press, London (1976).
3. Bondy J. A. and Chvátal V., *A method in graph theory. Discrete Math.* **15** (1976) 111–136.
4. Chartrand G., Thomas T., Zhang P. and Saenpholphat V., *A new look at Hamiltonian walks. Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications.* To appear.
5. Chvátal V., *Claude Berge*: 5.6.1926–30.6.2002. http://www.cs.rutgers.edu/~chvatal/perfect/claude2.pdf
6. Descartes B., *The expanding unicurse.* In *Proof Techniques in Graph Theory* (edited by F. Harary), Academic Press, New York (1969) 25.
7. Dirac G. A., *Some theorems on abstract graphs. Proc. London Math. Soc.* **2** (1952) 69–81.
8. Euler L., *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae* **8** (1736) 128–140.
9. Gallai T., *Dénes König: A biographical sketch.* In *Theory of Finite and Infinite Graphs by* D. König (translated into English by R. McCoart), Birkäuser, Boston (1990).

10. Goodman S. E. and Hedetniemi S. T., *On Hamiltonian walks in graphs. SIAM J. Comput.* **3** (1974) 214–221.
11. Harary F., *Graph Theory.* Addison-Wesley, Reading, PA (1969).
12. Harary F. (personal communication).
13. Hersh R. and John-Steiner V., *A visit to Hungarian mathematics. Mathematical Intelligencer* **15** (1993) 13–26.
14. Hierholzer C., *Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu umfahren. Math. Ann.* **6** (1873) 30–32.
15. Januszewski M., *Kaliningrad.* http://castlesofpoland.com/prusy/krol_hist_en.htm
16. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Paul Adrien Maurice Dirac* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Dirac.html
17. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Leonhard Euler* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Euler.html
18. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Sir William Rowan Hamilton* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Hamilton.html
19. Ore O., *Note on Hamilton circuits. Amer. Math. Monthly* **67** (1960) 55.
20. Ore O., *Theory of Graphs.* Amer. Math. Soc. Providence, RI (1962).
21. Ore O., *Graphs and Their Uses.* Random House, New York (1963).
22. Posa L., *A theorem concerning Hamilton lines. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **7** (1962) 225–226.
23. Russian News Network, *Kaliningrad.* http://www.russiannewsnetwork.com/Kaliningrad.html
24. Zykov A. A., *Teoriia Konechnykh Grafov.* Nauka, Novosibirsk (1969).
25. Zykov A. A. (personal communication).

## 第 7 章

1. Camion P., *Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. C. R. Acad. Sci. Pairs* **249** (1959) 2151–2152.
2. Page W., *An interview with Herbert Robbins. College Mathematics Journal* **15** (1984) 2–24.
3. Rédei L., *Ein Kombinatorischer Satz. Acta Litt. Szeged* **7** (1934) 39–43.
4. Robbins H. E., *A theorem on graphs, with an application to a problem in traffic control. Amer. Math. Monthly* **46** (1939) 281–283.
5. Siegmund D., *Herbert Robbins and sequential analysis. Annals of Statistics* **31** (2003) 349–365.

## 第 8 章

1. Armbruster F. O., http://www.coloradobootstrap.com/franz/
2. Armbruster F. O. (personal communication).
3. Biggs N., *Professor W. T. Tutte: Mathematician and Bletchley code-breaker.* http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Obits2/ Tutte_Independent.html
4. Chartrand G., Erwin D., VanderJagt D. W. and Zhang P., $\gamma$-Labelings of graphs. Preprint.
5. Erdős P., *Personal reminiscences and remarks on the mathematical work of Tibor Gallai. Combinatorica* **2** (1982) 207–212.
6. Gallai T., *Über extreme Punkt- und Kantenmengen. Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvöst Sect. Math.* **2** (1959) 133–138.

7. Gallian J. A., *A dynamic survey of graph labeling. Electron. J. Combin.* #DS6 (October 2003 Version).
8. Hall P., *On representation of subsets. J. London Math. Soc.* **10** (1935) 26–30.
9. Hobbs A. M. and Oxley J. G., William T. Tutte (1917–2002). *Notices Amer. Math. Soc.* **51** (2004) 320–332.
10. Kirkman T. P., *On a problem in combinations. Cambridge and Dublin Math. J.* **2** (1847) 191–204.
11. König D., *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. Math. Ann.* **77** (1916) 453–465.
12. Lovász L., *Tibor Gallai is seventy years old. Combinatorica* **2** (1982) 203–205.
13. Lützen T., Sabidussi G. and Toft B., Julius Petersen 1839–1910: *A biography. Discrete Math.* **100** (1992) 9–82.
14. Mulder H. M., *Julius Petersen's theory of regular graphs. Discrete Math.* **100** (1992) 157–175.
15. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *August Leopold Crelle* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Crelle.html
16. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Philip Hall* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Hall.html
17. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Thomas Penyngton Kirkman* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Kirkman.html
18. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Jakob Steiner* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Steiner.html
19. Petersen J., *Die Theorie der regulären Graphen. Acta Math.* **15** (1891) 193–220.
20. Ray-Chaudhuri D. K. and Wilson R. M., *Solution of Kirkman's schoolgirl problem. Combinatorics* (*Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. XIX, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, RI. (1971) 187–203.
21. Rosa A., *On certain valuations of the vertices of a graph.* In *Theory of Graphs, Proc. Internat. Sympos. Rome* 1966. Gordon and Breach, New York (1967) 349–355.
22. Sabidussi G., *Correspondence between Sylvester Petersen, Hilbert and Klein on invariants and the factorisation of graphs 1889–1891. Discrete Math.* **100** (1992) 99–155.
23. Saxon W., William Tutte, 84, *Mathematician and code-breaker, dies. New York Times*, October 30, 2002.
24. Tutte W.T., *A short proof of the factor theorem for finite graphs. Canad. J. Math.* **6** (1954) 347–352.

## 第 9 章

1. Chartrand G., Gavlas. H. and Schultz M., Framed! *A graph embedding problem. Bull. Inst. Combin. Appl.* **4** (1992) 35–50.
2. Erdős P. and Kelly P. J., *The minimal regular graph containing a given graph. Amer. Math. Monthly* **70** (1963) 1074–1075.
3. Euler L., *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.* **4** (1758) 140–160.
4. Krasinkiewicz J., *A note on the work and life of Kazimierz Kuratowski. J. Graph Theory* **5** (1981) 221–223.
5. Kuratowski K., Sur la problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.* **15** (1930) 271–283.

6. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Kazimierz Kuratowski*
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/
Kuratowski.html
7. Ringel G. and Youngs J. W. T., *Solution of the Heawood map-coloring problem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **60** (1968) 438–445.
8. Robertson N. and Seymour P. D., *Generalizing Kuratowski's theorem. Congr. Numeran.* **45** (1984) 129–138.
9. Robertson N. and Seymour P. D., *Graph minors.* VIII A Kuratowski theorem for general surfaces. *J. Combin. Theory Ser. B* **48** (1990) 255–288.
10. Robertson N. (personal communication).
11. Wagner K., *Üer eine Eigenschaft der ebene Komplexe. Math. Ann.* **114** (1937) 570–590.

## 第 10 章

1. Appel K., Haken W. and Koch J., *Every planar map is four-colorable. Illinois J. Math.* **21** (1977) 429–567.
2. Beineke L. W. and Wilson R. J., *On the edge-chromatic number of a graph. Discrete Math.* **5** (1973) 15–20.
3. Brooks R. L., On coloring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **37** (1941) 194–197.
4. Chartrand G., Saba F., Salehi E. and Zhang P., *Local colorings of graphs Util. Math.* To appear.
5. Descartes B., *On some recent progress in combinatorics. J. Graph Theory* **1** (1977) 192.
6. Gutin G. and Toft B., *Interview with Vadim G.* Vizing, *European Mathematical Society Newsletter* No. 38, (December 2000) 22–23.
7. Harary F., *Conditional colorability in graphs. Graphs and Applications.* (edited by F. Harary and J. Maybee) Wiley, New York (1985) 127–136
8. König D., *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. Math. Ann.* **77** (1916) 453–465.
9. Mycielski J., *Sur le coloriage des graphes. Colloq. Math.* **3** (1955) 161–162.
10. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Garrett Birkhoff*
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/
Birkhoff_Garrett.html
11. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *George David Birkhoff*
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/
Birkhoff.html
12. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *John Heawood*
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/
Heawood.html
13. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Alfred Bray Kempe*
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Kempe.html
14. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *August Ferdinand Möbius*
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Möbius.html
15. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *James Joseph Sylvester*
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/
Sylvester.html
16. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Peter Guthrie Tait*
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Tait.html

17. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Peter Heinrich Franz Friedrich Tietze* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Tietze.html
18. Ringel G. and Youngs J. W. T., *Solution of the Heawood map-coloring problem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **60** (1968) 438–445.
19. Robertson N., Sanders D., Seymour P. D. and Thomas R., *The four-color theorem. J. Combin. Theory Ser.* B **70** (1997) 2–44.
20. Szekeres G. and Wilf H. S., *An inequality for the chromatic number of a graph. J. Combin. Theory* **4** (1968) 1–3.
21. Tutte W. T., *On hamiltonian circuits. J. London Math. Soc.* **2** (1946) 98–101.
22. Vizing V. G., *On an estimate of the chromatic class of a p-graph. Diskret. Analiz.* **3** (1964) 25–30.
23. Vizing V. G. (personal communication).
24. Wilson R., *Four Colors Suffice: How the Map Problem was Solved.* Princeton University Press, Princeton, NJ (2002).

## 第 11 章

1. Bialostocki A. and Voxman W., *Generalizations of some Ramsey-type theorems for matchings. Discrete Math.* **239** (2001) 101–107.
2. Chvátal V., *Tree-complete ramsey numbers. J. Graph Theory* **1** (1977) 93.
3. Erdős P. and Rado R., *A combinatorial theorem. J. London Math. Soc.* **25** (1950) 249–255.
4. Eroh L., *Rainbow Ramsey Numbers.* Ph.D. Dissertation, Western Michigan University (2000).
5. Eroh L., *Rainbow Ramsey numbers of stars and matchings. Bull. Inst. Combin. Appl.* **40** (2004) 91–99.
6. Grossman J., *The Erdős Number Project.* http://personalwebs.oakland.edu/~grossman/erdoshp.html
7. Hoffman P., *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth.* Hyperion, New York (1998).
8. Mellor D. H., *The eponymous F. P. Ramsey. J. Graph Theory* **7** (1983) 9–13.
9. O'Connor J. J. and Robertson E. F., *Paul Erdős* http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Erdos.html
10. Odda T., *On properties of a well-known graph or what is your Ramsey number?* In *Topics in Graph Theory* (edited by F. Harary) New York Academy of Sciences, New York (1977) 166–172.
11. Ramsey F., *On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc.* **30** (1930) 264–286.
12. Simonovits M., *On Paul Turán's influence on graph theory. J. Graph Theory* **1** (1977) 102–116.
13. Spencer J., *Ramsey Theory and Ramsey theoreticians. J. Graph Theory* **7** (1983) 15–23.
14. Szemerédi E., *On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression. Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **20** (1969) 89–104.
15. Szemerédi E., *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. Acta Arith.* **27** (1975) 199–245.
16. Turán P., *Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. Mat. Fiz. Lapok* **48** (1941) 436–452.
17. Turán P., *A note of welcome. J. Graph Theory* **1** (1977) 7–9.
18. van der Waerden B., *Beweis einer Baudetschen vermutung. Nieuw Arch. Wisk* **15** (1927) 212–216.
19. *Erdős-Bacon Numbers.* http://www.simonsingh.net/Erdos-Bacon_Numbers.html
20. *N is a Number*, video, Mathematical Association of America.
21. *UVA Computer Science: The Oracle of Bacon at Virginia.* http://www.cs.virginia.edu/oracle/

## 第 12 章

1. Bielak H. and Syslo M.M., *Peripheral vertices in graphs. Studia Sci. Math. Hungar.* **18** (1983) 269–275
2. Buckley F., Miller Z. and Slater P. J., *On graphs containing a given graph as center. J. Graph Theory* **5** (1981) 427–434.
3. Chartrand G., Erwin D., Johns G. L. and Zhang P., *Boundary vertices in graphs. Discrete Math.* **263** (2003) 25–34.
4. Chartrand G., Erwin D. and Zhang P., *A graph labeling problem suggested by FM channel restrictions. Bull. Inst. Combin. Appl.* To appear.
5. Chartrand G., Escuadro H. and Zhang P., *Detour distance in graphs.* Preprint.
6. Chartrand G., Erwin D., Harary F. and Zhang P., *Radio labelings of graphs. Bull. Inst. Combin. Appl.* **33** (2001) 77–85.
7. Chartrand G., Gu W., Schultz M. and Winters S. J., *Eccentric graphs. Networks.* **34** (1999) 115–121.
8. Chartrand G., Saba F. and Zou H. B., *Edge rotations and distance between graphs. Časopis Pěst. Mat.* **113** (1985) 87–91.
9. Chartrand G., Schultz M. and Winters S. J., *On eccentric vertices in graphs. Networks.* **28** (1996) 181–186.
10. Hale W., *Frequency assignment: theory and applications. Proc. IEEE* **68** (1980) 1497–1514.
11. Harary F. and Norman R. Z., *The dissimilarity characteristic of Husimi trees. Ann. of Math.* **58** (1953) 134–141.
12. Hedetniemi S.T. (personal communication).
13. Georges J. P., and Mauro D. W., *On the size of graphs labeled with a condition at distance two. J. Graph Theory* **22** (1996) 47–57.
14. Georges J. P., and Mauro D. W., *On the criticality of graphs labelled with a condition at distance two. Congr. Numer.* **101** (1994) 33–49.
15. Georges J. P., and Yeh R. K., *Labelling graphs with a condition at distance two. Siam J. Discrete Math* **5** (1992) 586–595.
16. Ostrand P. A., *Graphs with specified radius and diameter. Discrete Math.* **4** (1973) 71–75.
17. Slater P.J., *Leaves of trees. Congress. Numer.* **14** (1975) 549–559.
18. Slater P.J., *Dominating and reference sets in graphs. J. Math. Phys. Sci.* **22** (1988) 445–455.
19. *Edwin Armstrong: The creator of FM radio.*
   http://securehosts.com/techa/armstrong.htm
20. *Minimum distance separation between stations. Code of Federal Regulations*, Title 47, sec. 73.207.

## 第 13 章

1. Berge C., *Théorie des Graphes et Ses Applications.* Dunod, Paris (1958).
2. Chartrand G., Haynes T. W., Henning M. A. and Zhang P., *Stratification and domination in graphs. Discrete Math.* **272** (2003) 171–185.
3. Cockayne E.J. and Hedetniemi S.T., *Towards a theory of domination in graphs. Networks* **7** (1977) 247–261.
4. Cockayne E.J., Dawes R.M. and Hedetniemi S.T., *Total domination in graphs. Networks* **10** (1980) 211–219.

5. Coonce H. B. (personal communication).

6. Haynes T.W., Hedetniemi S.T. and Slater P.J., *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

7. Ore O., *Theory of Graphs.* Amer. Math. Soc. Providence, RI (1962).

8. Rashidi R., *The Theory and Applications of Stratified Graphs.* Ph.D. Dissertation, Western Michigan University (1994).

9. Sutner K. *Linear celluar automata and the Garden-of-Eden. Math. Intelligencer* **11** (1989) 49–53.

10. Walikar H.B., Acharya B. D. and Sampathkumar E., *Recent developments in the theory of domination in graphs.* Mehta Research Institute Allahabad, MRI *Lecture Notes in Math.* **1** (1979)

11. *Lights Out.*
    http://www.afrol.com/services/Games/lightsout.htm

12. *The Graph Theory White Pages* (maintained by D.P. Sanders)
    http://www1.cs.columbia.edu/sanders/graphtheory/people/alphabetic.html

13. John Wiley & Sons, Inc. *Publsher's Note. J. Graph Theory* **1** (1977) 1.

14. *The Mathematics Genealogy Project.* (H.B. Coonce, managing director)
    http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/

## 附录

1. Chartrand G., Polimeni A. D. and Zhang P., *Mathematical Proofs: A Transition to Advanced Mathematics.* Addison-Wesley, Boston, MA (2003).

# 人名索引

Abel Niels 185
Alavi Yousef 337
Allaire Frank 235
Appel Kenneth 235
Armbruster Franz 192

Berge Claude 138, 319
Bernhard Frank 235
Bernoulli Jaques 117
Bernoulli Johann 117
Bialostocki Arie 281
Bieberbach Ludwig 110
Bielak Halina 295
Birkhoff Garrett 234
Birkhoff George David 102, 234
Bondy J. Adrian 130
Borůvka Otakar 83
Brauer Richard 64
Brooks R. Leonard 174, 243
Brouwer Luitzen 110
Burnside William 164

Camion Paul 153
Cantor Georg 110
Cauchy Augustin-Louis 89, 287
Cayley Arthur 61, 89, 231, 255, 287
Chebyshev Pafnuty Lvovich 285
Chvátal Vašek 130
Cockayne Ernie 319, 328
Coonce Harry B. 338
Courant Richard 147
Coxeter H.S.M. (Donald) 174
Cray Stephen 235
Crelle August 185
Czekanowski Jan 83

Dawes Robyn 328
de la Vallée Poussin Charles 286
De Morgan Augustus 230
Descartes Blanche 139, 236
Dirac Gabriel 112, 129
Dirac Paul 129
Dirichlet Lejeune 186
Dürre Karl 235

Einstein Albert 287
Erdős Paul 36, 83, 89, 118, 137, 167, 225, 275, 280, 285, 287, 289
Eroh Linda 282
Euler Leonhard 89, 195, 287

Fejér Leopold 285
Franklin Philip 234
Frobenius Ferdinand Georg 63
Frucht Roberto 64

Gallai Tibor 137, 167, 275, 285-286
Gallian Joseph A. 200
Gauss Carl Friedrich 286
Golomb Solomon 198
Goodman Seymour 134
Gowers W. Timothy 280
Graham Ronald L. 83, 280, 289
Greene Brian 288, 289
Grossman Jerrold 287
Guthrie Francis 230
Guthrie Frederick 233

Hadamard Jaques 286
Hahn Hans 110
Haken Wolfgang 229, 235–236

Hakimi S. Louis 38
Hale William 312
Hall Philip 164, 234
Hamilton William Rowan 125, 230
Harary Frank 35, 104, 139–140, 293, 337
Hausdorff Felix 110
Havel Václav 38
Haynes Teresa 320
Heawood Percy John 233, 255
Hedetniemi Stephen 134, 293, 319, 328
Heesch Heinrich 234
Hell Pavol 83
Hierholzer Carl 120
Hoffman Frederick 337
Holland John 293

Jacobi Carl 185
Jordan Camille 110

Kelly Paul J. 36, 69, 225
Kempe Alfred Bray 196, 231, 253, 255
Kirchhoff Gustav 90, 195
Kirkman Thomas Penyngton 127, 181, 186
Klein Esther 167, 275
Klein Felix 61, 195
Koch John 235
König Dénes 36, 63, 64, 110-111, 137–148, 166–167, 224–225, 253
Kotzig Anton 187
Kruskal John Bernard 83
Kuratowski Kazimierz 69, 207

Lagrange Joseph-Louis 61
Lehmer Derrick 289
Lyndon Roger 83

Mac Lane Saunders 234
May Kenneth 230
Mayer Jean 234
Menger Karl 110
Milgram Stanley 288
Minkowski Hermann 137
Möbius August 186, 237
Moon John W. 90
Mycielski Jan 244

Nash John 138

Ore Oystein 128

Peano Giuseppe 110
Petersen Julius 174
Poincaré Jules Henri 234
Pólya George 286
Posa Lajos 131
Prim Robert Clay 85

Rado Richard 64
Ramsey Frank Plumpton 264
Rashidi Reza 330
Ray-Chaudhuri Dijen 182
Rédei László 150
Ringel Gerhard 186
Robbins Herbert E. 147
Robertson Neil 223
Rosa Alexander 188
Roth Klaus 280
Russell Bertrand 264

Sanders Daniel P. 236, 338
Schossow Fredrick 192
Schur Issai 63
Selberg Atle 286
Seymour Paul 223, 236
Sherwani Naveed 330
Shimamoto Yoshio 235
Slater Peter 303, 320
Smith Henry 231, 255
Sós Vera 286

Stanton Ralph G. 174, 338
Steiner Jakob 185
Stemple Joel 234
Stone Arthur 174
Straus Ernst 287
Sutner Klaus 336
Swart Edward 235
Sylvester James Joseph 195
Syslo Maciej 295
Szekeres George 167, 275
Szemerédi Endre 279

Tait Peter Guthrie 196, 232, 253, 348
Teller Edward 69
Temple Frederick 233
Thomas Robin 236
Tietze Heinrich 238
Turán Paul 137, 167, 275
Turing Alan 174
Tutte William T. 139, 223, 235, 254, 338

Ulam Stanislaw M. 69

van der Waerden Bartel 279
Veblen Oswald 137
Vizing Vadim G. 249
von Neumann John 69
Voxman William 281

Wagner Klaus 211, 222
Wells David 44
Whitehead Alfred North 264
Whitney Hassler 102, 111, 147, 174, 235
Wielandt Helmut 64
Wilf Herbert 147
Wilson Richard 182
Wylie Shaun 174

Youngs J.W.T. (Ted) 220

Zykov Alexander A. 139, 249

# 数学术语索引( 按拼音排序 )


**B**

半径 291, 309
包含 8
保色同构 330
闭链 10
闭邻域 319
边 1, 8
边的成本 89
边独立数 166
边覆盖 166
边覆盖数 166
边割 100
边界
　　图的边界点 298
　　顶点的边界点 298
　　区域的边界 203
边连通度 101
边染色 248
边色数 248
边诱导子图 9
标号
　　优美的 186
标号图 3
Brooks 定理 243
补
　　染色 261
　　标号 186, 314
补图 18
不规则图 44
部集 19, 21
不可避免的可约构形集合 234
不可分图 96
不连通图 12
不相交路的集合 112

**C**

C 可约性 235
彩色 $F$ 279
彩色 Ramsey 数 279
参数 27
Cayley 染色有向图 62
Cayley 树公式 89
测地
　　集 113
　　数 113
测地线
　　图中的测地线 14
　　有向图中的测地线 309
层 329
超立方体 22
重构
　　猜想 69
　　问题 69

**D**

D 可约性 235
代码 303
2 单元 217
　　嵌入 214
单纯点 114
单色 $F$ 279
点覆盖 168
点覆盖数 168
点连通度 100
点独立数 168, 238
叠合顶点 221
顶点 1
　　集 1
顶点的闭区间 113
顶点的度 27
　　多重图中顶点的度 31
　　图中顶点的度 27
顶点割 99

顶点可迁图 60
定位
    代码 303
    集 303
定位数 303
定向 25
定向图 25, 142
度 $r$ 正则 33
度序列 37
独立点 27
独立集
    边的独立集 162
    点的独立集 164
独立数 168, 238
度量 291
端点 27
对称有向图 142
对偶 236

**E**

二部图 19
二项式标号 199
Erdős 数 287
Erdős–Bacon 数 288
Euler 的
    有向图 144
Euler 多面体公式 44
Euler 恒等式 204
Euler 回路
    有向图中 Euler 回路 144
    图中 Euler 回路 116
Euler 迹 117

**F**

Frucht 定理 64
F 不规则图 45
F 控制集 331
F 控制数 331
F 染色 331
F 正则图 45
非标号图 3
非平凡图 2
非平面的 202
非同构图 49
分层 330
分层图 330
分层图的根 330
分离
    顶点分离集 108
    两个顶点的分离 108
分解 175
覆盖 166
赋权图 47

**G**

Gallai 恒等式 168
g 笼 197
Grötzsch 图 244
$\gamma$ 标号的跨距 199
$\gamma$ 标号 198
$\gamma$ 最大标号 199
$\gamma$ 最小标号 199
割边 75
割点 93
哥尼斯堡七桥问题 118
关灯游戏 335
关联的 8, 25
关联矩阵 42
广播
    标号 314
    $k$ 染色 312–313
    $k$ 色数 313
    数 314
轨道 60

**H**

$H$ 可分解 184
Hamilton
    有向图 150
    图 123
Hamilton 链 133
Hamilton 路
    有向图中的 Hamilton 路 150
    图中的 Hamilton 路 124
Hamilton 圈

有向图中的 Hamilton 圈 150
图中的 Hamilton 圈 123
Hamilton 因子分解 178
Harary 图 35
Heawood 图 198
Heawood 地图染色定理 258
合作图 287
红 $F$ 265
红 – 蓝染色 265
分层图中红 – 蓝染色 330
弧 24
环 24
回路
有向图中的回路 142
图中的回路 11
婚姻定理 166

J
奇
点 29
连通分支 172
圈 12
迹 10
基础图
多重图的基础图 46
有向图的基础图 143
极大平面图 207
极点 114, 299
极小
边割 100
不可嵌入 223
非平面的 223
控制集 324
阶 2
经典 Ramsey 数 268
竞赛图 148
互比竞赛图 155
局部色数 261
局部染色 260
距离
图中的距离 14
有向图中的距离 143
距离的对称性 291
距离三角不等式 291
距离相似顶点 305
矩阵
关联矩阵 42
邻接矩阵 41
矩阵树定理 90

K
$k$ 边染色 248
$k$ 分层 330
$k$ 分层图 330
$k$ 可染色的 237
$k$ 连通的 100
$k$ 圈 11
$k$ 染色 237
$k$ 色的 237
开控制 325
数 325
开控制集 325
开链 10
开邻域 321
可重构图 87
可 Hamilton 因子分解的 178
可迁竞赛图 149
可识别的参数/性质 67
可图的序列 38
可约构形 234
可因子分解的 180
可 1 因子分解的 175
可 2 因子分解的 177
可 $F$ 因子分解的 180
Kempe 链 232
Kevin Bacon 游戏 288
Kirkman 三元系 182
Kirkman 女学生问题 182
König 定理 253
空图 18
控制 321
控制集 321
控制数 321
Kruskal 算法 84
框架 226
框架数 226

块 97
亏格为 $k$ 的曲面 216
亏损 226
Kuratowski 定理 210

**L**

$L(2,1)$ 标号 314
蓝 $F$ 265
立方体 22
立方图 33
立即疯 189
离心
    图 297
    子图 297
离心点
    图的离心点 296
    顶点的离心点 296
离心率 291, 309
链
链的长度 10, 142
    有向图中的链 142
    图中的链 10
连接两个顶点 9
连通
    有向图 143
    图 12
    顶点 12
连通度 100
连通分支 12
两点之间 298
两个图的联 21
邻点 8, 27, 321
邻接
    到 24
    自 24
邻接的
    边 8
    顶点 2, 8
邻接矩阵 41
邻域 27, 163, 321
    闭的 321
    开的 321
路
    多重图中的路 118
    有向图中的路 142
    图中的路 11

**M**

毛毛虫 76
McGee 图 198
Menger 定理 351

**N**

内部 300
    顶点 300
内部不相交的路 108, 111
内点 108

**O**

偶
    点 29
    连通分支 172
    圈 12

**P**

$P$ 色数 260
Petersen 图 33
Petersen 定理 175
匹配 162
频道分配问题 312
平行边 24
平面图 202
    极大的 207
平图 202
平凡的
    图 2
    链 10
Prim 算法 85

**Q**

齐次嵌入 226
强有向图 143
强连通有向图 143
区域 203
圈

有向图中的圈 142
图中的圈 11
群的生成元 60

R
$r$ 正则图 33
入度 31, 142
染色 237
弱连通有向图 143

S
三度地图 253
三角形 11
三间房子和两种设施问题 202
三元组 182
色类 238, 330
色数 237
色指标 248
上 Hamilton 数 135
生成
树 82
子图 8
生成集 60
收缩 221
收缩一条边 221
受限多色 Ramsey 数 283
树 76
树的根 77
四色
猜想 233
问题 230
Steiner 三元系 184
森林 77

T
Tait 染色 254
条件染色 260
同构
分层图同构 330
图同构 50
有向图同构 149
同构的
图 49
有向图 149
同构类 56
通过一次边旋转 217
图 1, 8
图的笛卡儿乘积 21
图的亏格 216
图的中心 291
图的子式定理 223
图论第一定理 27
图嵌入
嵌入到一个平面中 214
嵌入到一个曲面中 217
嵌入到一个图中 225
团 241
团数 241
Turán 图 277
Turán' 定理 277
Tutte-Coxeter 图 198

V
Vizing 定理 249

W
Wagner 定理 223
外围 294
外围点 294
外区域 203
完备点 114
完美匹配 166
完全
二部图 20
多部图 21
$k$ 部图 21
图 17
围长 196
五个王子问题 237
五色定理 256
五座宫殿问题 238
无三角形的图 244

X
相似顶点 60

相同的
    链 42
    图 2
细分
    图 132
    图的细分 210
星 20
旋转 318
旋转距离 318
    图 318
循环分解 185
循环因子分解 176

**Y**

宴会定理 44
叶 27
一致嵌入 226
以距离 2 标号 315
因子 180
1 因子 170
2 因子 176
因子分解 175
1 因子分解 175
影子
    图 244
    顶点 244
诱导子图 9
由集合所诱导的
    由边集合所诱导的 9
    由顶点集合所诱导的 9
有根树 77
友好的 163
优美的
    图 187
    标号 186
有向
    边 24, 142
    链 142
    回路 142
    迹 142
    距离 143, 309
    路 142
    圈 142
    图 24
有向图的逆 148
有向图理论第一定理 142

**Z**

真染色 237
真子图 8
正则图 33
值
    $\gamma$ 标号的值 199
    广播标号的值 315
    广播 $k$ 染色的值 314
    局部染色的值 261
    染色的值 260
直径 14, 291, 309
纸牌 67
纸牌的解 70
自补图 51
自同构 58
自同构群 58
自同构群 58
自中心图 291
子式 221
子图 8
    诱导子图 9
子有向图 142
中心顶点 291
总体
    亏损 224
    距离 115
    控制 327
最大
    度 27
    独立集 168
    亏损 224
    匹配 166
    染色 280
最小
    边覆盖 166
    边割 101
    边染色 280
    测地集 113
    度 27

点覆盖 168
顶点割 99
定位集 313
分离集 108
$F$ 控制集 331
$F$ 染色 331-332
公共子图 317
广播标号 314
广播 $k$ 染色 313
开控制集 325
局部染色 261
控制集 331
染色 237
生成树 83
生成树问题 83

# 符号列表


| 符号 | 含义 | 页码 |
| --- | --- | --- |
| $V, V(G)$ | $G$ 的顶点集 | 1 |
| $E, E(G)$ | $G$ 的边集 | 1 |
| $G = H$ | 图 $G$ 和 $H$ 相等 | 2 |
| $H \subseteq G$ | $H$ 是 $G$ 的子图 | 8 |
| $\langle S\rangle, \langle X\rangle$ | 诱导或边诱导子图 | 9 |
| $G - e, G - X$ | 从 $G$ 中删除边 | 9 |
| $G - v, G - U$ | 从 $G$ 中删除边顶点 | 9 |
| $G + e$ | 添加边 $e$ 到 $G$ 上 | 10 |
| $G \cup H$ | 从顶点互不相交的 $G$ 和 $H$ 构造图 | 13 |
| $d(u, v)$ | $u$ 和 $v$ 之间的距离 | 14 |
| $\mathrm{diam}(G)$ | $G$ 的直径 | 14 |
| $K_n$ | $n$ 阶完全图 | 17 |
| $P_n$ | $n$ 阶路 | 17 |
| $C_n$ | $n$ 阶圈 | 17 |
| $\overline{G}$ | $G$ 的补图 | 18 |
| $\overline{K}_n$ | $n$ 阶空图 | 18 |
| $K_{s,t}$ | 完全二部图 | 20 |
| $K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$ | 完全 $k$ 部图 | 21 |
| $G + H$ | $G$ 和 $H$ 的联 | 21 |
| $G \times H$ | $G$ 和 $H$ 的笛卡儿积 | 21 |
| $Q_n$ | $n$ 方体 | 22 |
| $\deg v$ | 顶点 $v$ 的度 | 27 |
| $N(v)$ | 邻域, 开邻域 | 27 |
| $\delta(G)$ | $G$ 的最小度 | 27 |
| $\Delta(G)$ | $G$ 最大度 | 27 |
| $\mathrm{od}\, v$ | $v$ 的出度 | 31 |
| $\mathrm{id}\, v$ | $v$ 的入度 | 31 |
| $H_{r,n}$ | Harary 图 | 35 |
| $A$ | 邻接矩阵 | 41 |

| | | |
|---|---|---|
| $F \deg v$ | $v$ 的 $F$ 度 | 45 |
| $G \cong H$ | $G$ 同构于 $H$ | 48 |
| $G \ncong H$ | $G$ 非同构于 $H$ | 49 |
| $\text{Aut}(G)$ | $G$ 的自同构群 | 58 |
| $w(e)$ | 边 $e$ 的权值 | 83 |
| $w(H)$ | 子图 $H$ 的权值 | 83 |
| $\kappa(G)$ | $G$ 的连通度 | 100 |
| $\lambda(G)$ | $G$ 的边连通度 | 101 |
| $I[S]$ | 顶点集 $S$ 的闭区间 | 113 |
| $g(G)$ | $G$ 的测地数 | 113 |
| PG | Petersen 图 | 124 |
| $k(G)$ | $G$ 的连通分支数 | 127 |
| $C(G)$ | $G$ 的闭包 | 130 |
| $h(G)$ | $G$ 中 Hamilton 道路的长度 | 133 |
| $h^*(G)$ | $G$ 的 Hamilton 数 | 134 |
| $h^+(G)$ | $G$ 的上 Hamilton 数 | 135 |
| $\vec{d}(u,v)$ | 从 $u$ 到 $v$ 的有向距离 | 143 |
| $\beta_1(G)$ | $G$ 的边独立数 | 166 |
| $\alpha_1(G)$ | $G$ 的边覆盖数 | 166 |
| $\beta(G)$ | $G$ 的独立数 | 168 |
| $\alpha(G)$ | $G$ 的点覆盖数 | 168 |
| $k_o(G)$ | $G$ 的奇连通分支数 | 172 |
| $\text{val}(f)$ | $\gamma$ 标号的值 | 199 |
| $span(G)$ | $G$ 的 $\gamma$ 标号跨距 | 199 |
| $S_k$ | 亏格为 $k$ 的曲面 | 216 |
| $\gamma(G)$ | $G$ 的亏格 | 216 |
| $\text{fr}(G)$ | $G$ 框架数 | 226 |
| $\chi(G)$ | $G$ 色数 | 237 |
| $\omega(G)$ | $G$ 的团数 | 241 |
| $S(G)$ | $G$ 的影子图 | 244 |
| $\chi_1(G)$ | $G$ 的边色数 | 248 |
| $\chi(S_k)$ | $S_k$ 的色数 | 257 |
| $\chi(c)$ | 染色 $c$ 的值 | 260 |
| $\chi(G;P)$ | $G$ 的 $P$ 色数 | 260 |

| | | |
|---|---|---|
| $m_s$ | $\langle S \rangle$ 的边数 | 260 |
| $\chi_\ell$ | 局部染色 $c$ 的值 | 261 |
| $\chi_\ell(G)$ | $G$ 的局部色数 | 261 |
| $\bar{c}$ | $c$ 的补染色 | 261 |
| $r(F_1, F_2)$ | $F_1$ 和 $F_2$ 的 Ramsey 数 | 265 |
| $r(s,t)$ | $K_s$ 和 $K_t$ 的 Ramsey 数 | 268 |
| $T_{n,k}$ | Turán 图 | 277 |
| $RR(F)$ | $F$ 的彩色 Ramsey 数 | 281 |
| $RR(F_1, F_2)$ | $F_1$ 和 $F_2$ 的彩色 Ramsey 数 | 282 |
| $rr(F_1, F_2)$ | $F_1$ 的 $F_2$ 受限彩色 Ramsey 数 | 283 |
| $e(v)$ | 顶点 $v$ 的离心率 | 309 |
| $\mathrm{rad}(G)$ | $G$ 的半径 | 291 |
| $\mathrm{Cen}(G)$ | $G$ 的中心 | 291 |
| $\mathrm{Per}(G)$ | $G$ 的外围 | 306 |
| $\mathrm{Ecc}(G)$ | $G$ 的离心子图 | 297 |
| $\mathrm{Int}(G)$ | $G$ 的内部 | 300 |
| $\mathrm{loc}(G)$ | $G$ 的定位数 | 303 |
| $c_W(v)$ | 顶点 $v$ 关于 $W$ 的定位代码 | 303 |
| $D(u,v)$ | 从 $u$ 到 $v$ 的绕路距离 | 306 |
| $e_D(v)$ | $v$ 的绕路离心率 | 307 |
| $\mathrm{rad}_D(G)$ | $G$ 的绕路半径 | 308 |
| $\mathrm{diam}_D(G)$ | $G$ 的绕路直径 | 308 |
| $\mathrm{rc}_k(c)$ | $G$ 的广播 $k$ 着色 $c$ 的值 | 313 |
| $\mathrm{rc}_k(G)$ | $G$ 的广播 $k$ 色数 | 313 |
| $\mathrm{rn}(c)$ | 广播标号 $c$ 的值 | 314 |
| $\mathrm{rn}(G)$ | $G$ 的广播数 | 314 |
| $\bar{c}'$ | $c$ 的补标号 | 315 |
| $d(G,H)$ | $G$ 和 $H$ 的旋转距离 | 316 |
| $D(S)$ | 集合 $S$ 的旋转距离图 | 318 |
| $N[v]$ | $v$ 的闭邻域 | 319 |
| $\gamma(G)$ | $G$ 的控制数 | 319 |
| $\gamma_o(G)$ | $G$ 的开 (总) 控制数 | 325 |
| $\gamma_F(G)$ | $G$ 的 $F$ 控制数 | 331 |

[General Information]
书名=图论导引
作者=（美）GARY CHARTRAND，PING ZHANG著
页数=400
SS号=11853819
出版日期=2007.9

前言
目录
第１章　引言
１．１　　图与图模型
１．２　连通图
１．３　若干常见的图类
１．４　多重图与有向图
第２章　度
２．１　顶点的度
２．２　正则图
２．３　度序列
２．４　延伸阅读：图与矩阵
２．５　专题探索：不规则图
第３章　同构图
３．１　同构的定义
３．２　同构关系
３．３　延伸阅读：图与群
３．４　延伸阅读：重构与可解性
第４章　树
４．１　割边
４．２　树
４．３　最小生成树问题
４．４　延伸阅读：生成树的个数
第５章　连通性
５．１　割点
５．２　块
５．３　连通度
５．４　Ｍｅｎｇｅｒ定理
５．５　专题探索：测地集
第６章　可遍历性
６．１　Ｅｕｌｅｒ图
６．２　Ｈａｍｉｌｔｏｎ图
６．３　　专题探索：Ｈａｍｉｌｔｏｎ链与Ｈａｍｉｌｔｏｎ数
６．４　延伸阅读：早期的图论书籍
第７章　有向图
７．１　强有向图
７．２　竞赛图
７．３　延伸阅读：决策
７．４　专题探索：酒瓶问题
第８章　匹配与分解
８．１　匹配
８．２　因子分解
８．３　分解与优美标号
８．４　延伸阅读：立即疯游戏
８．５　延伸阅读：Ｐｅｔｅｒｓｅｎ图
８．６　专题探索：图的γ标号
第９章　可平面性
９．１　平面图
９．２　图嵌入到曲面
９．３　延伸阅读：图的子式
９．４　专题探索：图嵌入到图
第１０章　染色
１０．１　四色问题

１０．２　顶点染色
１０．３　边染色
１０．４　延伸阅读：Ｈｅａｗｏｏｄ地图染色定理
１０．５　专题探索：局部染色
第１１章　Ｒａｍｓｅｙ数
１１．１　　图的Ｒａｍｓｅｙ数
１１．２　Ｔｕｒáｎ定理
１１．３　专题探索：彩色Ｒａｍｓｅｙ数
１１．４　延伸阅读：Ｅｒｄ？ｓ数
第１２章　距离
１２．１　图的中心
１２．２　远点
１２．３　延伸阅读：定位数
１２．４　延伸阅读：绕路距离和有向距离
１２．５　专题探索：频道分配
１２．６　专题探索：图与图之间的距离
第１３章　控制
１３．１　图的控制数
１３．２　专题探索：分层
１３．３　专题探索：关灯游戏
１３．４　延伸阅读：明天更美好
附录１　集合与逻辑
附录２　等价关系与映射
附录３　证明方法
奇数号习题的解答与提示
参考文献
人名索引
数学术语索引
符号列表